

فصل ۴ درس ۳: توابع مثلثاتی

پیش نیازهای درس ۱:

- محاسبه نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس تمامی زوایا
- آشنایی با مفهوم بازه ها
- شناخت دامنه و برد
- درک مفاهیم انتقال عمودی، افقی، انبساط و انقباض در راستای محور x های نمودار توابع

اهداف درس ۱:

- آشنایی با رسم توابع سینوس و کسینوس در صفحه مختصات از طریق نقطه یابی
- آشنایی با ویژگی های توابع سینوس و کسینوس
- رسم تابع با ضابطه $y = a \sin(x + b)$ به کمک انتقال $y = \sin x$
- رسم تابع با ضابطه $y = a \cos(x + b)$ به کمک انتقال $y = \cos x$

تابع مثلثاتی:

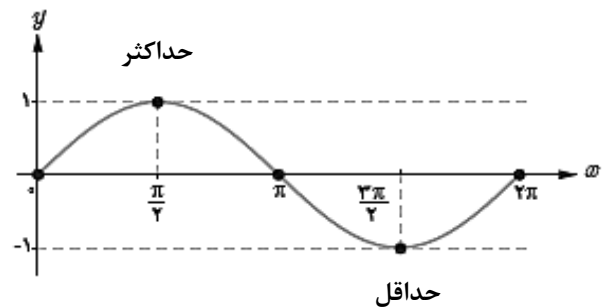
هر تابع شامل نسبت های مثلثاتی را تابع مثلثاتی می گوئیم که ساده ترین آن $y = \sin x$ و $y = \cos x$ می باشد.

رسم تابع سینوس ($y = \sin x$) از طریق نقطه یابی:

(فعالیت ص ۸۸ و ۸۹)

۵ نقطه مهم را در جدول مقادیر مشخص می کنیم و نقاط را روی محور مختصات پیدا و به هم وصل می کنیم

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	۰	۱	۰	-۱	۰
تغییرات		↗	↘	↘	↗

ویژگی های تابع سینوس با ضابطه ($y = \sin x$):

(فعالیت ص ۸۷ و ۸۹)

⑦ نمودار تابع سینوس در بازه های $[0, 2\pi]$ و $[2\pi, 4\pi]$

و... همچنین در بازه های $[-2\pi, 0]$ و $[-4\pi, -2\pi]$

و... نیز یکسان است.

بنابراین به آن تابع متناوب می گوئیم چون در فواصل معینی

نمودار آن تکرار می شود. طول هر یک از این فاصله را دوره

تناوب می گوئیم و دوره تناوب آن $T = 2\pi$ می باشد.

⑧ کامل کنید:

الف) دامنه ی تابع سینوس R و برد آن $[-1, 1]$ است.

ب) مقدار تابع سینوس ($y = \sin x$) در طول های $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ برابر (۰) است.

پ) حداکثر مقدار تابع سینوس ($y = \sin x$) برابر (۱) است

که در نقاطی به طول های $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ و $x = \frac{5\pi}{2}$

و در حالت کلی $x = \frac{-7\pi}{2}$ و $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

دست می آید.

ت) حداقل مقدار تابع سینوس ($y = \sin x$) برابر (-۱) است

که در نقاطی به طول های $x = \frac{-\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ و $x = \frac{5\pi}{2}$

و در حالت کلی $x = \frac{7\pi}{2}$ و $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

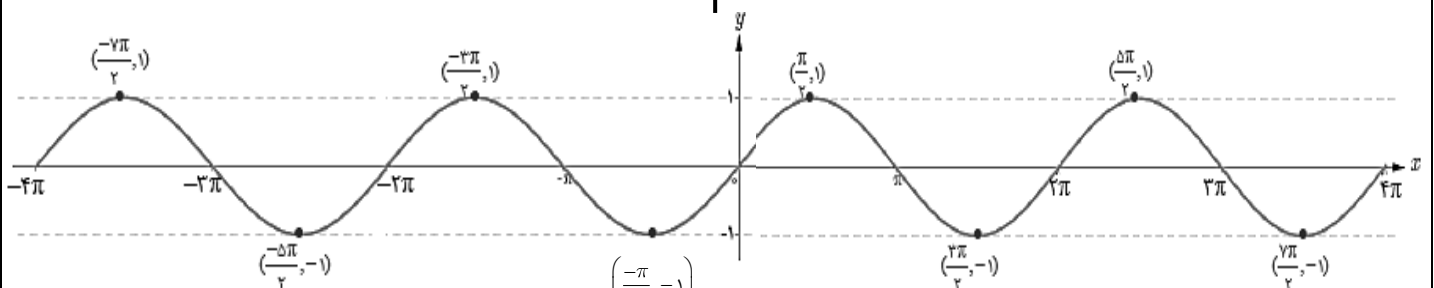
دست می آید.

