

## فصل ۴ درس ۲: روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

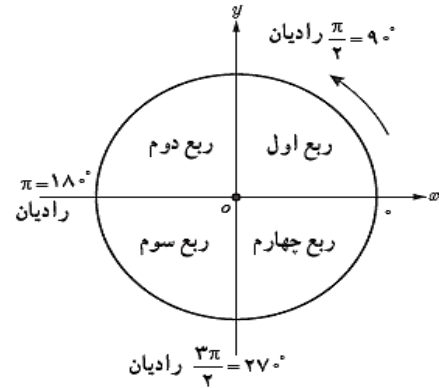
### پیش نیاز های درس ۲:

- شناخت دایره مثلثاتی و جهت مثلثاتی و پیدا کردن زوایا روی دایره مثلثاتی
- آشنایی با اتحاد های مثلثاتی فصل مثلثات در سال دهم
- محاسبه نسبت های مثلثاتی زوایای:  $۳۰^\circ, ۴۵^\circ, ۶۰^\circ, ۹۰^\circ, ۱۸۰^\circ, ۲۷۰^\circ, ۳۶۰^\circ$
- شناخت علامت نسبت های مثلثاتی در هر ربع از دایره مثلثاتی
- آشنایی با مفهوم قرینه نقطه  $(x, y)$  نسبت به محور  $x$  ها و  $y$  ها و مبدأ مختصات.

### اهداف درس ۲:

- شناخت زاویه قرینه  $(-\alpha)$  و معرفی نسبت های مثلثاتی آن
- شناخت زاویه مکمل  $(\pi - \alpha)$  و معرفی نسبت های مثلثاتی آن
- شناخت زاویه با اختلاف  $\pi$  رادیان  $(\pi + \alpha)$  و معرفی نسبت های مثلثاتی آن
- شناخت زاویه متمم  $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$  و معرفی نسبت های مثلثاتی آن
- شناخت زاویه با اختلاف  $\frac{\pi}{2}$  رادیان و  $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$  معرفی نسبت های مثلثاتی آن
- شناخت زاویه هم انتها و معرفی نسبت های مثلثاتی آن

علامت نسبت های مثلثاتی در ربع های دایره و قانون هسک:



همه +	سینوس +	تانژانت کتانژانت +	کسینوس +
↓	↓	↓	↓
ه	س	ت	ک
↓	↓	↓	↓
ربع ۱	ربع ۲	ربع ۳	ربع ۴

(فعالیت ۱ ص ۷۷)

① جدول زیر را کامل کنید.

زاویه α	انتهای کمان روبه روی α	علامت نسبت مثلثاتی
۷۵°	ربع اول	$\tan \alpha > 0$
۱۵°		$\sin \alpha$
۲۱°		$\cos \alpha$
۲۴°		$\cot \alpha$
۲۸۵°		$\tan \alpha$
زاویه α	انتهای کمان روبه روی α	علامت نسبت مثلثاتی
رادیان $\frac{3\pi}{4}$	ربع دوم	$\cos \alpha < 0$
رادیان $\frac{4\pi}{5}$		$\sin \alpha$
رادیان $\frac{5\pi}{3}$		$\tan \alpha$
رادیان $\frac{5\pi}{14}$		$\cos \alpha$
رادیان $\frac{5\pi}{4}$		$\cot \alpha$

جدول مقادیر نسبت های مثلثاتی:

(کاردر کلاسی ۲ و ۳ ص ۷۸) ② جدول زیر را کامل کنید.

زاویه α نسبت	۰ رادیان = ۰°	$\frac{\pi}{6}$ رادیان = ۳۰°	$\frac{\pi}{4}$ رادیان = ۴۵°	$\frac{\pi}{3}$ رادیان = ۶۰°
$\sin \alpha$		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	۱		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\tan \alpha$				
$\cot \alpha$			۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\pi}{4}$ رادیان = ۹۰°	$\pi$ رادیان = ۱۸۰°	$\frac{3\pi}{4}$ رادیان = ۲۷۰°	$2\pi$ رادیان = ۳۶۰°
		-۱	۰
	-۱		
تعریف نشده		تعریف نشده	

③ حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

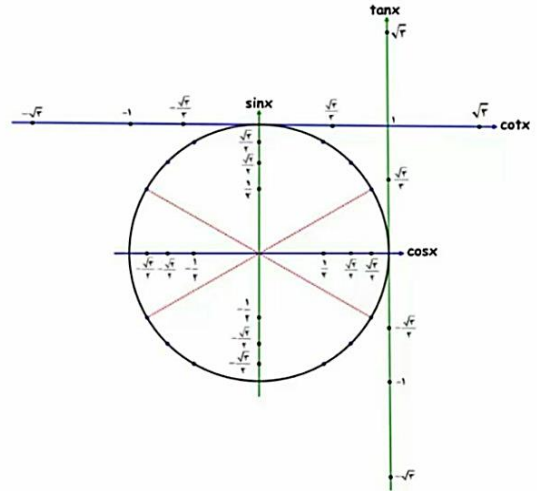
الف)  $\cot \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{3} \times \sin \frac{\pi}{4} =$

ب)  $\frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cot^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} + \cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ =$

✓ نکته: برای تعیین مقدار نسبت های مثلثاتی هر زاویه، ابتدا زاویه α را تند در نظر میگیریم و مشخص می کنیم زاویه در کدام ربع دایره است و با استفاده از قانون هسک علامت را یافته و پشت نسبت مثلثاتی قرار می دهیم.

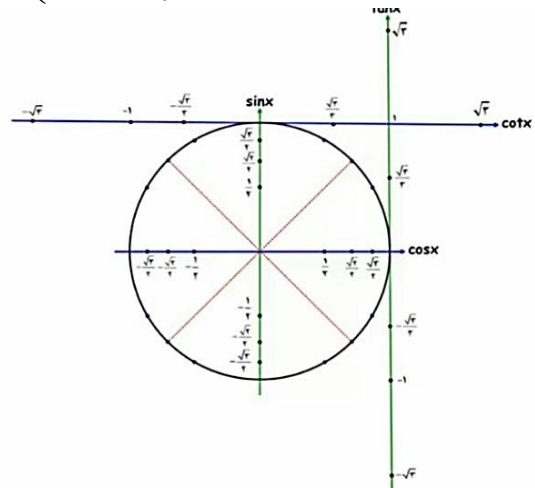
خانواده  $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ :

$$\left( \underbrace{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}}_R, \underbrace{30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ}_D \right)$$



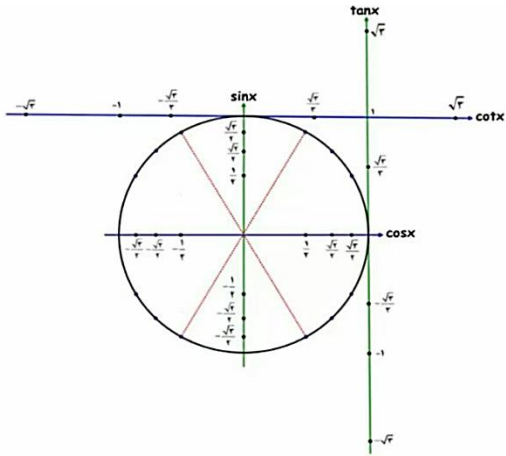
خانواده  $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ :

$$\left( \underbrace{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}}_R, \underbrace{45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ}_D \right)$$



خانواده  $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ :

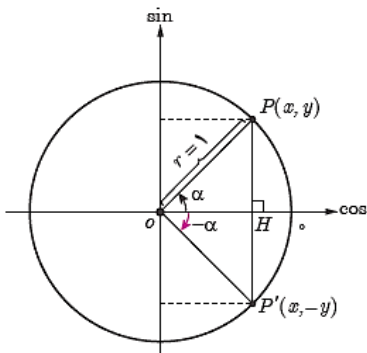
$$\left( \underbrace{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}}_R, \underbrace{60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ}_D \right)$$



زاویه قرینه  $(-\alpha)$  و نسبت های مشتاتی آن:

دو زاویه را قرینه گوئیم که مجموع آنها صفر شود. مثل:

$$\left( 30^\circ, -30^\circ \right), \left( \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right)$$



قرینه نسبت به محور افقی

$$(x, y) \longrightarrow (x, -y)$$

در حالت کلی:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

(مثال ص ۷۹):

مقدار نسبت های  $\sin(-30^\circ), \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$  را بیابید

حل:

$$\sin(-30^\circ) \xrightarrow{\text{ربع ۴}} \xrightarrow{\text{sin-}} -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\text{ربع ۴}} \xrightarrow{\text{cos+}} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

در حالت کلی:

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

(کاردرکلاسی ۱ ص ۸۰)

① مکمل هریک از زاویه های زیر را مشخص کنید:

$$-25^\circ \rightarrow 180^\circ - (-25^\circ) = 205^\circ$$

$$75^\circ \rightarrow$$

$$\frac{\pi}{12} \rightarrow \pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$$

$$\frac{-\pi}{4} \rightarrow$$

(مثال ص ۸۰ و ۸۱):

