



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

@riazisara

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

@riazisara.ir ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

دانلود از اپلیکیشن پادرس



علی مصطفی

ریاضی و آمار ۲

دبیر ریاضی استنوی

رشته های ادبیات و علوم انسانی

@math10v11ensani

و علوم و معارف اسلامی

فصل دوم، درس ۳

اعمال بر روی توابع

در عمل اصلی راد، ریاضی می شناسیم، جمع، تفریق، ضرب و تقسیم
 برای توابع f و g با دامنه های دلخواه می توانیم، حرکت از عمل های
 بالا را تعریف کنیم به شرطی که ابتدا اشتراک دو دامنه را به دست
 آوریم. یعنی در ابتدا سراز دامنه های مشترک می رویم.

حال یک مثال به ادامه بحث می رویم

مثال: اگر تابع $f = \{(-۳, ۱), (۲, ۷), (۴, ۱)\}$ باشد و
 تابع $g = \{(۱, ۹), (۳, ۵), (۲, ۴)\}$ را داشته باشیم

الف) دامنه و برد هر کدام را بنویسید

Important note:

ب) تابع $f+g$ و $f \times g$ را شکل دهید.



پایه هفت الف به بیارسان است

$$D_f = \{-۳, ۱, ۲\}$$

$$R_f = \{۴, ۷, ۸\}$$

$$D_g = \{۱, ۲, ۳\}$$

$$R_g = \{۴, ۵, ۹\}$$

همانطور که قبلاً بیان کردیم، ابتدا مولفه‌های اول مشترک (دامنه‌های مشترک) بین دو تابع f و g را بیابیم.

$$D_f \cap D_g = \{۱, ۲\}$$

اعداد ۱، ۲ دامنه مشترک f و g هستند. حال توابع f و g را تنها با دامنه‌های مشترکشان می‌نویسیم.

$$f = \{(۱, ۴), (۲, ۷)\}$$

$$g = \{(۱, ۹), (۲, ۴)\}$$

در ادامه هر عملی که خواسته شده است $(+ - \times \div)$

را فقط روی مولفه‌های دوم تابع یعنی برد تابع انجام می‌دهیم.
(وقت کنید دامنه‌های مشترک هیچ تغییری نمی‌کنند)

$$f+g = \{(۱, ۴+۹), (۲, ۷+۴)\} = \{(۱, ۱۳), (۲, ۱۱)\}$$

Important note: $f \times g = \{(۱, ۴ \times ۹), (۲, ۷ \times ۴)\} = \{(۱, ۳۶), (۲, ۲۸)\}$

نکته: اگر دو تابع هیچ دامنه مشترکی نداشته باشند

هیچ یک از اعمال بالا را نمی توان بین آن ها

انجام داد

$f - g$ و $f \div g$ را برای مثال قبل به دست می آوریم

$$(f - g)(x) = \{(1, 4-9), (2, 7-4)\} = \{(1, -5), (2, 3)\}$$

$$(f \div g)(x) = \frac{f}{g}(x) = \{(1, 4 \div 9), (2, 7 \div 4)\} = \{(1, \frac{4}{9}), (2, \frac{7}{4})\}$$

← پس برای تشکیل دال توابع مجموع، تفاضل، حاصل ضرب

و تقسیم دو تابع، ابتدا دامنه مشترک دو تابع را به دست آورده

و هر عمل که بین دو تابع صورت گرفته را روی خروجی ها انجام می دهیم

پس به طور خلاصه اعمال زیری روی توابع به صورت زیر تعریف می شود

(به دامنه تابع ایجاد شده دقت کنید)

$$① (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$② (f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad , \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

Important note:

$$(۳) (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \quad , \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$(۴) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

در مورد آخر، همان تقسیم دو تابع، برای اینکه دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بدین کنیم، ابتدا اشتراک دامنه های f و g را بدین کنیم سپس گره های که تابع g (تابع که در مخرج است) را صفر می کنند حذف می کنیم.

