

بسمه تعالی



تقسیم و بخش پذیری

حسابان ۲

مدرس : محمد امین حسن آبادی



@Vipposhtiban

یادآوری

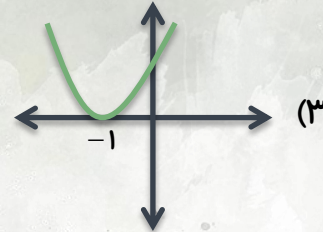
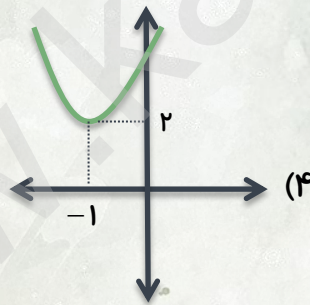
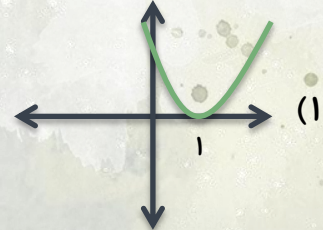
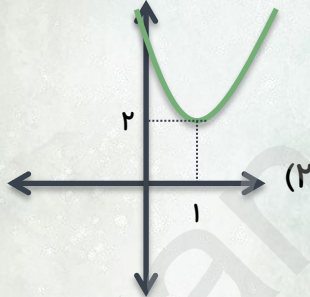
توابع یکنوا و اکیدا یکنوا

تابع درجه سوم و ویژگی های آن

تست ۱ (یاد آوری): نمودار تابع $f(x) = |(x-1)^3| + 2$ کدام است؟



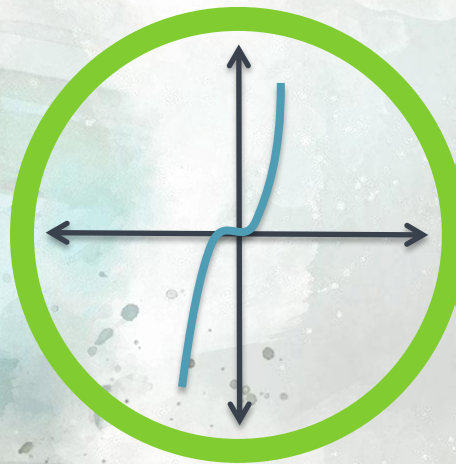
(آزمون کانون سال ۹۵)



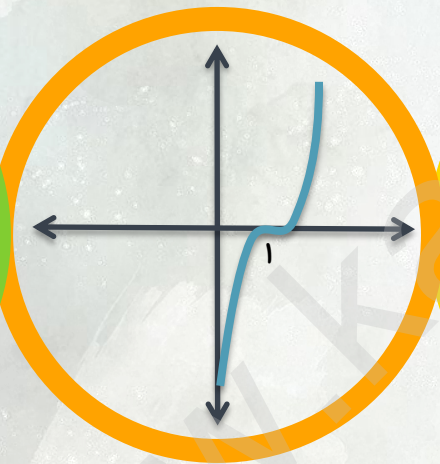
زیر محور y ها را حذف
قرینه ی آن را با تابع اضافه می کنیم

