

به نام خدا

(۱۱ انسانی)

جزوه ریاضی و آمار ۲

نهیبه و تنظیم: فاطمه بوربور

دبیر ریاضی شهرستان های استان تهران (وراین)

فصل اول

آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

❖ درس اول: گزاره ها و ترکیب گزاره ها

❖ درس دوم: استدلال ریاضی

بارم فصل ۱:

شهرورادی	نوبت دوم	نوبت اول
۶/۵	۵	۱۳

فصل ۱ درس ۱: گزاره ها و ترکیب گزاره ها

اهداف درس ۱:

- آشنایی با مفهوم منطق ریاضی و کاربرد آن
- آشنایی با مفهوم گزاره ها و تعیین ارزش آنها
- مهارت چگونگی ساختن نقیض، عکس نقیض و عکس گزاره ها
- آشنایی با ترکیب گزاره ها و جدول ارزش ها
- مهارت در بررسی درستی گزاره های هم ارز با استفاده از جدول ارزش ها
- تشخیص استدلال های معتبر از استدلال های نامعتبر

مفهوم منطق ریاضی و کاربرد آن:

منطق در لغت به معنای « آنچه به گفته درآمده » و عموماً آن را به معنای بررسی استدلال ها تعبیر می کنند. کاربرد منطق در تشخیص اعتبار استدلال هاست. تعبیر دیگری از منطق، روش درست فکر کردن است.

منطق ریاضی، دستور زبان ریاضی است که روش درست استدلال کردن در علم ریاضی را به ما یاد می دهد.

مفهوم گزاره ها و تعیین ارزش آنها:

در منطق ریاضی به هر جمله ی خبری که دقیقاً دارای یک ارزش درست (*True*) یا نادرست (*False*) است گزاره می گوئیم.

✓ نکته: جملات سوالی، امری، عاطفی و جملاتی که نتوانیم ارزش آن را تعیین کنیم، گزاره نیستند. مثل:

- شما اهل کجایید؟

- چه هوای خوبی

- درس فلسفه از درس عربی آسان تر است از اپلیکیشن پادرس

(فعالیت ۲ و ۳)

① کدام یک از جملات زیر گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

☑ حل:

الف) شما چند سال دارید؟ ← گزاره نیست (جمله پرسشی)

ب) عدد ۲ عددی اول است. ← گزاره با ارزش درست

پ) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا است. ← گزاره با ارزش نادرست

ت) افلاطون شاگرد ارسطو است. ← گزاره با ارزش نادرست

ث) $20 = 2 + 3 \times 4$ ← گزاره با ارزش نادرست

ج) عدد $(-1)^n$ عددی همواره مثبت است. $(n \in N)$ ← گزاره با ارزش نادرست

چ) سیب قرمز از سیب زرد خوش مزه تر است. ← گزاره نیست (زیرا کلمه خوشمزه دارای مفهوم نسبی است).

ح) لطفاً تخته را پاک کن. ← گزاره نیست (جمله امری)

② دو گزاره درست و دو گزاره نادرست بیان کنید و همچنین دو جمله بنویسید که گزاره نباشند.

☑ حل:

دو گزاره درست مانند:

(۱) $\sqrt{2}$ عددی مثبت است.

(۲) ۵ عددی فرد است

دو گزاره نادرست مانند:

(۱) ۴ عددی اول است

(۲) ۲۵ مربع کامل نیست.

دو جمله که گزاره نباشند مانند:

(۱) کتاب را بردار!

(۲) سارا دانش آموز خوبی است.

جبر گزاره ها:

در منطق ریاضی و در جبر گزاره ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند p یا q یا r یا ... نمایش می دهیم.

-تعداد حالت های ارزشی n گزاره را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} \text{(تعداد گزاره ها)} \quad 2^n \rightarrow \text{تعداد حالت های } n \text{ گزاره} \\ \downarrow \\ \text{(درست و نادرست)} \end{aligned}$$

-اگر ارزش درست یک گزاره را با «د» یا « T » و ارزش نادرست آن را با «ن» یا « F » نمایش دهیم، جدول ارزش گذاری گزاره ها به صورت زیر است:

(مثال ص ۳)

(۱) تعداد حالت های ارزشی یک گزاره $2^1 = 2$ است.

p
د
ن

(۲) تعداد حالت های ارزشی دو گزاره $2^2 = 4$ است.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

(۳) تعداد حالت های ارزشی سه گزاره $2^3 = 8$ است.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

نقیض یک گزاره:

نقیض یک گزاره مانند p را با نماد $(\sim p)$ نمایش می دهیم برای ساختن نقیض یک گزاره بهتر است فعل جمله را نفی کنیم.

(گاردنر گلابی ص ۴)

در هر یک از حالت های زیر نقیض گزاره را بیان کنید؛ سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید.

p	$\sim p$
د	ن

(الف) عدد ۵ زوج است.

حل: عدد ۵ زوج نیست.

p	$\sim p$
د	ن

(ب) تساوی $(4 = 2 \times 2)$ برقرار است.

حل: تساوی $(4 = 2 \times 2)$ برقرار نیست.

p	$\sim p$
د	ن

(پ) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک تر است.

حل: عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک تر نیست.

p	$\sim p$
د	ن

(ت) ارسطو شاگرد افلاطون است.

حل: ارسطو شاگرد افلاطون نیست.

p	$\sim p$
د	ن

(ث) ایران در منطقه غرب آسیا قرار دارد.

حل: ایران در منطقه غرب آسیا قرار

ندارد.

(ج) $(5 \times 4) > (3 \times 7)$

حل: $(5 \times 4) > (3 \times 7)$ یا $(5 \times 4) \leq (3 \times 7)$

p	$\sim p$
د	ن

گزاره های هم ارز:

اگر ارزش دو گزاره p, q یکسان باشد (هر دو درست یا هر دو نادرست) به آن گزاره های هم ارز می گوئیم و می نویسیم:
 ارزند زیرا ارزش هر دو درست است.
 $(p \equiv q)$ مثلا دو گزاره $(4 \in N)$ و 9 مربع کامل است (هم

نکته: نقیض نقیض هر گزاره، هم ارز خود آن گزاره
 است: $\sim(\sim p) \equiv p$

اثبات $(\sim p) \equiv p$ به صورت زیر است:

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

ترکیب گزاره ها و جدول ارزش:

از ترکیب گزاره های ساده، گزاره های مرکب تولید می شود که ۴ نوع ترکیب داریم:

(۱) ترکیب عطفی (\wedge) (۲) ترکیب فصلی (\vee)

(۳) ترکیب شرطی (\Rightarrow) (۴) ترکیب دوشروطی (\Leftrightarrow)

ترکیب عطفی (\wedge):

اگر دو گزاره ساده p, q را با حرف (و) به هم ربط دهیم گزاره $(p \wedge q)$ ایجاد می شود که ترکیب عطفی نام دارد.

ارزش ترکیب عطفی وقتی درست است که هر دو گزاره ارزش درست داشته باشند. جدول ارزشی $(p \wedge q)$:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

(فعالیت ص ۵)

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	هفته هفت روز دارد و ماه شهریور ۳۱ روز دارد		
۲	قرآن دارای ۳۰ جزء است و همه سوره های آن با بسم الله شروع می شود.		
۳ و ۸ زوج است.	✓	
۴ کتاب قرآن ۱۱۴ سوره دارد و		✓
۵	۵۷ عددی اول است و ۲ عددی اول نیست.		
۶ و $5 > 2$	✓	

ترکیب فصلی (\vee):

اگر دو گزاره ساده p, q را با حرف (یا) به هم ربط دهیم گزاره $(p \vee q)$ ایجاد می شود که ترکیب فصلی نام دارد.