مثال: اگر $f = \{(1,4), (2,1), (3,6)\}$ و $g(x) = \{(2,0), (4,3), (3,2)\}$ باشند، حاصل $\frac{f}{g}(x)$ را بدین دست آورید.

ابتدا دامنه $\frac{f}{g}$ را بدین کنیم

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \{2, 3\} - \{2\} = \{3\}$$

وقت کنید زوج مرتب $(3,6)$ در تابع g ، خودی اش صفر

است پس مؤلفه اول آن یعنی عدد ۳ را باید از دامنه مشترک

دو تابع حذف کنیم بنابراین تنها مؤلفه مشترک ۳ باقی می ماند

$$f = \{(3, 4)\}$$

$$g = \{(3, 2)\} \Rightarrow \frac{f}{g}(x) = \left\{ \left(x, \frac{4}{2} \right) \right\} = \{(3, 2)\}$$

مثال: اگر $f = \{(1, 2), (-1, 3), (4, 5), (2, 3)\}$ و

$$g = \{(2, -1), (7, 2), (4, 3), (1, 0)\}$$

باشند تابع $g+2f$ را تشکیل دهید.

ابتدا دامنه مشترک g و $2f$ را بدست آوریم

$$Dg = \{-1, 2, 3, 4, 7\}$$

$$\Rightarrow D_{2f \cap g} = \{-1, 4\}$$

$$D_{2f} = D_f = \{1, -1, 2, 3, 4\}$$

$$(g+2f)(x) = \left\{ \left(-1, 4+2 \times 3 \right), \left(4, 2+2 \times 5 \right) \right\}$$

$$= \left\{ \left(-1, 10 \right), \left(4, 12 \right) \right\}$$

توجه داشته باشید جویندهای g با دو برابر جویندهای f جمع می شوند $(g+2f)$

Important note:

مثال اگر ضابطه تابع f به صورت $f(x) = x^2 + 1$

و تابع g به صورت $g(x) = x - 1$ باشد

ضابطه تابع های $h(x) = f(x) + g(x)$ و $m(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

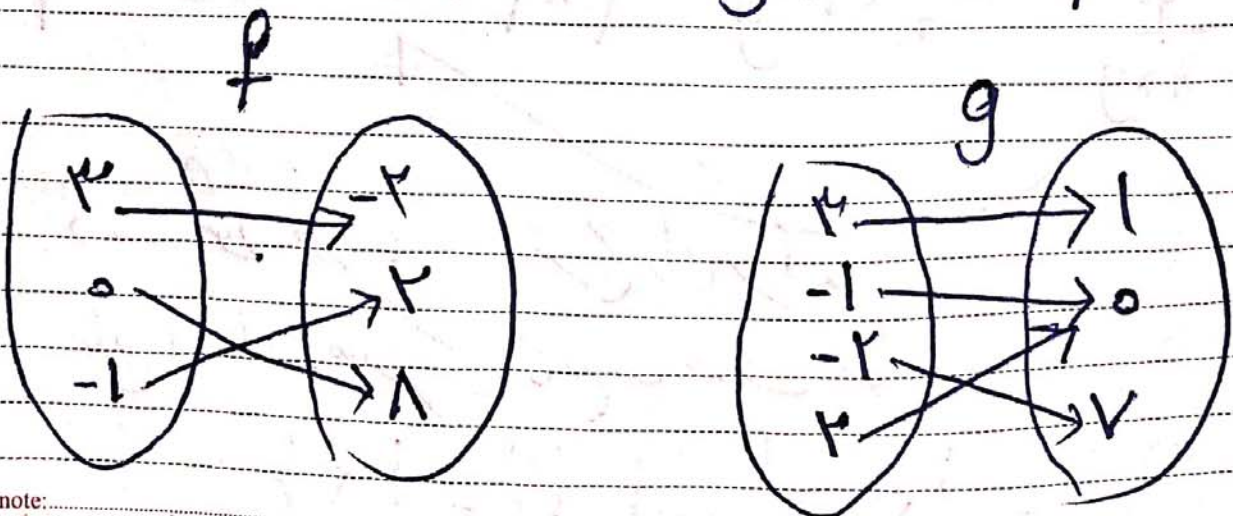
را بنویسید :

$$h(x) = f(x) + g(x) = (x^2 + 1) + (x - 1) = x^2 + 1 + x - 1 = x^2 + x$$

$$m(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 1}{x - 1} \Rightarrow x \neq 1$$

مثال اگر توابع f و g به صورت زیر باشند حاصل توابع

$\frac{f+g}{f}$ و $\frac{f}{f \times g}$ را به دست آورید.



