فصل ۲ درس ۲: توابع پلکانی و قدر مطلقی

اهداف درس ۲:

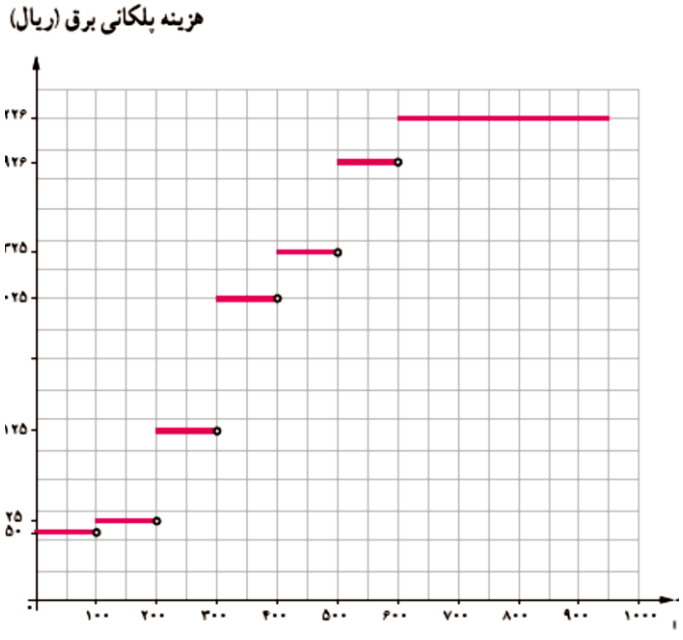
- معرفی تابع پلکانی و شناخت آن در مسائل واقعی؛
- مفهوم سطح زیر نمودار یک تابع با توجه به متغیر مستقل و وابسته؛
- معرفی تابع جزء صحیح و رسم آن؛
- معرفی تابع قدرمطلق و کاربرد آن برای توصیف و تحلیل دقیق و علمی مسائل پیرامون؛
- تبدیل تابع قدر مطلق به دو ضابطه و برعکس؛
- مدل سازی مسائل واقعی به کمک تابع پلکانی و تابع قدرمطلق؛
- رسم نمودار توابع قدرمطلق.

توابع پلکانی:

هر تابع چند ضابطه ای که همه ضابطه هایش عدد ثابت باشند،تابع پلکانی می نامیم.مثل:

$$f(x)=\begin{cases}۲ & x<۱\\ ۳ & x\geq ۱\end{cases}$$

نمودار توابع پلکانی فقط شامل خطوط افقی است چون تمام ضابطه های آن عدد ثابت است.مثل نمودار هزینه برق مصرفی خانه در سی روز



(تمرین ۳ ص ۴۳)

③ جدول مالیاتی زیر را، که توسط هیئت مدیره یک شرکت برای سال جدید مالی آماده و تصویب شده است، در نظر بگیرید:

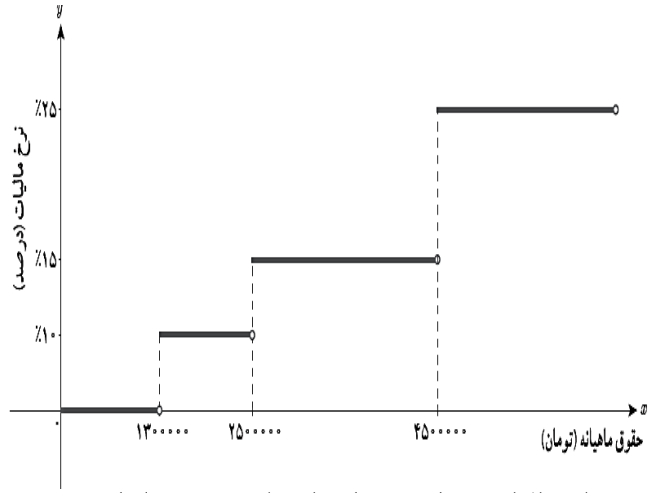
الف) نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی را رسم کنید.