ارزش ترکیب فصلی وقتی نادرست است که هر دو گزاره ارزش نادرست داشته باشند. جدول ارزشی $(p \vee q)$:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

$(\text{☹} \vee \text{☹}) \equiv \text{☹}$

(فعالیت ص ۶)

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	عدد ۴ عددی فرد یا عددی اول است		
۲	حضرت مهدی <small>علیه السلام</small> امام دوازدهم شیعیان است یا	✓	
۳	۹۱ عددی مرکب است یا		✓
۴ یا افلاطون نویسنده کتاب ارغنون است.	✓	
۵ یا	✓	

ترکیب شرطی (\Rightarrow):

اگر با گزاره های p, q گزاره $(p \Rightarrow q)$ را بسازیم در واقع یک ترکیب شرطی ساخته ایم و به شکل های زیر می توان آن را بیان کرد:

- اگر p آنگاه q
- p نتیجه می دهد q را
- q از p نتیجه می شود

ارزش ترکیب شرطی وقتی نادرست است که p (مقدم) ارزش درست و q (تالی) ارزش نادرست داشته باشد.

✓ نکته: در ترکیب شرطی اگر نادرست باشد می گوئیم گزاره شرطی به انتفای مقدم درست است یعنی با اینکه مقدم نادرست است ولی ارزش کل گزاره شرطی درست است.

جدول ارزشی $(p \Rightarrow q)$:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

(مثال ص ۷)

ارزش گزاره های زیر را تعیین کنید. حل:

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر $۶ = ۳^۲$ آنگاه، ۵ اول است	✓	
۲	اگر ۸ فرد است آنگاه $۲ > ۴$	✓	
۳	اگر ۱۷ اول است آنگاه ۱۸ اول است		✓
۴	اگر $۴^۲ = ۲^۴$ آنگاه $۳^۲ > ۲^۳$	✓	

(فعالیت ص ۷)

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۷ زوج است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۲	اگر ۹ مربع کامل است، آنگاه $\sqrt{۹}$ مربع کامل است.		
۳	اگر ۲۹ اول است، آنگاه ۲ زوج است.		
۴	اگر آنگاه		✓
۵	اگر آنگاه	✓	
۶	اگر ۷ فرد است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۷	اگر آنگاه ۹۹ اول است.	✓	

(کاردرگلاسی ص ۷)

اگر p گزاره درست و q گزاره نادرست و r گزاره ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید.

د ن

۱) $(q \Rightarrow p) \wedge r \equiv$ به ارزش r بستگی دارد

د

د ن

۲) $(p \vee q) \vee r \equiv$ د

د

۳) $(p \Rightarrow q) \wedge r \equiv$

۴) $(r \Rightarrow p) \vee q \equiv$

۵) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q \equiv$

۶) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv$

۷) $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv$

(کاردر کلاسی ص ۹)

اگر گزاره p گزاره درست و q گزاره نادرست و r گزاره ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید.

$$۱) \underbrace{(p \leftrightarrow q)}_n \wedge r \equiv n$$

$$۲) \underbrace{(\sim p \leftrightarrow q)}_d \vee r \equiv d$$

$$۳) (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv$$

$$۴) (\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv$$

$$۵) (\sim p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim (p \vee q) \equiv$$

$$۶) (r \leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv$$

$$۷) (p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q) \equiv$$

ترکیب دوشرطی (\Leftrightarrow):

از ترکیب عطفی دو گزاره $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$ گزاره دوشرطی $(p \Leftrightarrow q)$ ساخته می شود

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \equiv (p \Leftrightarrow q)$$

و به شکل های زیر می توان آن را بیان کرد:

- اگر p آنگاه q و اگر q آنگاه p
- p نتیجه می دهد q را و q نتیجه می دهد p را
- اگر p آنگاه q و برعکس
- p اگر و تنها اگر q
- p شرط لازم و کافی است برای q

ارزش ترکیب دوشرطی وقتی درست است که p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

جدول ارزشی $(p \Leftrightarrow q)$:

P	q	$p \leftrightarrow q$
د	د	د \rightarrow ☺ \leftrightarrow ☺ \equiv ☺
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د \rightarrow ☹ \leftrightarrow ☹ \equiv ☺

(فعالیت ص ۸)