Important note:

جواب: ابتدا می توانیم نمایش زوج مرتبی f و g را اینگونه بنویسیم

$$f = \{(3, -2), (0, 1), (-1, 2)\}$$

$$g = \{(3, 1), (-1, 0), (-2, 7), (2, 0)\}$$

$$D_{\frac{f+g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x) = 0\}$$

$$= \{3, -1\}$$

$$\left(\frac{f+g}{f}\right)(x) = \left\{ \left(3, \frac{-2+1}{-2}\right), \left(-1, \frac{2+0}{2}\right) \right\}$$

$$= \left\{ \left(3, +\frac{1}{2}\right), (-1, 1) \right\}$$

$$D_{\frac{f}{f \times g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x) = 0 \text{ or } g(x) = 0\}$$

دقت شود هر x که خارج دامنه کند

باید از دامنه مستترک تابع حذف شود

$$D_{\frac{f}{f \times g}} = \{3, -1\} - \{-1\} = \{3\}$$

Important note:

$$\left(\frac{f}{f \times g}\right)(x) = \left\{ \left(3, \frac{-2}{-2 \times 1}\right) \right\} = \left\{ (3, +1) \right\}$$

مثال، اگر $f = \{(3, 5), (4, 7), (2, -3)\}$ باشد و

$$g(x) = x^2 + 7x \text{ باشد}$$

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $(f+g)(2)$ ب) $\left(\frac{f}{g}\right)(3)$

با توجه به تعریف اعمال روی توابع، داریم

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = -3 + 18 = 15$$

$$f(2) = -3 \quad \text{و} \quad g(2) = 2^2 + 7 \times 2 = 4 + 14 = 18$$

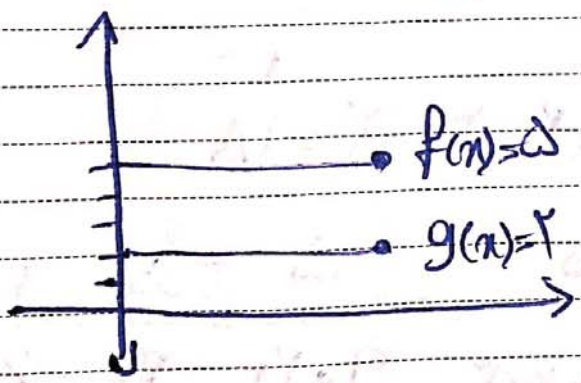
$$\text{ب) } \left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{5}{3^2 + 7 \times 3} = \frac{5}{9 + 21} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

Important note:

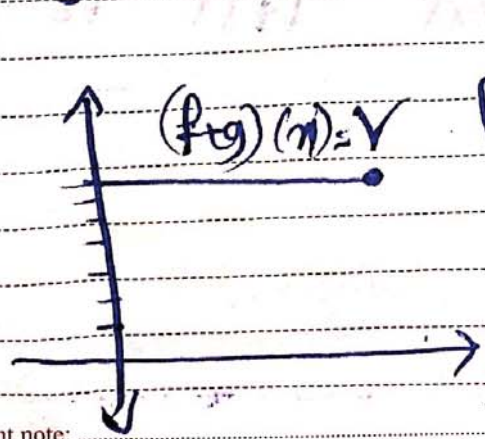
اعمال روی توابع به شکل هندسی (نمودار توابع)

۸ اگر نمودار توابع f و g را داشته باشیم و بخواهیم از روی آن ها نمودار توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ یا $\frac{f}{g}$ را به دست آوریم ،
 ۹ لازم است از روی نمودار هر دو تابع f و g ، مقادیر هر دو تابع را
 ۱۰ در نقاط مشترک به دست آوریم ، سپس اعمال جبری خواسته
 ۱۱ شده را بر روی مقادیر انجام می دهیم و با توجه به اعداد به دست آمده
 ۱۲ نمودار خواسته شده را رسم می کنیم