✓ نکته: برای رسم توابعی به صورت

$$y = a \sin(x + b)$$

نقطه یابی استفاده کرد (برای یادآوری مراحل رسم

توابع به فصل ۳ درس ۱ رجوع شود)

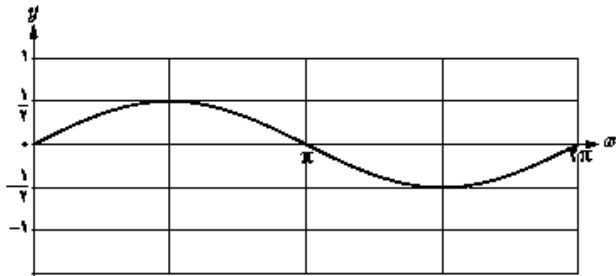


(تمرین ۴ ص ۹۴)

۴) با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام نادرست اند.

الف) شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{1}{2} \sin x$ را نشان می دهد.

حل: درست است زیرا مقادیر y نصف شده است



پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $(y = 1 + \sin x)$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه یک واحد در راستای محور x ها انتقال دهیم.

حل: نادرست است زیرا نمودار باید در راستای محور y ها انتقال یابد

(تمرین ۲ ص ۹۳)

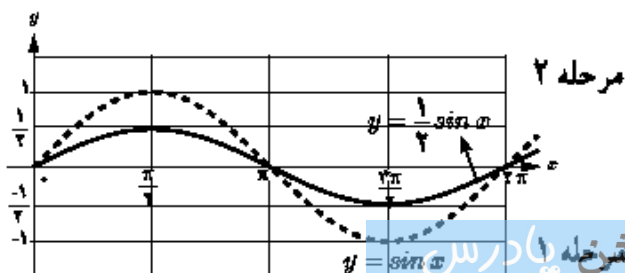
۲) نمودار هر یک از توابع با ضابطه های زیر را در دستگاه مختصات در بازه های داده شده رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار $(y = \sin x)$ را رسم می کنیم سپس به کمک انتقال یا نقطه یابی نمودار خواسته شده را رسم میکنیم و با توجه به بازه داده شده نمودار را حذف کرده و یا امتداد می دهیم.

۱) $y = \frac{1}{2} \sin x$, $[0, 2\pi]$

انتقال به صورت آسانسوری است و مقادیر y نصف می شوند

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0



(گارد رگلاسی ص ۹۰)

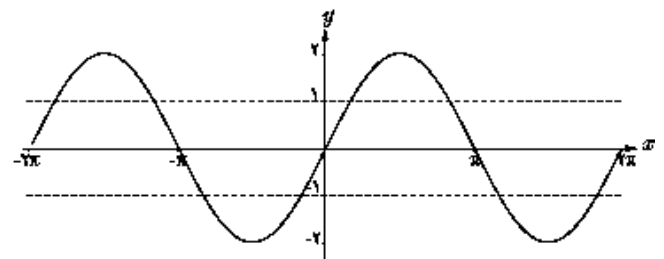
هر یک از توابع با ضابطه های داده شده دارای کدام نمودار است؟

۱) $y = 2 \sin x$

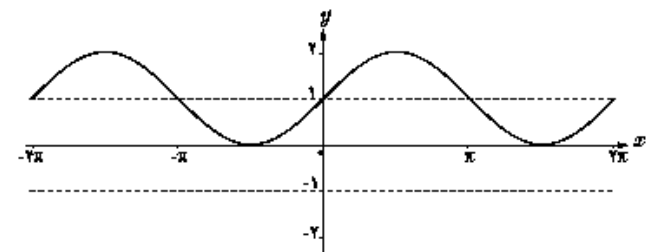
۲) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