ب) به کمک نمودار پلکانی و محاسبه سطح متناظر با هر یک از حقوق های ماهیانه، مبلغ مالیات هر یک از کارمندان زیر را محاسبه کنید:

- کارمندی با حقوق ۱ / ۲۰۰ / ۰۰۰ تومان
- کارمندی با حقوق ۲ / ۴۰۰ / ۰۰۰ تومان
- کارمندی با حقوق ۶ / ۰۰۰ / ۰۰۰ تومان

حقوق ماهیانه (تومان)	نرخ مالیات (درصد)
حقوق تا ۱٫۵۰۰٫۰۰۰	معاف از مالیات
مازاد بر ۱٫۳۰۰٫۰۰۰ تا ۲٫۵۰۰٫۰۰۰	۱۰
مازاد بر ۲٫۵۰۰٫۰۰۰ تا ۴٫۵۰۰٫۰۰۰	۱۵
مازاد بر ۴٫۵۰۰٫۰۰۰	۲۵

☑حل: الف)



ب) مبلغ مالیات پرداختی برابر با سطح زیر نمودار است.

کارمندی با حقوق ۱ / ۲۰۰ / ۰۰۰ تومان ، معاف از مالیات

کارمندی با حقوق ۲ / ۴۰۰ / ۰۰۰ تومان

$۲۴۰۰۰۰۰ - ۱۳۰۰۰۰۰ = ۱۱۰۰۰۰۰$

$۱۱۰۰۰۰۰ \times \frac{۱۰}{۱۰۰} = ۱۱۰۰۰۰$ تومان

دانلود از اپلیکیشن پادرس

کارمندی با حقوق ۶/۰۰۰/۰۰۰ تومان

$$(۲۵۰۰۰۰۰-۱۳۰۰۰۰۰)\times\frac{۱۰}{۱۰۰}+$$
$$(۴۵۰۰۰۰۰-۲۵۰۰۰۰۰)\times\frac{۱۵}{۱۰۰}+$$
$$(۶۰۰۰۰۰۰-۴۵۰۰۰۰۰)\times\frac{۲۵}{۱۰۰}$$

$$= ۱۲۰۰۰۰ + ۳۰۰۰۰۰ + ۳۷۵۰۰۰ = ۷۹۵۰۰۰ \text{ تومان}$$

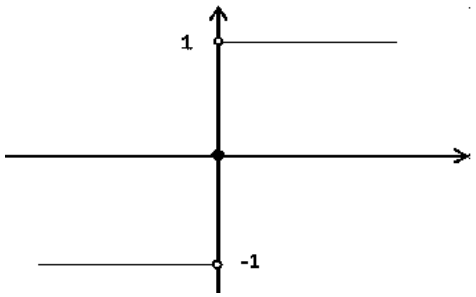
تابع علامت:

(کاردرکلاس ص۳۵)

تابع پلکانی که ضابطه آن به صورت زیر باشد را تابع علامت می نامیم و آن را با $y = sign(x)$ نشان می دهیم.

دامنه تابع علامت R و برد آن $\{-۱,۰,۱\}$ می باشد.

$$f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$$



تابع جزء صحیح:

تابع جزء صحیح یا براکت از نوع توابع پله ای است که به صورت $f(x)=[x]$ می باشد که می خوانیم جزءصحیح x یا براکت x . مثل: $f(x)=[۲]$

دامنه و برد توابع جزء صحیح:

تابع جزء صحیح کارش صحیح سازیه و هر عددی که وارد تابع شود جزء صحیح آن عدد را بیرون می دهد.بنابراین:

$D_f = R$

$R_f = Z$

✓ نکته: جزء صحیح(براکت) هر عدد صحیح، برابر است با خود آن عدد

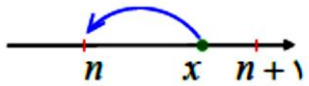
$$\left[\begin{matrix}x\\ \downarrow\end{matrix}\right]=x$$
$$x\in Z$$

مثل:

$[۲]=۲$, $[-۲]=-۲$

✓ جزء صحیح(براکت) هر عدد غیر صحیح، برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد.

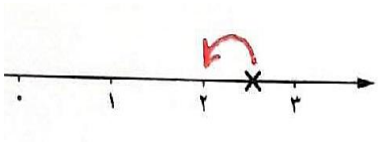
$$\left[\begin{matrix}x\\ \downarrow\end{matrix}\right]\xrightarrow{n<x<n+۱} n$$
$$x\notin Z$$



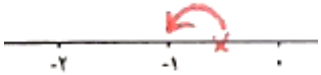
$$n\le x<n+۱\rightarrow[x]=n$$

مثل:

$[۲/۷]=۲$



$[-۰/۷]=-۱$



✓ راه کوتاه: براکت در اعداد مثبت، اعشار را از بین می بردو در اعداد منفی علاوه بر از بین بردن اعشار ، یک واحد هم کم می کند.