مقدار نسبت های  $\sin(15^\circ)$ ،  $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$  را بیابید. حل:

$$\sin(15^\circ) = \sin(180^\circ - 3^\circ) \xrightarrow{\sin+} \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{6\pi - \pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\xrightarrow{\cos-} -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مقدار  $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$  را از طریق خانواده  $\left(\frac{\pi}{6}\right)$  هم می توان یافت

(فعالیت ص ۸۱)

حاصل هریک از نسبت های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$$\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$\sin(120^\circ) =$$

(کاردرکلاسی ۲ ص ۸۰)

② حاصل هریک از عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$$

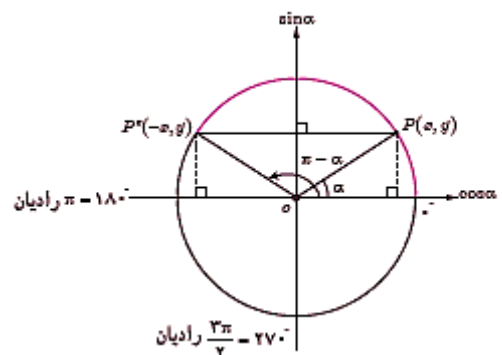
$$\text{الف) } \frac{\cos(-90^\circ) + \sin(-270^\circ)}{\sin(-180^\circ) - \cos(-360^\circ)}$$

$$\text{ب) } \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{پ) } \cos(-45^\circ) \times \cos(-60^\circ) + \sin(-45^\circ) \times \sin(-60^\circ)$$

زاویه مکمل  $(\pi - \alpha)$  و نسبت های مثلثاتی آن:دو زاویه را مکمل گوئیم؛ هرگاه مجموع آنها  $180^\circ$  یا  $\pi$  رادیان شود  $\alpha + \beta = \pi \rightarrow \beta = \pi - \alpha$  مثل:

$$\left(30^\circ, 150^\circ\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$$



قرینه نسبت به محور عمودی

$$(x, y) \rightarrow (-x, y)$$

(مثال صی ۸۲ و ۸۱):

مقدار نسبت های  $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ ,  $\tan(210^\circ)$  را بیابید.

حل:

$$\tan(210^\circ) = \tan(180^\circ + 30^\circ) \xrightarrow{\tan+} \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{6\pi + \pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \xrightarrow{\sin-} -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

مقدار  $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$  را از طریق خانواده  $\left(\frac{\pi}{6}\right)$  هم می توان یافت

(فعالیت صی ۸۲)

حاصل هریک از نسبت های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$$\sin 225^\circ =$$

$$\tan(-225^\circ) = -\tan(180^\circ + 45^\circ) \xrightarrow{\tan+} -\tan 45^\circ = -1$$

$$\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right) =$$

$$\sin\left(\frac{-7\pi}{6}\right) =$$

$$\cot\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$$

زاویه متمم  $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  نسبت های مثلثاتی آن:دو زاویه را متمم گوئیم؛ هرگاه مجموع آنها  $90^\circ$  یا  $\frac{\pi}{2}$ رادیان شود  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ . مثل:

$$\left(30^\circ, 60^\circ\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

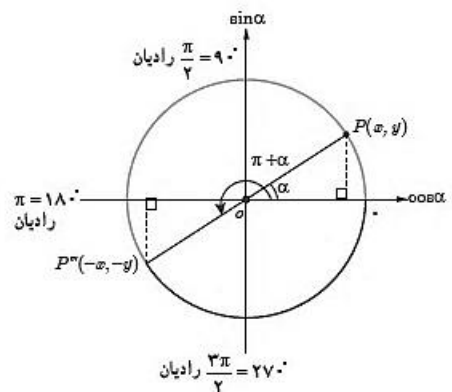
$$\cot(-120^\circ) =$$

$$\cos(135^\circ) =$$

(گاردو کلاسی ۴ صی ۸۵)

④ نسبت های مثلثاتی زاویه  $180^\circ$  را از روی مکمل آن بیابید.زاویه با اختلاف  $\pi$  رادیان  $(\pi + \alpha)$  و نسبت های مثلثاتی آن:دو زاویه را مکمل گوئیم؛ هرگاه اختلاف آنها  $180^\circ$  یا  $\pi$  رادیان شود  $\beta - \alpha = \pi \rightarrow \beta = \pi + \alpha$ . مثل:

$$\left(30^\circ, 210^\circ\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$$



قرینه نسبت به مبدا مختصات

$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$

در حالت کلی:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

(فعالیت ص ۸۳)

زاویه ای معرفی کنید که با متمم خودش برابر باشد .