۳) $y = \sin x + 1$

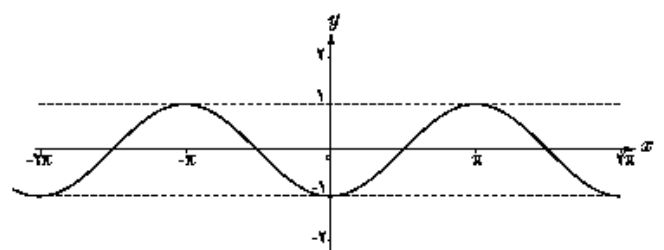
۴) $y = -\sin x + 1$



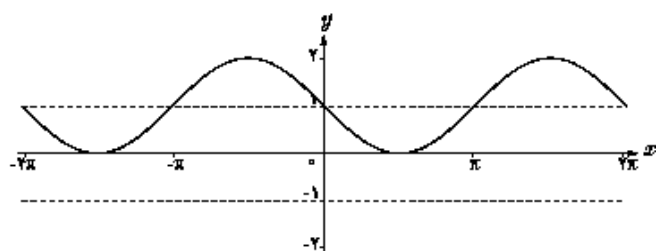
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

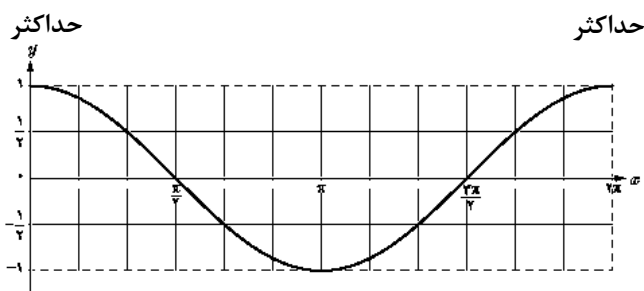


رسم تابع کسینوس $y = \cos x$ از طریق نقطه یابی:

(فعالیت ص ۹۱ و ۹۲)

۵ نقطه مهم را در جدول مقادیر مشخص می کنیم و نقاط را روی محور مختصات پیدا و به هم وصل می کنیم

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	۱	۰	-۱	۰	۱
تغییرات		↘	↘	↗	↗



حداقل

ویژگی های تابع کسینوس با ضابطه $(y = \cos x)$:

(فعالیت ص ۷ و ۸ ص ۹۲ و ۹۳)

⑧ کامل کنید:

الف) دامنه ی تابع کسینوس R و برد آن $[-1, 1]$ است.

ب) مقدار تابع کسینوس $(y = \sin x)$ در طول های

$x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z$ برابر (۰) است.

پ) حداکثر مقدار تابع کسینوس $(y = \cos x)$ برابر (۱) است

که در طول های $x = 2k\pi, k \in Z$ به دست می آید.

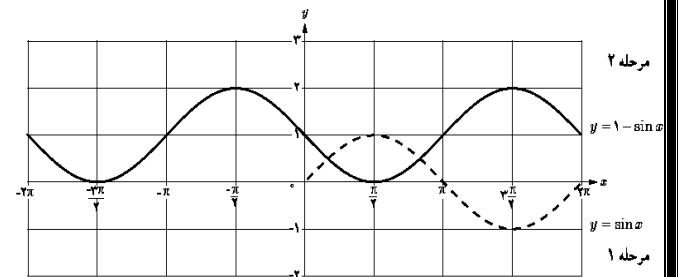
ت) حداقل مقدار تابع کسینوس $(y = \cos x)$ برابر (-۱)

است که در طول های $x = (2k + 1)\pi, k \in Z$ به دست می آید.

$$۳) y = 1 - \sin x, \quad [-2\pi, 2\pi]$$

در تابع $y = -\sin x + 1$ انتقال به صورت آسانسوری است و مقادیر y ابتدا در -۱ ضرب سپس با ۱ جمع می شوند با توجه به بازه داده شده نمودار را امتداد می دهیم.

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	۱	۰	۱	۲	۱
	$0(-1)+1$	$1(-1)+1$	$0(-1)+1$	$-1(-1)+1$	$0(-1)+1$