۲ واحد به سمت بالا

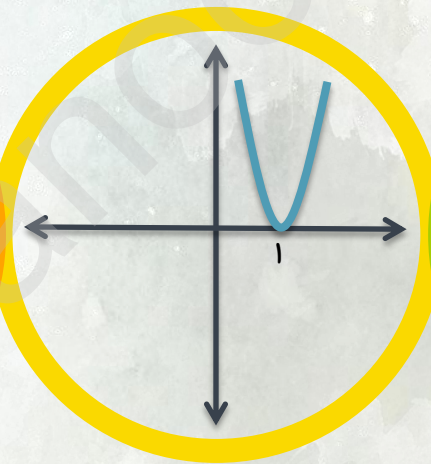
یک واحد به سمت راست



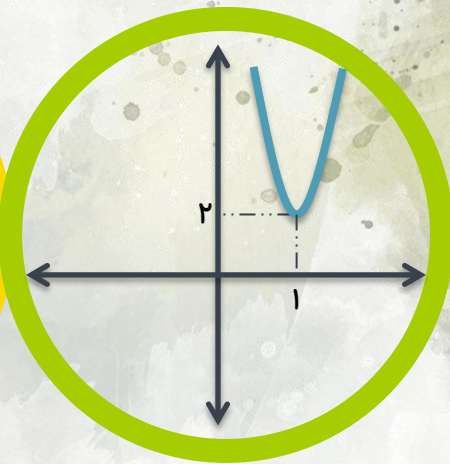
$$y = x^3$$



$$y = (x - 1)^3$$



$$y = |(x - 1)^3|$$



$$y = |(x - 1)^3| + 2$$

تقسیم و بخش پذیری

صورت کلی قضیه تقسیم برای چند جمله ای ها :

$$f(x) = P(x)Q(x) + R(x)$$

مقسوم ←

مقسوم علیه


خارج قسمت


باقی مانده →


$$\begin{array}{r|l} f(x) & P(x) \\ \vdots & Q(x) \\ \hline & R(x) \end{array}$$

نکات مربوط به باقی مانده $(R(x))$

در عبارت $f(x) = P(x)Q(x) + R(x)$:

همواره درجه ی $R(x)$ از $P(x)$ کوچکتر است. 

اگر $R(x)=0$ آنگاه $f(x)$ بر $P(x)$ بخش پذیر است. 

باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر $f(-\frac{b}{a})$ می باشد. 
 $\underbrace{ax+b}_{P(x)}$

باقیمانده تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر $x - 2$ و $x + 3$ به ترتیب -1 و 4 است. باقیمانده



تست ۲:

تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + x - 6$ کدام است؟

$2x - 1$ (۴)

$-x + 2$ (۳)

$x + 1$ (۲)

$x - 1$ (۱)

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۷)

www.kanoon.com



چون درجه عبارت مقسوم علیه ما $(x^2 + x - 6)$ می باشد پس درجه ی باقی مانده ی ما حداکثر ۱ می باشد یعنی:



$$R(x) = ax + b$$

$$f(x) = (x^2 + x - 6)Q(x) + ax + b \rightarrow \begin{cases} x - 2: f(2) = 1 \rightarrow 2a + b = 1 \\ x + 4: f(-3) = -4 \rightarrow -3a + b = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$R(x) = x - 1$$

تست ۳: چند جمله ای $P(x) = (x^2 - 2)^n + (x - x^3 - 1)^{n-1}$ بر چند تا از عبارت های زیر قطعاً بخش پذیر است؟



الف) $x - 1$

ب) $x + 1$

پ) $x + 2$

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

(آزمون کانون سال ۹۴)



بررسی گزینه ها:

$$\text{الف) } x = 1 \rightarrow P(1) = ((1)^2 - 2)^n + (1 - (1)^3 - 1)^{n-1} = (-1)^n + (-1)^{n-1}$$

n و $n-1$ دو عدد پشت سر هم بوده و قطعاً یکی از این دو زوج است در نتیجه یک جمله توان زوج داشته و مثبت شده



(+) و دیگری به توان فرد رسیده و منفی باقی می ماند (-) در نتیجه مجموع آن ها صفر و بخش پذیر است.

$$\text{ب) } x = -1 \rightarrow P(-1) = ((-1)^2 - 2)^n + ((-1) - (-1)^3 - 1)^{n-1} = (-1)^n + (-1)^{n-1}$$



به همان شیوه ی بالا اثبات می شود!

$$\text{پ) } x = -2 \rightarrow P(x) = ((-2)^2 - 2)^n + ((-2) - (-2)^3 - 1)^{n-1} = (2)^n + (5)^{n-1}$$



تجزیه عبارات خاص

$$۱) x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + a x^{n-2} + \dots + a^{n-2} x + a^{n-1})$$

(به ازای تمامی مقادیر n)