مثل:

$[-۲/۷]=-۲-۱=-۳$, $[۰/۷]=۱$

(کاردرکلاس ص۳۹و تمرین۱ ص۴۳)

حاصل عبارات زیر را بیابید

$[-۳/۲]=$ $[-۰/۰۷]=$

$[-۲/۲]=$ $[-\pi]=$

$[-۱/۲]=$ $[\pi]=$

$[-۴/۲]=$ $[۴/۲]=$

$[-۳/۲]=$ $[۳/۹۹]=$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

✓ حاصل $[x]+[-x]$ اگر x عدد صحیح باشد برابرصفر و اگر x عددی غیر صحیح باشد برابر ۱-است

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases}$$

(تمرین ۲ ص ۴۳)

جدول زیر را کامل کنید

مقدار $f(x)$	مقدار x	ضابطه تابع
	$x=-2/3$ $x=5$	$f(x)=[x]$
	$x=1/7$ $x=2/3$	$f(x)=[-x]$
	$x=1$ $x=1/3$ $x=1/7$ $x=2$	$f(x)=[x]+[-x]$
	$x=1$ $x=0/2$ $x=1/3$	$f(x)=[3x]$

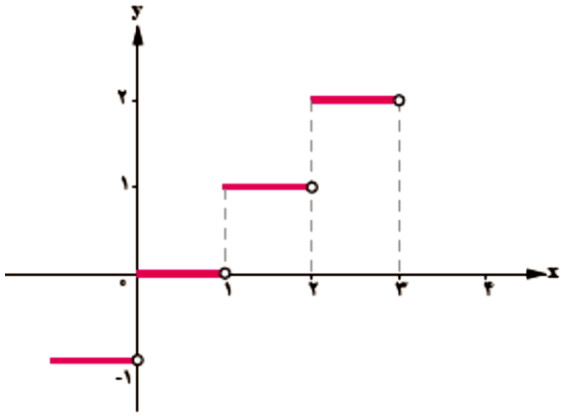
رسم تابع جزء صحیح:

برای رسم تابع جزء صحیح در یک بازه (فاصله)کافی است طول فاصله رابه فاصله هایی به طول یک دسته بندی کنیم

(کاردرکلاس ص ۳۹)

②تابع $g(x)=[x]$ درفاصله $-1\le x<3$ را رسم کنید.☑حل:

$$g(x)=\begin{cases}-1 & -1\le x<0\\ 0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x<2\\ 2 & 2\le x<3\end{cases}$$



تابع قدر مطلق:

تابعی که هرمقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدر مطلق نامیده می‌شود، تابع قدر مطلق را به صورت $f(x)=|x|$ نمایش می‌دهند.مثل: $f(x)=|2|$

✓ هر عددی که وارد تابع قدر مطلق شود عددی نامنفی بیرون می دهدپس دامنه آن R وبرد آن اعداد حقیقی نامنفی است

✓ قدر مطلق هر عدد مثبت یا صفر، برابر است با خود آن عدد .مثل: $|2|=2$, $|0|=0$

✓ قدر مطلق هر عدد منفی، برابر است با قرینه آن عدد .مثل: $|-2|=-(-2)=2$

✓ قدر مطلق هر عدد با قدرمطلق قرینه اش برابر است.مثل:

$|2|=|-2|$, $|x-2|=|2-x|$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

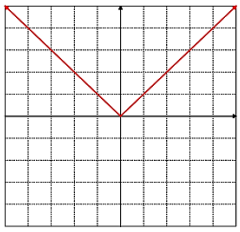
✓ تابع قدرمطلق را مطابق تعریف می توان به صورت تابع دوضابطه ای نوشت:

$$f(x)=\begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

✓ اگر دامنه یک تابع قدر مطلق، مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد نمودار آن به صورت زیر می‌باشد.

$$f(x)=|x|$$

x	-1	0	1
y	1	0	1



رسم تابع قدر مطلق:

تابع قدرمطلق را می توان به دو روش زیر رسم کرد :