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۲ فرد است، آنگاه ۸ عددی اول است و برعکس.		
۲	اگر دو عدد فرد باشند آنگاه مجموع آنها زوج است و برعکس.		
۳ اگر و تنها اگر ۱۱۹ عددی مرکب است.	✓	
۴	اگر آنگاه و برعکس	✓	
۵	یک چهار ضلعی مربع است، اگر و تنها اگر آن چهار ضلعی لوزی باشد.		
۶	اگر واریانس داده ها برابر صفر باشد، آنگاه داده ها یکدیگر برابرند و برعکس		

تمرین ۱ و ۲ ص ۱۱ و ۱۰: Homework

① جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	بزرگترین معجزه پیامبر اسلام (ص) قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است		
۲	اگر آنگاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است	✓	
۳	اگر تهران پایتخت ایران است آنگاه	✓	
۴	$4 \times 2 = 2^3 \Rightarrow 8^2 = 4^3$		
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد، آنگاه ۱۸ مربع کامل است.		
۶	اگر ۲ عددی زوج یا منفی باشد، آنگاه عدد ۵ اول است.		
۷	اگر فارابی معلم ثانی است، آنگاه افلاطون معلم اول است.		
۸	امام خمینی در سال ۱۳۴۲ تبعید و در سال ۱۳۵۷ به ایران بازگشتند.		
۹	حضرت علی (ع) اولین مردی است که پس از پیامبر، اسلام آوردند و	✓	
۱۰	اگر آنگاه و برعکس	✓	

② اگر p گزاره درست و q گزاره نادرست و r گزاره ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید.

$$۱) (p \vee r) \Rightarrow p \equiv$$

$$۲) (q \wedge r) \Rightarrow r \equiv$$

$$۳) (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r) \equiv$$

$$۴) (\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv$$

$$۵) (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv$$

$$۶) (q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv$$

$$۷) (\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q \equiv$$

$$۸) (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r \equiv$$

$$۹) (r \Rightarrow p) \wedge p \equiv$$

$$\text{ت) } (p \Rightarrow p) \equiv T$$

p	$(p \Rightarrow p)$

$$\text{ج) } (p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$$

حل:

p	q	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$	$(p \Rightarrow q)$	$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

$$\text{ث) } \sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$$

حل:

p	q	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$	$(p \vee q)$	$(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$
د	د	ن	د	د	د
د	ن	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

بررسی دستی گزاره های هم ارز با استفاده از جدول ارزش:

(مثال ص ۹ و تمرین ص ۱۱)

با استفاده از جدول ارزش ها درستی هم ارزی های زیر را بررسی کنید

$$\text{الف) } (p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

حل:

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د

$$\text{ب) } (p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

حل: گزاره $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ را عکس نقیض گزاره

$(p \Rightarrow q)$ می نامیم

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	د	د

$$\text{ت) } (p \vee \sim p) \equiv T, (p \wedge \sim p) \equiv F$$

حل: گزاره $(p \vee \sim p) \equiv T$ را گزاره همیشه درست و

$(p \wedge \sim p) \equiv F$ را گزاره همیشه نادرست می نامیم

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن

قوانین دمورگان:

$$پ) \sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$$

حل:

p	q	~p	~q	(p ∨ q)	~(p ∨ q)	~p ∧ ~q
د	د	ن	ن	...	ن	...
د	ن	ن	...	د
ن	د	د	...	د	...	ن
ن	ن	د	د	...

$$الف) \sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$$

p	q	~p	~q	p ∧ q	~(p ∧ q)	~p ∨ ~q

قانون پخشی یا توزیع پذیری:

$$ب) p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

حل:

p	q	r	(q ∨ r)	p ∧ (q ∨ r)	(p ∧ q)	(p ∧ r)	(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

قوانین جذب:

$$ت) p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

حل:

p	q	p ∧ q	p ∨ (p ∧ q)
د	د	د	د
د	ن	ن	...
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	...

$$پ) p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

p	q	p ∨ q	p ∧ (p ∨ q)

