

# فصل سوم

## تابع

❖ درس اول:

آشنایی با برخی از انواع تابع

❖ درس دوم:

وارون یک تابع و تابع یک به یک

❖ درس سوم:

اعمال جبری روی توابع

بازم فصل ۳:

شهریوردی	نوبت دوم	نوبت اول
۳	۲/۵	۶

# فصل ۳ درس ۱: آشنایی با برخی از انواع تابع

## پیش نیازهای درس ۱:

- تشخیص جمله عمومی یک الگو
- شناخت مفهوم تابع و بازنمایی های آن
- ارتباط بین بازنمایی های مختلف تابع و تبدیل آنها به یکدیگر
- شناخت مفهوم دامنه و برد یک تابع از روی نمودار
- حل نامعادلات درجه اول
- شناخت توابع چندجمله ای
- شناخت عملگر رادیکال

## اهداف درس ۱:

- آشنایی با توابع گویا و تعیین دامنه آن
- رسم تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{x}$
- درک تساوی دو تابع از روی نمودار و همچنین از روی ضابطه و دامنه
- آشنایی با توابع رادیکالی
- رسم تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$
- رسم توابع حاصل از انتقال طولی و عرضی تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$
- آشنایی با توابع پله ای
- آشنایی با عملگر جزء صحیح
- شناخت و رسم تابع جزء صحیح

## تابع:

یک رابطه هنگامی تابع است که بتوانیم به هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از B را نسبت دهیم.

## ضابطه و دامنه تابع:

به دستور یا قانون بیانگر تابع، ضابطه آن تابع می‌گوییم.

$$y = f(x)$$

یک تابع با ضابطه و دامنه آن مشخص می‌شود، اگر دامنه تابع ذکر نشود، بزرگترین دامنه ممکن را برای آن تابع در نظر می‌گیریم.

دامنه تابع چند جمله‌ای برابر مجموعه اعداد حقیقی (R) است

## انواع توابع:

- |                  |               |
|------------------|---------------|
| (۱) چند جمله‌ای  | (۲) ثابت      |
| (۳) چند ضابطه‌ای | (۴) همانی     |
| (۵) قدر مطلق     | (۶) گویا      |
| (۷) رادیکالی     | (۸) پله‌ای    |
| (۹) جزء صحیح     | (۱۰) یک به یک |
| (۱۱) مثلثاتی     | (۱۲) لگاریتمی |
| (۱۳) نمایی       |               |
- با توابع ۱ تا ۵ در سال دهم آشنا شده‌اید.

## توابع گویا:

هر تابع به شکل  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  را یک تابع گویا می‌نامیم

که صورت و مخرج، چند جمله‌ای هستند و مخرج صفر نیست.

$$\text{مثل: } f(x) = \frac{1}{x}$$

(فعالیت ص ۴۹)

توابع زیر نمونه‌هایی از توابع گویا هستند:

$$f(x) = \frac{x}{x+5}, \quad f(x) = \frac{x+3}{x-10}$$

$$f(x) = \sqrt{5x}, \quad f(x) = 2$$

## دامنه توابع گویا:

توابع گویا به ازای مقادیری که مخرج کسر را صفر می‌کند تعریف نمی‌شود چون کسری که مخرجش صفر است وجود ندارد. بنابراین دامنه آن به صورت:

$$D_f = R - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

تذکر: همواره دامنه تابع را قبل از ساده کردن ضابطه آن محاسبه می‌کنیم.

مثل:

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow x = 0 \rightarrow D_f = R - \{0\}$$

$$f(x) = \frac{5}{x-2} \rightarrow x-2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow D_f = R - \{2\}$$

(گارد در کلاسی ص ۵۰)

دامنه هر یک از توابع گویای داده شده را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{x}{x+5} \rightarrow x+5=0 \rightarrow x=-5 \rightarrow D_f = R - \{-5\}$$

$$g(x) = \frac{3}{x-4} \rightarrow x-4=0 \rightarrow x=4 \rightarrow D_g = R - \{4\}$$

## تمرین ۲ و ۳ (ص ۵۶): Homework

② دامنه تابع گویای  $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$  را به دست آورید.