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \cot \frac{\pi}{4} = 1, \quad \tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = \cos 0 = 1, \quad \sin 90^\circ = \cos 0^\circ = 1$$

$$\tan \frac{\pi}{2} = \cot 0 = \text{ت}, \quad \tan 90^\circ = \cot 0^\circ = \text{ت}$$

زاویه متمم  $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$  نسبت های مثلثاتی آن:

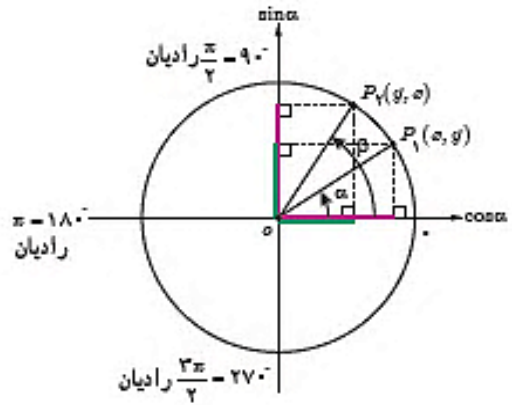
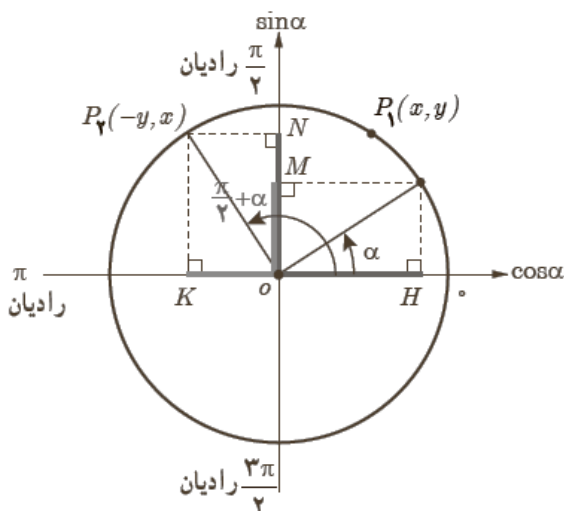
دو زاویه را متمم گوئیم؛ هرگاه اختلاف آنها  $90^\circ$  یا  $\frac{\pi}{2}$

رادیان شود  $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$

(گاردور کلاسی ص ۸۵)

② اختلاف کدام دو زاویه  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$  می شود؟

$$\left(120^\circ, 30^\circ\right), \left(135^\circ, 45^\circ\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$$



متمم  $(x, y) \rightarrow (y, x)$

در حالت کلی:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

مثال:

متمم هریک از زاویه های زیر را مشخص کنید:

$$30^\circ \rightarrow 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$45^\circ \rightarrow$$

$$\frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{4} \rightarrow$$

(مثال ص ۸۲):

مقدار نسبت های  $\tan(30^\circ), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$  را بیابید.

$$\tan(30^\circ) = \tan(90^\circ - 60^\circ) \xrightarrow[\tan \rightarrow \cot]{\text{ربع ۱}} \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \xrightarrow[\sin \rightarrow \cos]{\text{ربع ۱}} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(تمرین ۴ ص ۸۷)

④ در تساوی زیر به جای  $x$  یک زاویه مناسب قرار دهید.

الف)  $\sin x = \cos(20^\circ + x)$

حل: با توجه به رابطه نوشته شده باید زوایا متمم باشند.

$$x + 20^\circ + x = 90^\circ \rightarrow 2x = 70^\circ \rightarrow x = 35^\circ$$

ب)  $\tan\left(x + \frac{\pi}{18}\right) = \cot\left(\frac{2\pi}{9} + x\right)$

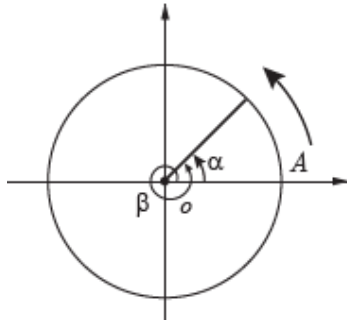
حل: با توجه به رابطه نوشته شده باید زوایا متمم باشند.

$$x + \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{9} + x = \frac{\pi}{2} \rightarrow 2x = \frac{4\pi}{18} \rightarrow x = \frac{\pi}{9}$$

زاویه هم انتها و نسبت های مثلثاتی آن:

دو زاویه  $\alpha$  و  $\beta$  را هم انتها گوئیم؛ هرگاه اضلاع انتهایی آنها بر هم منطبق شود و اختلاف آنها مضارب زوجی از  $\pi$ 