۱.توابع به فرم $y=|ax+b|$ به صورت دوضابطه ای

۲. توابع به فرم $y=|x|\pm b$, $y=|x\pm a|$ به کمک انتقال

مراحل رسم توابع به فرم $y=|ax+b|$ به صورت دو ضابطه ای:

۱. ریشه یابی

۲. ضابطه بندی

۳. جدول نقطه یابی و رسم نمودار

(مثال ص۴۲)

نمودار تابع $y=|2x-6|$ را رسم کنید. ☑حل:

۱. ریشه یابی $2x-6=0 \rightarrow 2x=6 \rightarrow x=3$

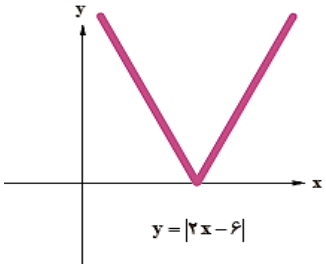
۲. ضابطه بندی

$$y=|2x-6|=\begin{cases} 2x-6 & x \geq 3 \\ -(2x-6) & x<3 \end{cases}$$

۳. جدول نقطه یابی و رسم نمودار

در جدول ابتدا به x عدد ریشه ، سپس نقاط کمکی(یک واحد کمتر و یک واحد بیشتر از ریشه)را دوطرف آن قرار داده و عرض نقاط را می یابیم

x	۲	۳	۴
y	۲	۰	۲



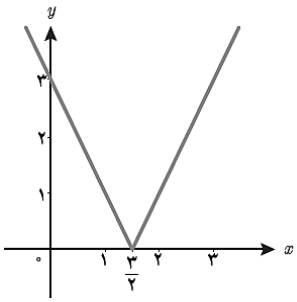
(تمرین ۵ ص۴۴)

⑤الف)نمودار تابع $y=|2x-3|$ را رسم کنید.

$$2x-3=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$y=\begin{cases} 2x-3 & x \geq \frac{3}{2} \\ -(2x-3) & x<\frac{3}{2} \end{cases}$$

x	۰	$\frac{3}{2}$	۳
y	۳	۰	۲



ب)نمودار تابع $y=|3x+1|$ را رسم کنید.

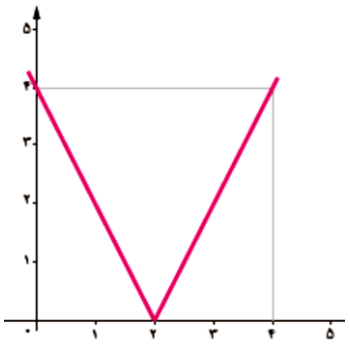
دانلود از اپلیکیشن پادرس

مراحل نوشتن ضابطه تابع به فرم $y=|ax+b|$ از روی نمودار:

ابتدا جدول نقطه یابی را می کشیم سپس معادله هر نیم خط را نوشته و داخل قدر مطلق قرار می دهیم تا ضابطه تابع به دست آید.

(کاردرکلاس ص۴۱)

با توجه به شکل ضابطه تابع را بنویسید.



☑حل:

با توجه به شکل ریشه نمودارو نقاط کمکی آن را می یابیم بنابراین:

x	۰	۲	۴
y	۴	۰	۴

از طریق جدول نقاط معادله هر نیم خط را می نویسیم:

$$(۲,۰),(۰,۴) \rightarrow y=m(x-x_۱) \xrightarrow{m=-۲} y=-۲x+۴$$

$$(۲,۰),(۴,۴) \rightarrow y=m(x-x_۱) \xrightarrow{m=۲} y=۲x-۴$$

معادله نیم خط هارا داخل قدر مطلق قرار می دهیم و ضابطه را می یابیم:

$$\left.\begin{matrix} ۲x-۴ & x\geq ۲ \\ -۲x+۴ & x<۲ \end{matrix}\right\} \rightarrow y=|۲x-۴|$$

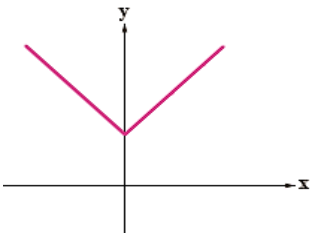
رسم توابع به فرم $y=|x|\pm b$, $y=|x\pm a|$ به کمک انتقال:

✓ در تابع به فرم $y=|x|\pm b$ انتقال به صورت آسانسوری(عمودی) است

(کاردرکلاس ص۴۲ و مثال)

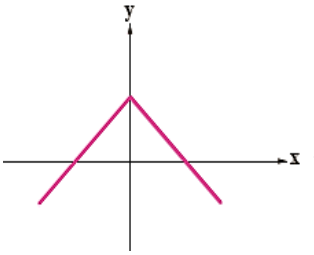
۱.نمودار تابع $y=|x|+۱$ را رسم کنید.