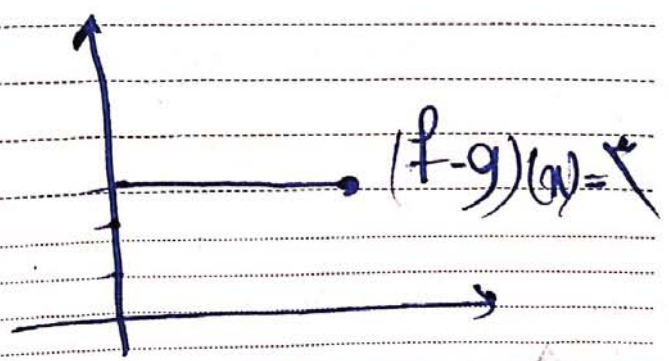
۱۳ مثال : اگر نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ را داشته باشیم ،
 ۱۴ $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ را رسم کنید



۱۵ جواب : ابتدا دامنه مشترک توابع را پیدا می کنیم

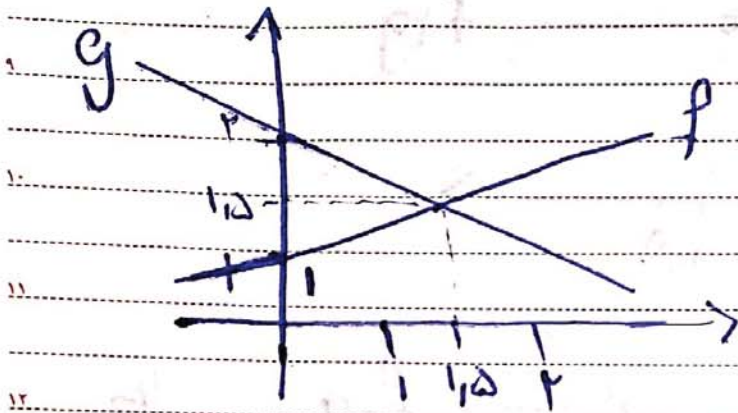


۱۶ سپس بر $(f+g)(x)$ را به دست می آوریم



Important note:

مثال: نمودارهای تابع f و g در دستگاه زیر رسم شده اند
 با توجه به آن‌ها، نمودار تابع های $f+g$ و $f-g$ را رسم کنید



جواب: در شکل بالا هر دو تابع f و g خط هستند و هر دو تابع از نوع
 دو تابع خطی باشند توابع $f+g$ و $f-g$ نیز خطی
 خواهند بود.

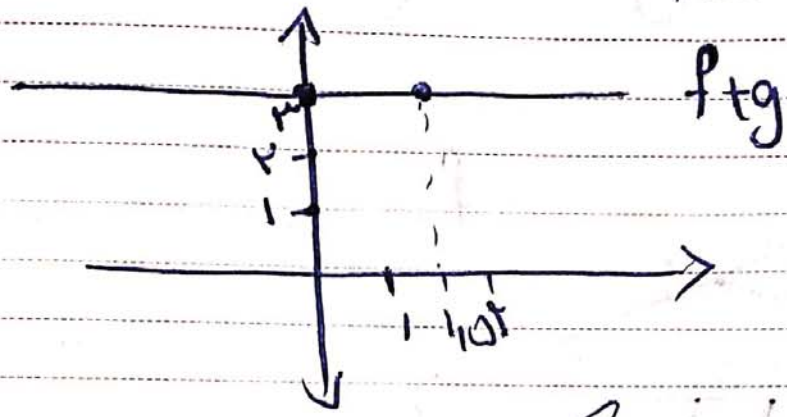
دو نقطه مشترک از توابع f و g را پیدا می کنیم پس از روی آن
 دو نقطه از توابع $f+g$ و $f-g$ را به دست می آوریم