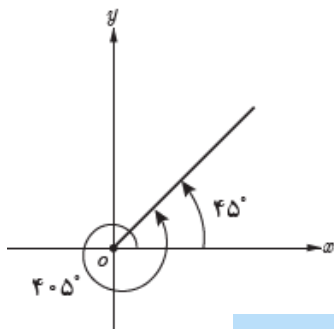
$$(2\pi, 4\pi, \dots) \text{ یا } 180^\circ \text{ یا } (360^\circ, 720^\circ, \dots)$$



(مثال ص ۸۶):

زاویه های  $(40.5^\circ, 45^\circ)$  هم انتها هستند زیرا

$$40.5^\circ - 45^\circ = 360^\circ$$



در حالت کلی:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

(مثال ص ۸۳):

مقدار نسبت های  $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ,  $\tan(150^\circ)$  را بیابید.

$$\tan(150^\circ) = \tan(90^\circ + 60^\circ) \xrightarrow[\tan \rightarrow \cot]{\text{ربع ۲}} -\cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \xrightarrow[\sin \rightarrow \cos]{\text{ربع ۲}} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(فعالیت و گارد در کلاسی ص ۸۴)

حاصل هریک از نسبت های مثلثاتی زیر را به دوروش مکمل و متمم به دست آورید

$$\sin 135^\circ =$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{6\pi - \pi}{3}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

ربع ۴  
sin-  $\rightarrow -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{12\pi - \pi}{4}\right) = \sin\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

ربع ۲  
sin+  $\rightarrow \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{8\pi - \pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

ربع ۴  
cos+  $\rightarrow \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

توجه:

در محاسبه  $k\pi \pm \alpha$  اگر  $k$  زوج بود،  $k\pi$  را حذف می کنیم  
اگر  $k$  فرد بود جای  $k\pi$  عدد  $\pi$  را قرار می دهیم

### تمرین او ۲ و ۳ ص ۸۷): Homework:

① حاصل عبارت های زیر را بیابید.

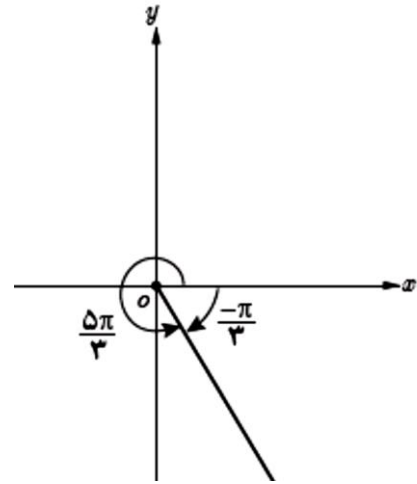
الف)  $\tan 135^\circ + \cot 120^\circ =$

ب)  $\cos(-210^\circ) + \cot(240^\circ) =$

ب)  $\sin 630^\circ + \tan(-540^\circ) =$

زاویه های  $\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$  هم انتها هستند زیرا

$$\frac{5\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$$



در حالت کلی:

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

(مثال و کاربرد کلاسی ص ۸۶):

مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را بیابید.

ربع ۱

$$\tan(405^\circ) = \tan(360^\circ + 45^\circ) \xrightarrow{\tan+} \tan 45^\circ = 1$$

$$\sin(75^\circ) =$$

$$\tan(-315^\circ) =$$

$$\cos(300^\circ) =$$

$$\sin(420^\circ) =$$

$$\cot(-330^\circ) =$$



③ درستی تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف)  $\sin 84^\circ = \sin 6^\circ$

حل:

$$\sin 84^\circ = \sin(72^\circ + 12^\circ) = \sin 12^\circ$$

$$= \sin(18^\circ - 6^\circ) \xrightarrow{\text{ربع ۲}} \sin 6^\circ$$

ب)  $\cos(-324^\circ) = \cos 36^\circ$

پ)  $\tan(-100^\circ) = \tan 8^\circ$

ت)  $\sin 875^\circ = \sin 155^\circ$

ت)  $\cos(-72^\circ) + \cot(-60^\circ) + \tan 72^\circ - \tan(-60^\circ) =$

ث)  $\sin \frac{25\pi}{3} - \cos \frac{23\pi}{4} =$

ج)  $\frac{\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6}}{\sin(-\frac{3\pi}{4}) - \tan(-\frac{4\pi}{3})} =$

② جدول زیر را کامل کنید. حل:

زاویه $x$ نسبت	$12^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	$300^\circ$	$330^\circ$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	$-1$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$1$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot x$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-1$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

مقادیر سینوس و کسینوس بعضی زوایا روی دایره مثلثاتی:

