

فصل ۱ درس ۲: استدلال ریاضی

اهداف درس ۲:

- تبدیل عبارات کلامی به عبارات ریاضی
- استفاده از منطق گزاره ها برای بررسی صحت استدلال های ریاضی

استدلال ریاضی:

منظور از استدلال ریاضی استفاده از ریاضی و نیز قواعد منطق گزاره ها در حل مسائل و همچنین اثبات یا رد یک گزاره به کمک ریاضی است. اولین گام برای استدلال ریاضی این است که یک عبارت توصیفی را به زبان ریاضی بازنویسی کنیم.

(مثال ص ۱۲ و ۱۳)

عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

(۱) "ما و ما و نصف ما و نصفه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می شویم"

☑ حل:

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100 \rightarrow$$

$$\overset{\times 4}{x} + \overset{\times 4}{x} + \overset{\times 4}{\frac{x}{2}} + \overset{\times 4}{\frac{x}{4}} + 1 = 100 \rightarrow \frac{11}{4}x + 1 = 100$$

(۲) عددی را در نصف خودش ضرب کردیم، آنگاه بر حاصل ضرب عدد ۱۲ را افزودیم. حاصل ۵ برابر عدد منظور شد

☑ حل:

$$x \left(\frac{1}{2}x \right) + 12 = 5x \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 5x + 12 = 0$$

(۳) ده درصد قیمت فروش کالایی، برابر سود آن

☑ حل: سود برابر است با

$$\frac{10}{100}x = x - y$$

(خرید - فروش) (X)

(کاردرگلاسی ص ۱۳)

عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

(الف) عددی به علاوه پنج، مساوی دو برابر آن عدد است.

(ب) حاصل ضرب دو عدد حقیقی، برابر مجموعشان است.

(پ) حاصل ضرب عددی در خودش به علاوه ۳، بزرگ تر از خودش است.

تمرین ۱۸ ص ۱۸: Homework

① گزاره های زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

(الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

(ب) مکعب یک عدد، بزرگ تر از هفت برابر آن عدد، به علاوه پنج است.

(پ) مجموع معکوس های دو عدد بزرگ تر یا مساوی مجموع آن دو عدد است.

(ت) مجموع مکعبات دو عدد بزرگ تر یا مساوی مکعب مجموع آن دو عدد است.

(ث) هر عدد ناصفری از معکوس خود بزرگ تر یا مساوی آن است.

| p | q | $p \Rightarrow q$ | $(p \Rightarrow q) \wedge p$ | $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|------------------------------|--|
| د | د | د | د | د |
| د | ن | ن | ن | د |
| ن | د | د | ن | د |
| ن | ن | د | ن | د |

مغالطه:

گاهی از قیاس استثنایی به شکل نادرست استفاده می شود و منجر به نتیجه گیری نادرست می شود. به این گونه استدلالات، مغالطه می گویند. که به صورت زیر است:

$$\text{مقدمه ۱: } p \Rightarrow q$$

$$\text{مقدمه ۲: } q$$

$$\therefore p$$

(مثال ۱ ص ۱۴)

مقدمه ۱: اگر باران بیارد، زمین خیس می شود.

$$p \quad q$$

مقدمه ۲: زمین خیس شده است.

$$q$$

∴ باران باریده است.

$$p$$

نتیجه به دست آمده ممکن است درست یا نادرست باشد ولی این نوع استدلال در علم منطق، نادرست است. (مثلا در این مثال زمین می تواند به دلیل دیگری غیر از باریدن باران خیس شده باشد)

(گاردوگلاسی ۲ ص ۱۵)

② در هر یک از استدلال های زیر، جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس کامل شود.

$$p: 3 > 0 \Rightarrow 4 > 1$$

$$p: 3 > 0$$

∴

خطوط L_1 و L_2 هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی کنند: $q \Rightarrow$ خطوط L_1 و L_2 موازی باشند: p

∴ خطوط L_1 و L_2 هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی کنند.

استدلال استثنایی (قیاس استثنایی):

این نوع قیاس در استدلال های ریاضی بسیار پر کاربرد است. که به شکل های زیر می توان بیان کرد: سه نقطه (∴) نماد نتیجه است.

(شکل ۱)

$$\text{مقدمه ۱: } p \Rightarrow q$$

$$\text{مقدمه ۲: } p$$

$$\therefore q$$

(شکل ۲)

مقدمه ۱: اگر الف آن گاه ب

مقدمه ۲: الف

$$\therefore b$$

(شکل ۳)

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

↓ مقدمه ۱
↓ مقدمه ۲
↓ نتیجه

(مثال ۱ ص ۱۴)

مقدمه ۱:

اگر امشب شب چهاردهم ماه باشد، آنگاه ماه کامل است.

$$p \quad q$$

مقدمه ۲: امشب، شب چهاردهم ماه است.

$$p$$

نتیجه: ماه کامل است.

$$q$$

(گاردوگلاسی ۱ ص ۱۵)

① با استفاده از جدول ارزشی، درستی قاعده قیاس

استثنایی $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ را نشان دهید

☑ حل:



استدلال عکس نقیض:

گاهی اوقات اثبات درستی گزاره شرطی $(p \Rightarrow q)$ دشوار است بنابراین برای راحتی کار می توان هم ارز آن یعنی درستی عکس نقیض آن $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ را اثبات کرد

(مثال ۳ ص ۱۶)

③ عکس نقیض (n^2) زوج باشد آن گاه n زوج است. را بنویسید.