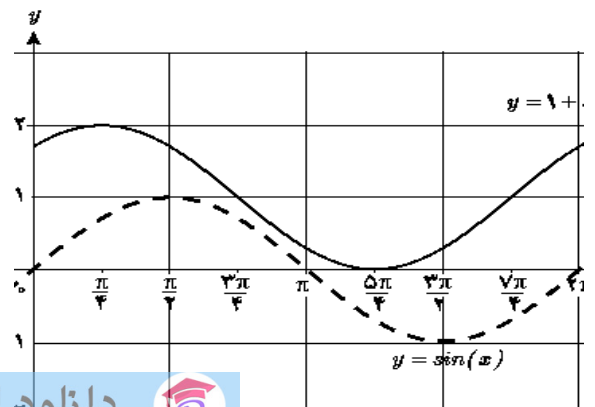


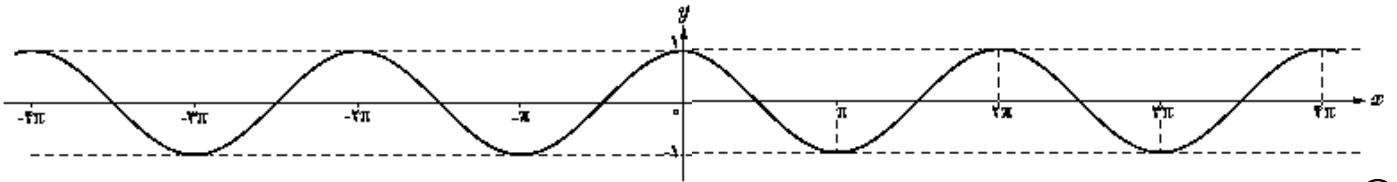
$$۵) y = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad [0, 2\pi]$$

در $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ انتقال به صورت آسانسوری

وقطاری است و مقادیر y با اجمع و مقادیر x منهای $\frac{\pi}{4}$ می شوند و با توجه به بازه داده شده نمودار را حذف می کنیم.

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
	$0 - \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$	$\pi - \frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$	$2\pi - \frac{\pi}{4}$
y	۱	۲	۱	۰	۱
	$0+1$	$1+1$	$0+1$	$-1+1$	$0+1$





(گاردو کلاسی ص ۹۳)

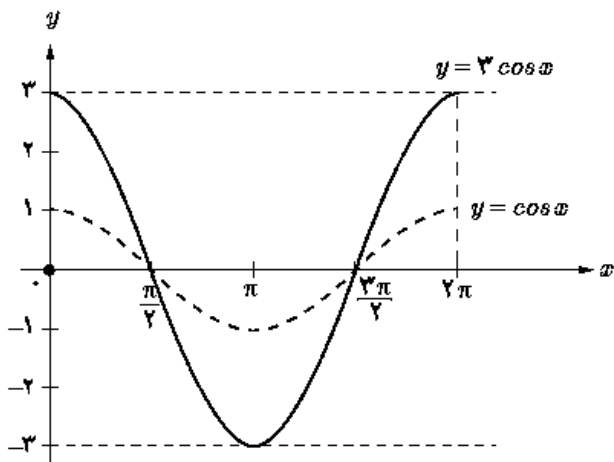
نمودار هر یک از توابع با ضابطه های زیر را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار $(y = \cos x)$ را رسم می کنیم سپس به کمک انتقال یا نقطه یابی نمودار خواسته شده را رسم میکنیم و با توجه به بازه داده شده نمودار را حذف کرده و یا امتداد می دهیم.

$$y = 3 \cos x, \quad [0, 2\pi]$$

انتقال به صورت آسانسوری است و مقادیر y ، ۳ برابر می شوند

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	۳	۰	-۳	۰	۳
	$3(1)$	$0(3)$	$-3(1)$	$0(3)$	$3(1)$



$$1) y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad [0, 2\pi]$$

در $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ انتقال به صورت قطاری استو مقادیر x منهای $\frac{\pi}{2}$ می شوند

⑦ نمودار تابع کسینوس در بازه های $[0, 2\pi]$ و $[2\pi, 4\pi]$ و... همچنین در بازه های $[-2\pi, 0]$ و $[-4\pi, -2\pi]$ و... نیز یکسان است.

بنابراین به آن تابع متناوب می گوئیم چون در فواصل معینی نمودار آن تکرار می شود. طول هر یک از این فاصله را دوره تناوب می گوئیم و دوره تناوب آن $T = 2\pi$ می باشد.

✓ نکته: برای رسم توابعی به صورت

$$y = a \cos(x + b)$$

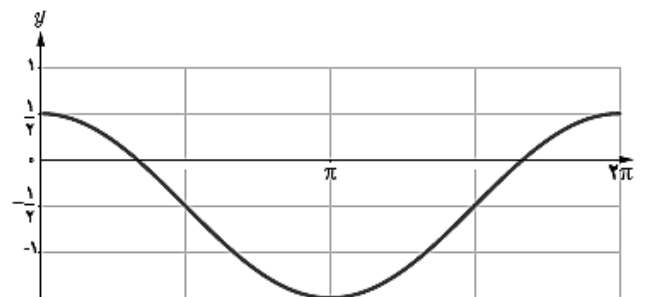
نقطه یابی استفاده کرد

(تمرین ۴ ص ۹۴)

④ با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام نادرست اند.