④ تابعی گویا بنویسید که دامنه آن  $D_g = R - \{-1\}$  شود.

## تساوی دو تابع:

شرط تساوی دو تابع:

(۱) تساوی دامنه ها

(۲) تساوی ضابطه ها

✓ نکته: اگر دو تابع برابر باشند، نمودار آنها کاملاً بر هم

منطبقند

✓ در تشخیص تساوی دو تابع ابتدا تساوی دامنه را

چک می کنیم

(مثال ص ۵۱)

آیا دو تابع با ضابطه  $g(x) = 2$ ،  $f(x) = \frac{2x}{x}$  مساویند؟

چرا؟ خیر زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} D_f = R - \{0\} \\ D_g = R \end{array} \right\} \rightarrow D_f \neq D_g$$

(گارد رگلاسی ۱ ص ۵۱)

① آیا دو تابع با ضابطه  $g(x) = x$ ،  $f(x) = \frac{x^2}{x}$  مساویند؟ چرا؟ خیر زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} D_f = R - \{0\} \\ D_g = R \end{array} \right\} \rightarrow D_f \neq D_g$$

## تمرین ۳ ص ۵۶: Homework

③ در هر مورد آیا دو تابع مساویند؟

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \frac{|x|}{x}$$

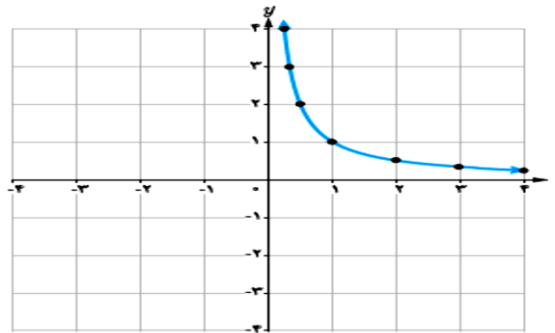
$$\text{ب) } f(x) = x - 2, \quad g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ رسم تابع با ضابطه}$$

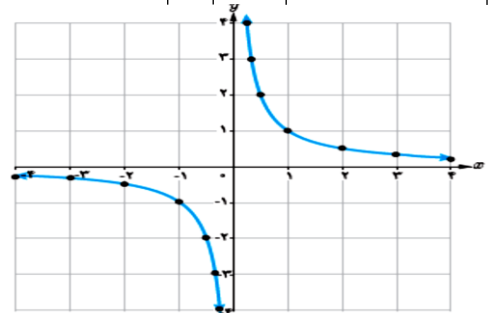
(فعالیت ص ۴۹)

نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{x}$  را با هر یک از دامنه های $D_f = R - \{0\}$  و  $D_f = (0, +\infty)$  رسم کنید. حل:

$$D_f = (0, +\infty) \rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|} x & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \hline \frac{1}{x} & 2 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$$



$$D_f = R - \{0\} \rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} x & \dots & -2 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & \dots \\ \hline y & \dots & -\frac{1}{2} & -1 & -2 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & \dots \end{array}$$



## تمرین ۴ ص ۵۶: Homework

① نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{x}$  را با دامنه $D_f = [-5, 5] - \{0\}$  رسم کنید.

توابع رادیکالی:

هر تابع به شکل  $f(x) = \sqrt{g(x)}$  را یک تابع رادیکالی می نامیم که در آن  $g(x)$  منفی نیست (یعنی صفر یا مثبت است). مثل:  $f(x) = \sqrt{x}$ .