حل: \square

عکس نقیض

$$\begin{array}{ccc} \underline{n^2 \text{ زوج است}} \Rightarrow \underline{n \text{ زوج است}} & \longrightarrow & \\ p & & q \\ \underline{n^2 \text{ زوج نیست}} \Rightarrow \underline{n \text{ زوج نیست}} & & \\ \sim q & & \sim p \end{array}$$

یافتن استدلال نادرست و دلیل نادرستی استدلال:

گاهی در یک استدلال یا اثبات ریاضی دچار خطا می شویم. یافتن خطا در یک استدلال همواره ساده نیست و نیاز به مهارت و دقت دارد.

(مثال ۱ و ۲ ص ۱۶)

① دانش آموزی ادعا می کند معادله $x^2 - x = 0$ تنها یک ریشه دارد و آن $x = 1$ است. ایراد استدلال را بیابید و دلیل نادرستی آن را بیان کنید.

$$\begin{aligned} x^2 - x = 0 &\Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow \frac{x(x - 1)}{x} = \frac{0}{x} \\ &\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

حل: ایراد در گام سوم است اجازه تقسیم بر x نداریم چون ممکن است x صفر باشد و عبارت بی معنا می شود.

② در اثبات زیر a, b, c اعداد حقیقی اند دلیل نادرستی آن را بیان کنید.

$$\begin{aligned} a < b &\Rightarrow a + c < b + c \Rightarrow c(a + c) < c(b + c) \\ &\Rightarrow ac + c^2 < bc + c^2 \Rightarrow ac < bc \end{aligned}$$

حل: ایراد در گام سوم است چون علامت c ممکن است منفی باشد و جهت نامعادله تغییر کند

(گارد در گلابی ص ۱۷)

دلیل نادرستی استدلال های زیر را بیابید.

(الف)

$$\begin{aligned} ۱) \quad d &= \frac{d - d}{c - d} \\ ۲) \quad 0 &= \frac{-d}{c - d} \\ ۳) \quad d &= 0 \end{aligned}$$

حل: ایراد در گام اول است چون اگر در صورت و مخرج یک کسر جمع و تفریق باشد نمی توانیم قسمتی از آن را ساده کنیم.

(ب)

$$\begin{aligned} ۱) \quad a &= \frac{a - d}{c - d} \\ ۲) \quad ac - ad &= a - d \\ ۳) \quad ac - a &= ad - d \\ ۴) \quad a(c - 1) &= (a - 1)d \\ ۵) \quad \frac{d(c - 1)}{d - 1} &= d \\ ۶) \quad -(c - 1) &= d \end{aligned}$$

حل: ایراد در گام پنجم است چون اگر در صورت و مخرج یک کسر جمع و تفریق باشد نمی توانیم قسمتی از آن را ساده کنیم.

Home work: (تمرین ۲ ص ۱۸)

② الف) اگر طول و عرض یک مستطیل را دو برابر کنیم آنگاه مساحت آن نیز دو برابر می شود. دلیل نادرستی استدلال زیر را بیابید.

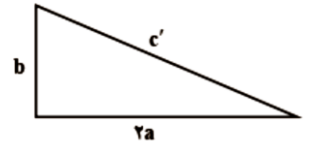
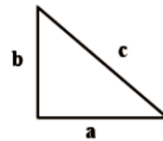
طول : x

عرض : y

مساحت $S = xy$

مساحت دو برابر شده است. $\rightarrow 2(xy) = 2 \underbrace{xy}_S = 2S$

ب) با توجه به شکل در یک مثلث قائم الزاویه اگر ضلع a را دو برابر کنیم آنگاه وتر مثلث جدید دو برابر وتر مثلث اولیه می شود با توجه به قضیه فیثاغورث دلیل نادرستی استدلال زیر در مثلث قائم الزاویه جدید را بیابید.



استدلال فیثاغورث در مثلث اولیه : $c^2 = a^2 + b^2$

استدلال فیثاغورث در مثلث جدید : $c'^2 = (2a)^2 + b^2$

$$= 4a^2 + b^2 = 4 \underbrace{(a^2 + b^2)}_{c^2} = 4c^2 \Rightarrow c'^2$$

$$= 4c^2 \Rightarrow c'^2 = 4c^2 \Rightarrow c' = 2c$$

پس وتر دو برابر شده است

پ) دلیل نادرستی استدلال زیر را بیابید.

$$\sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} = \sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{2 \times 3}} = \sqrt{\frac{12 + 3 \times 16}{3}} =$$

$$\sqrt{12 + 3 \times 16} = \sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = 2\sqrt{11}$$