(ب) شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $\left(y = \cos x - \frac{1}{2}\right)$ را نشان می دهد.

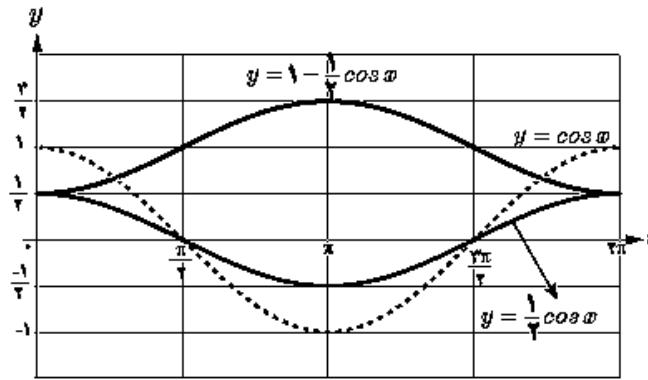
حل: درست است زیرا نمودار به اندازه $\frac{1}{2}$ واحد به پایین منتقل شده است.



(ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $(y = -\cos x)$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور x ها قرینه کنیم

حل: درست است

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
	$\left(-\frac{1}{2}\right)+1$	$0\left(-\frac{1}{2}\right)+1$	$-1\left(-\frac{1}{2}\right)+1$	$0\left(-\frac{1}{2}\right)+1$	$1\left(-\frac{1}{2}\right)+1$

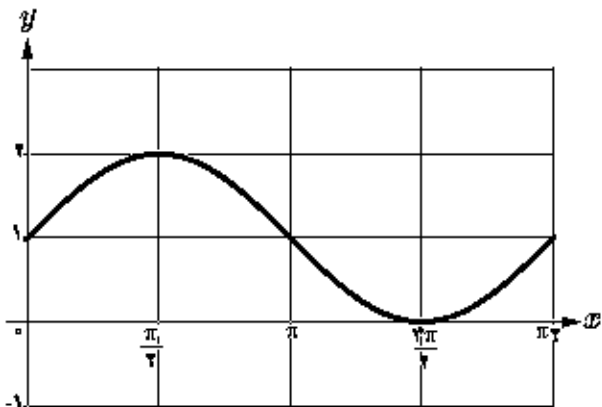


۴) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$, $[0, 2\pi]$

در تابع $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ انتقال به صورت آسانسوری

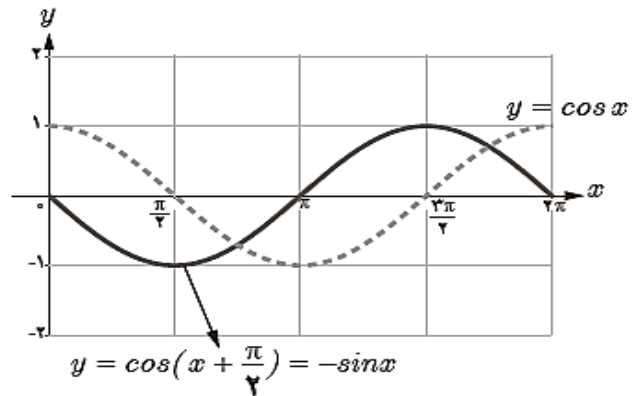
وقطاری است و مقادیر y با اجمع و مقادیر x بعلاوه $\frac{\pi}{2}$ می شوند

x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi+\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{2\pi+\pi}{2}$	$\frac{5\pi+\pi}{2}$
y	2	1	0	1	2
	$1+1$	$0+1$	$-1+1$	$0+1$	$1+1$