☑حل: نمودار $y=|x|$ را ۱واحد به بالا منتقل می کنیم



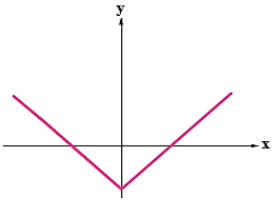
۲.نمودار تابع $y=-|x|+۱$ را رسم کنید.

☑حل:ابتدا نمودار $y=|x|$ را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم سپس نمودار $y=-|x|$ را ۱واحدبه بالا منتقل می کنیم



۳.نمودار تابع $y=|x|-۳$ را رسم کنید.

☑حل: نمودار $y=|x|$ را۳واحد به پایین منتقل می کنیم

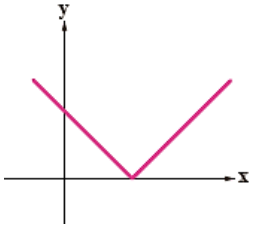


✓ در تابع به فرم $y=|x\pm a|$ انتقال به صورت قطاری (افقی)است

(کاردرکلاس ص۴۲)

۱.نمودار تابع $y=|x-۴|$ را رسم کنید.

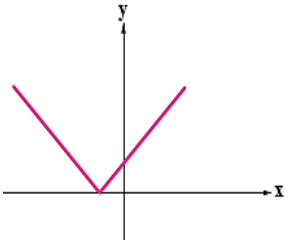
☑حل: نمودار $y=|x|$ را۴واحد به راست منتقل می کنیم



دانلود از اپلیکیشن پادرس

۲.نمودار تابع $y = |x+1|$ را رسم کنید.

☑حل: نمودار $y = |x|$ را۱واحد به چپ منتقل می کنیم



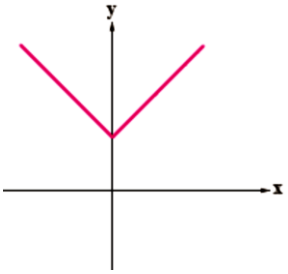
۳.نمودار تابع $y = |x-3|$ را رسم کنید.

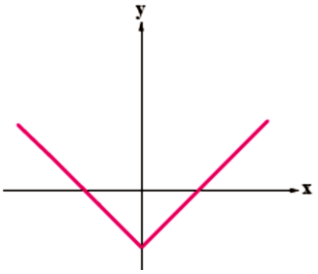
(تمرین۴ ص۴۴)

با توجه به نمودارهای زیر، کدام نمودار، تابع الف و کدام نمودار، تابع ب را مشخص می کند؟

الف) $y = |x| + 2$

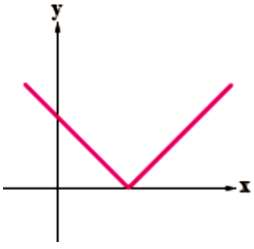
ب) $y = |x| - 3$

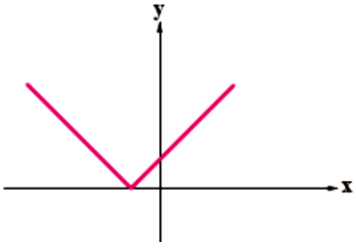




الف) $y = |x+1|$

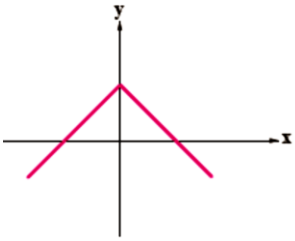
ب) $y = |x-4|$

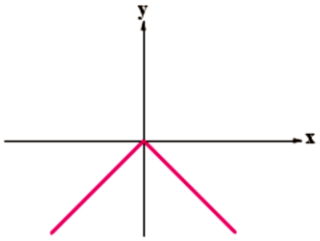




الف) $y = -|x|$

ب) $y = -|x| + 1$





دانلود از اپلیکیشن پادرس