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ g(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow (f+g)(0) = 1+2 = 3 \Rightarrow (0, 3) \text{ نقطه مورد نظر} \\ \text{کار در تابع } f+g$$

$$\begin{cases} f(1,5) = 1,5 \\ g(1,5) = 1,5 \end{cases} \Rightarrow (f+g)(1,5) = f(1,5) + g(1,5) = 1,5 + 1,5 = 3$$

پس نقطه دیگری $(1,5, 3)$ است

پس نمودار $f+g$ را با استفاده از دو نقطه ای که پیدا کردیم یعنی نقاط $(۰,۳)$ و $(۳,۱)$ رسم می کنیم



حال $f-g$ را رسم می کنیم

$$\begin{aligned} (0,1) \in f \\ (0,2) \in g \end{aligned} \Rightarrow (f-g)(0) = f(0) - g(0) = 1 - 2 = -1$$

$$\Rightarrow (0, -1) \in (f-g)$$

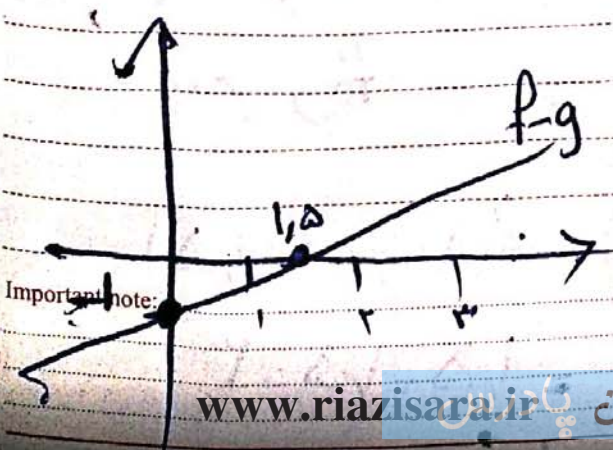
حال نقطه دوم را پیدا می کنیم

$$\begin{aligned} (1,5) \in f \\ (1,5) \in g \end{aligned} \Rightarrow (f-g)(1,5) = f(1,5) - g(1,5)$$

$$= 1,5 - 1,5$$

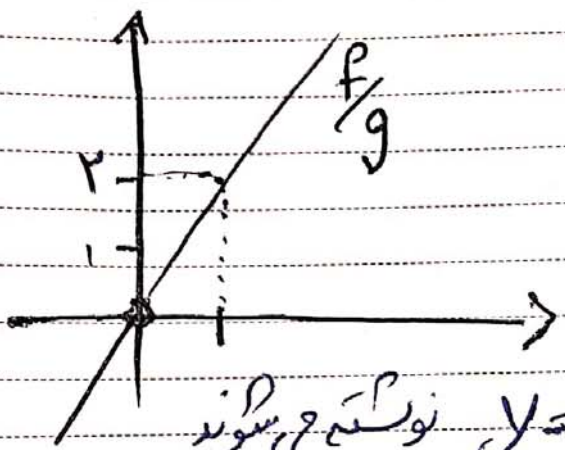
$$= 0$$

بنابراین نقطه دوم در تابع $f-g$ برابر $(1,5, 0)$ است



سوال (مَرین ناز صبحی ۵۳)

اگر $f(x) = x^2$ باشد و تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت
 نمودار زیر باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.



تابع از نمودار f/g مشخص است
 که یک تابع خطی است

توابع خطی به صورت $y = mx + b$ نوشته می شوند

از آنجا که خط فوق از مبدأ یعنی (۰،۰) می گذرد پس خط بالا
 یک خط مبدأ گذر است و عرض از مبدأ ندارد یعنی $b = 0$

پس $y = mx$. با استفاده از دو نقطه (۰،۰) و (۱،۲)
 در نمودار بالا شیب خط را پیدا می کنیم

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow y = mx \Rightarrow \boxed{y = 2x}$$

حال باید جای گذارن ساده تابع $g(x)$ را به دست می آوریم

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 2x \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 2x$$

Important note:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{g(x)} = 2x \Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$$