$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

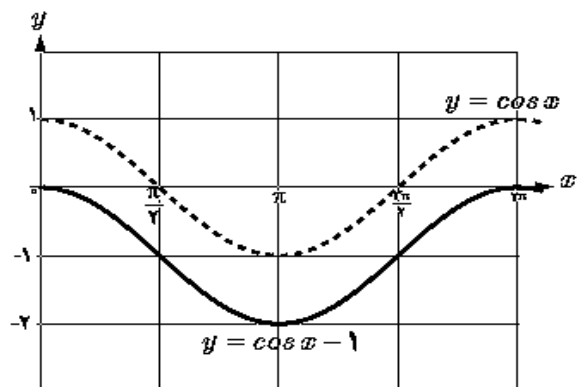
x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi-\pi}{2}$	$\frac{\pi-\pi}{2}$	$\frac{2\pi-\pi}{2}$	$\frac{3\pi-\pi}{2}$
y	1	0	-1	0	1



۲) $y = \cos x - 1$, $[0, 2\pi]$

در تابع $y = \cos x - 1$ انتقال به صورت آسانسوری است و مقادیر y منهای یک می شوند

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	-1	-2	-1	0
	$1-1$	$0-1$	$-1-1$	$0-1$	$1-1$



۳) $y = 1 - \frac{1}{2} \cos x$, $[0, 2\pi]$

در تابع $y = 1 - \frac{1}{2} \cos x$ انتقال به صورت آسانسوری

است و مقادیر y ابتدا در $\frac{1}{2}$ ضرب سپس با ۱ جمع می

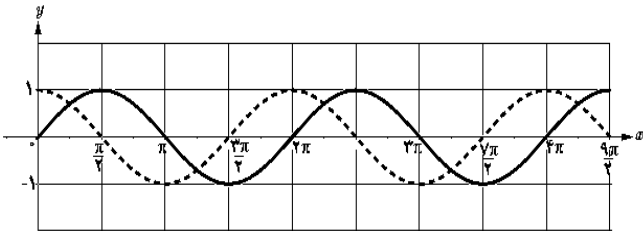
شوند

$$۶) y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad [2\pi, 4\pi]$$

در $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ انتقال به صورت قطاری است

و مقادیر x بعلاوه $\frac{\pi}{2}$ می شوند

x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$
y	۱	۰	-۱	۰	۱



(تمرین ۲ ص ۹۳)

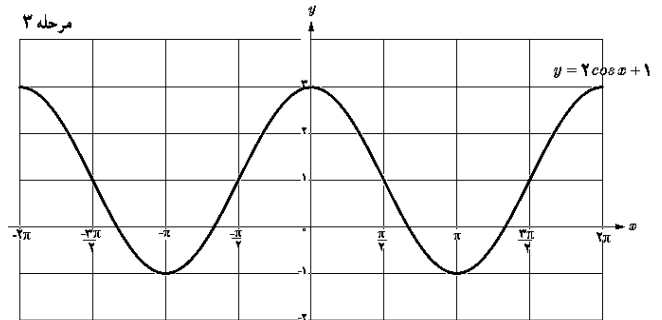
② نمودار هر یک از توابع با ضابطه های زیر را در دستگاه مختصات در بازه های داده شده رسم کنید.

$$۲) y = 2 \cos x + 1, \quad [-2\pi, 2\pi]$$

در تابع $y = 2 \cos x + 1$ انتقال به صورت آسانسوری است

و مقادیر y ابتدا در ۲ ضرب سپس با ۱ جمع می شوند
باتوجه به بازه داده شده نمودار را امتداد می دهیم.

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	۳	۱	-۱	۱	۳
	$1(2)+1$	$0(2)+1$	$-1(2)+1$	$0(2)+1$	$1(2)+1$