دامنه توابع رادیکالی:

برای تعیین دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج، عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار می دهیم و نامعادله را حل می کنیم.

$$D_f = g(x) \geq 0$$

مثل:

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} \rightarrow x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2 \rightarrow D_f = [-2, +\infty)$$

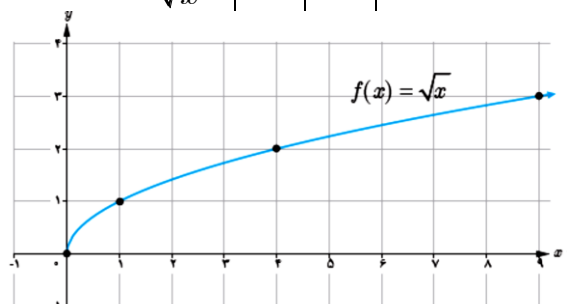
رسم تابع باضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$ 

ابتدا دامنه را مشخص و سپس از طریق نقطه یابی نمودار را رسم می کنیم.

(مثال ص ۵۲)

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

$x$	۰	۱	۴
$\sqrt{x}$	۰	۱	۲

یادآوری:مراحل رسم توابع به کمک انتقال:

تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$y = af(bx + c) + d$$

- $a, d$  روی عرض نقاط  $(y)$  تاثیر مستقیم دارند و انتقال به صورت آسانسوری است
- $b, c$  روی طول نقاط  $(x)$  تاثیر معکوس دارند و انتقال قطاری است.

اولویت ها:

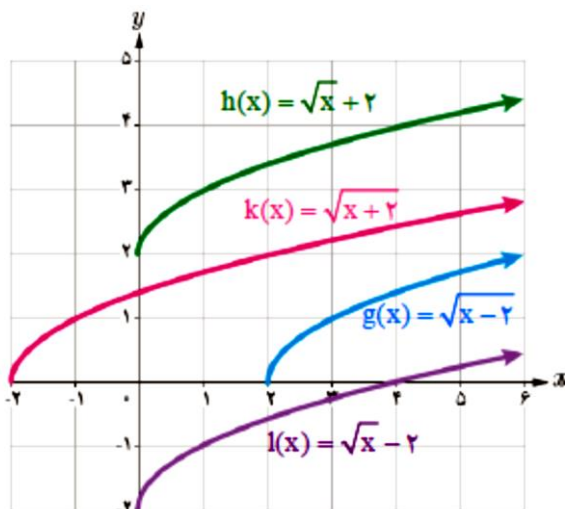
اول  $(x)$  یا  $(y)$  فرقی ندارد ولی:

- در  $(x)$  ها اول  $c$  سپس  $b$
- در  $(y)$  ها اول  $a$  سپس  $d$

رسم توابع حاصل از انتقال طولی و عرضی تابع باضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$ :

(فعالیت او آ و آ ص ۵۳)

- ① مشخص کنید که هر نمودار، مربوط به کدام تابع است . سپس دامنه آنها را تعیین کنید. حل:



$$g(x) = \sqrt{x-2} \rightarrow x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow D_g = [2, +\infty)$$

## توابع پله ای:

هر تابع چند ضابطه ای که همه ضابطه هایش عدد ثابت باشد

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 3 & x \geq 1 \end{cases}$$

را تابع پله ای می نامیم. مثل:

(فعالیت ص ۵۴)

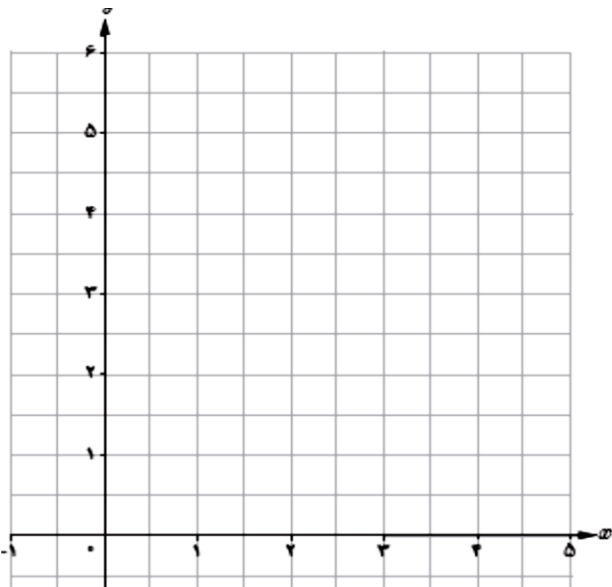
در یک پارکینگ، هزینه پارک خودرو به این صورت محاسبه می شود:

هزینه (هزار تومان)	زمان	از هنگام ورود
۳	تا کمتر از ۲ ساعت	از هنگام ورود
۴	تا ۲/۵ ساعت	از ۲ ساعت
۵	تا کمتر از ۳ ساعت	از بیشتر از ۲/۵ ساعت
۶	تا ۵ ساعت	از ۳ ساعت

الف) ضابطه تابع هزینه پارکینگ خودرو چیست؟ حل:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq 2/5 \\ 5 & 2/5 < x < 3 \\ 6 & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

ب) نمودار این تابع را رسم کنید.



$$h(x) = \sqrt{x+2} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_h = [0, +\infty)$$

$$k(x) = \sqrt{x+2} \rightarrow x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2 \rightarrow D_k = [-2, +\infty)$$

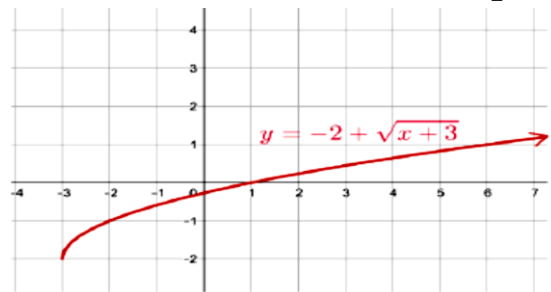
$$l(x) = \sqrt{x-2} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_l = [0, +\infty)$$

② نمودار تابع با ضابطه  $y = -2 + \sqrt{x+3}$  را رسم کنید.

حل: برای رسم  $y = \sqrt{x+3} - 2$  نمودار  $y = \sqrt{x}$  را

را ۳ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین منتقل می کنیم

$$y = -2 + \sqrt{x+3} \rightarrow x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow D = [-3, +\infty)$$



③ نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$  را رسم

کنید. سپس دامنه آن را بیابید.

## تمرین ۵ ص ۵۶: Homework

⑤ نمودار تابع با ضابطه  $g(x) = -3 + \sqrt{x-4}$  را رسم

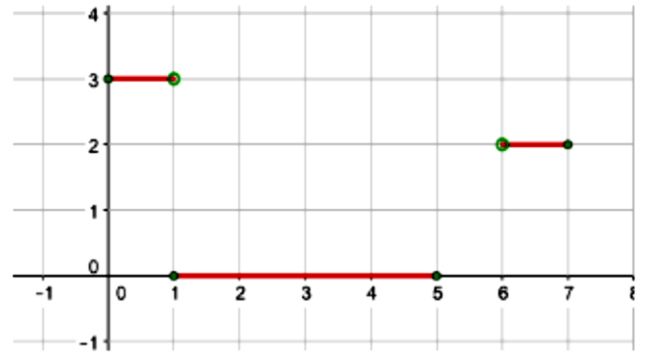
کنید.

(تمرین ۷ ص ۵۶)

⑦ تابع پله ای روبه رو را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in [0, 1) \\ 0 & x \in [1, 5] \\ 2 & x \in (6, 7] \end{cases}$$

حل:



توابع جزء صحیح:

توابع جزء صحیح یا براکت از نوع توابع پله ای است که به

صورت  $f(x) = [x]$  می باشد که می خوانیم جزء صحیح  $x$

یا براکت  $x$ . مثل  $f(x) = [2]$

دامنه توابع جزء صحیح:

تابع جزء صحیح کارش صحیح سازیه و هر عددی که وارد تابع شود جزء صحیح آن عدد را بیرون می دهد. بنابراین:

$$D_f = R$$

✓ نکته: جزء صحیح (براکت) هر عدد صحیح، برابر

است با خود آن عدد

$$\begin{cases} x \\ \downarrow \\ x \in Z \end{cases} = x \rightarrow [2] = 2, \quad [-2] = -2$$

✓ جزء صحیح (براکت) هر عدد غیر صحیح، برابر است

با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد.

$$\begin{cases} x \\ \downarrow \\ x \notin Z \end{cases} \xrightarrow{n < x < n+1} n$$

$$n \leq x < n+1 \rightarrow [x] = n$$

مثل:

$$[2/4] = 2$$

$$[-0/7] = -1$$

✓ راه کوتاه: براکت در اعداد مثبت، اعشار را از بین می برد و در اعداد منفی علاوه بر از بین بردن اعشار، یک واحد هم کم می کند. مثل:

$$[2/7] = 2 \quad [-2/7] = -2 - 1 = -3$$

(مثال ص ۵۴ و کاربرد کلاسی او ۲ ص ۵۵ و تمرین ۶ ص ۵۶)

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$[4] = 4 \quad [6/1] = 6 \quad [0] = 0$$

$$[-4/3] = -5 \quad [-3] = -3 \quad [-3/4] = -4$$

$$[-2] = \quad [-1/9] = \quad [0/4] =$$

$$[-0/4] = \quad [4/25] = \quad [3] =$$

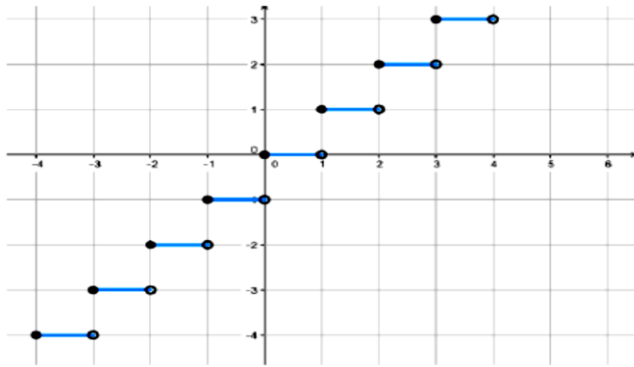
$$[2/3] = \quad [1/7] = \quad [1/2] =$$

$$\left[ \frac{41}{37} \right] = \quad \left[ -\frac{13}{51} \right] =$$

$$[300/4002] =$$

$$[-103/003] =$$

$$[-2309/54] =$$



### تمرین ۸ ص ۵۶: Homework

- ⑧ تابع با ضابطه  $f(x) = [x] + 2$  و دامنه  $D_f = [-3, 3)$  را رسم کنید.

✓ نکته: اگر  $x$  عدد حقیقی و  $n$  عددی صحیح باشد:

$$[x \pm k] = [x] \pm k$$

$$[x + 2] = [x] + 2$$

$$[x - 5] = [x] - 5$$

(فعالیت ۱ ص ۵۵)

① اگر  $[x] = 2$  آن گاه  $x$  برابر چه اعدادی می تواند باشد؟

حل:

$$[x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow [2, 3)$$

### مراتل رسم تابع جزء صحیح:

- ۱) بازه داده شده را به چند زیر بازه تقسیم می کنیم.
  - ۲) براکت هر بازه را به دست می آوریم
  - ۳) نقاط را روی محور پیدا کرده و نمودار را رسم می کنیم
- (فعالیت ۲ ص ۵۵)

② تابع با ضابطه  $f(x) = [x]$  و دامنه  $D_f = [-4, 4)$

را رسم کنید. حل:

$x$	$y = [x]$
$[-4, -3)$	-4
$[-3, -2)$	-3
$[-2, -1)$	-2
$[-1, 0)$	-1
$[0, 1)$	0
$[1, 2)$	1
$[2, 3)$	2
$[3, 4)$	3