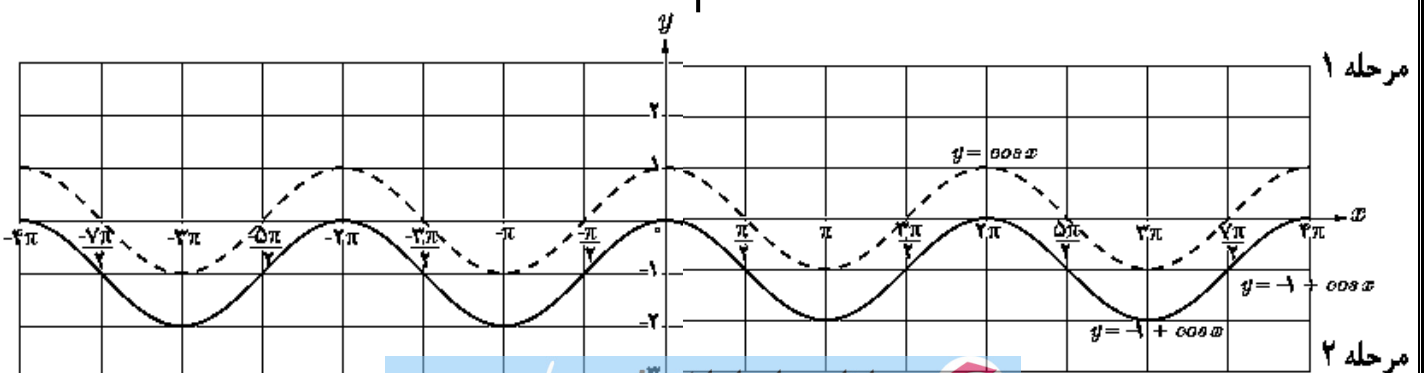


$$۴) y = -1 + \cos x, \quad [-4\pi, 4\pi]$$

در تابع $y = \cos x - 1$ انتقال به صورت آسانسوری است و

مقادیر y منهای یک می شوند باتوجه به بازه داده شده
نمودار را امتداد می دهیم

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	۰	-۱	-۲	-۱	۰
	$1-1$	$0-1$	$-1-1$	$0-1$	$1-1$



(تمرین ۳ ص ۹۴)

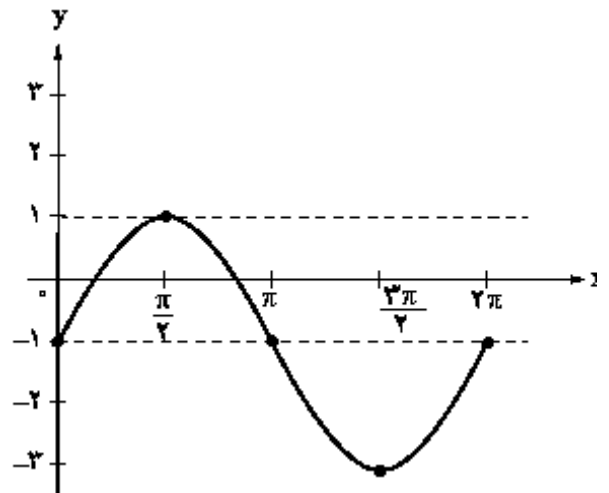
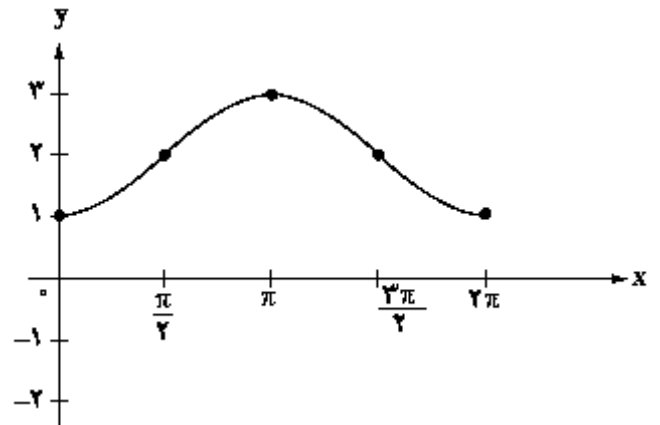
③ با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هریک از دو نمودار زیر کدام یک از ضابطه های داده شده را دارند. نمودار تابع با سایر ضابطه ها را نیز رسم کنید.

الف) $y = 2 \cos x + 1$

ب) $y = 2 \sin x + 1$

پ) $y = 2 - \cos x$

ت) $y = \sin x - 2$



(تمرین ۱ ص ۹۳)

آیا نمودار های هر جفت از توابع زیر بر هم منطبق اند؟

۱) $y = \sin x, y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

حل: این دو نمودار بر هم منطبقند زیرا:

$$1) \begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \end{cases}$$

۲) $y = \cos x, y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

حل: این دو نمودار بر هم منطبقند زیرا:

$$2) \begin{cases} y = \cos x \\ y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{cases}$$

۳) $y = \cos x, y = \cos(2\pi - x)$

حل: این دو نمودار بر هم منطبقند زیرا:

$$3) \begin{cases} y = \cos x \\ y = \cos(2\pi - x) = \cos x \end{cases}$$

۴) $y = \sin x, y = \sin(\pi - x)$

حل: این دو نمودار بر هم منطبقند زیرا:

$$4) \begin{cases} y = \sin x \\ y = \sin(\pi - x) = \sin(4\pi + \pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$$