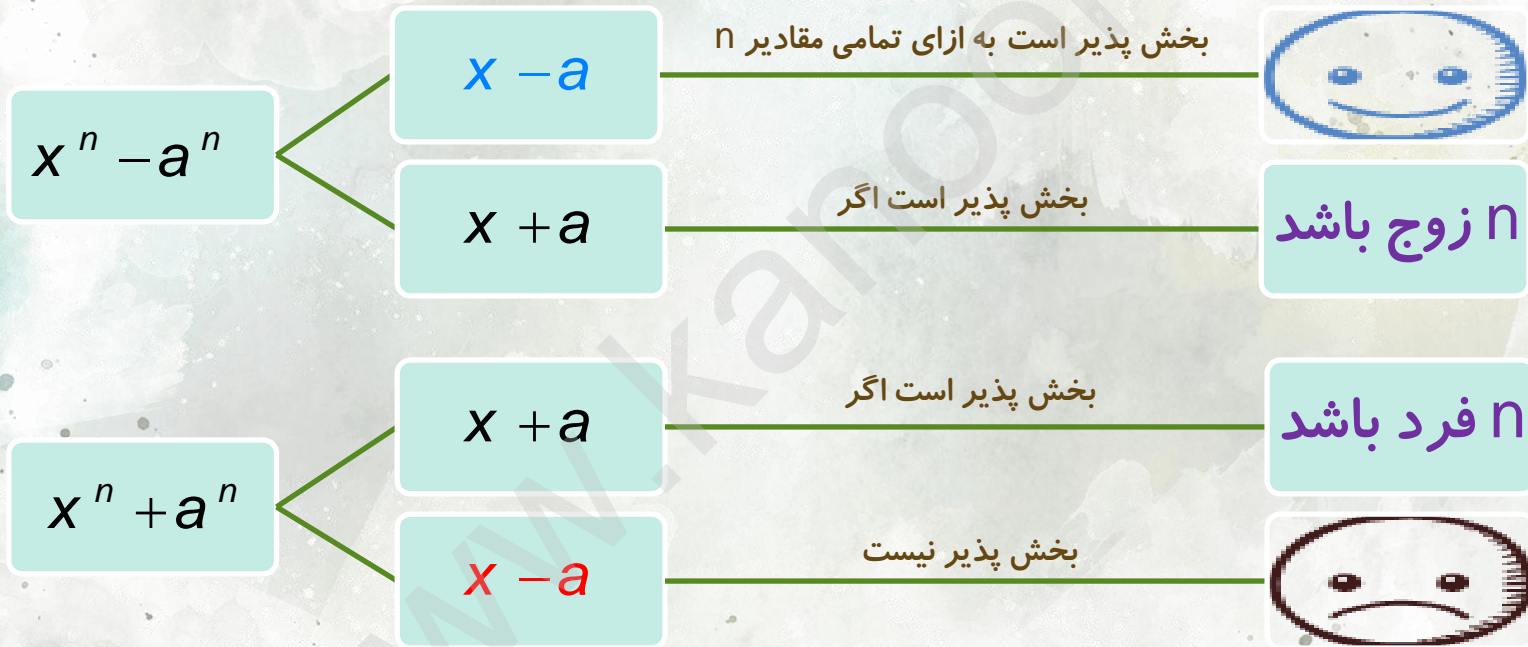
$$۲) x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - a x^{n-2} + \dots + a^{n-2} x - a^{n-1})$$

(به ازای n های زوج)

$$۳) x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - a x^{n-2} + \dots - a^{n-2} x + a^{n-1})$$

(به ازای n های فرد)

نکات بخش پذیری مربوط به اسلاید قبل



تست ۴: مجموع جواب های معادله ی $\frac{1-x+x^2-\dots+x^6-x^7+x^8}{1-x^3+x^6} = 5$ کدام است؟



-۲ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

(آزمون کانون سال ۹۵)

www.kanooon.com



طبق نکته گفته شده داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} (1+x^9) &= (1+x)(1-x+x^2-\dots+x^6-x^7+x^8) \rightarrow 1-x+x^2-\dots+x^6-x^7+x^8 = \frac{1+x^9}{1+x} \\ (1+x^9) &= (1+x^3)(1-x^3+x^6) \rightarrow 1-x^3+x^6 = \frac{1+x^9}{1+x^3} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{1-x+x^2-\dots+x^6-x^7+x^8}{1-x^3+x^6} = \frac{\frac{1+x^9}{1+x}}{\frac{1+x^9}{1+x^3}} = \frac{1+x^3}{1+x} = 1-x+x^2 = 5$$

$$\rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \rightarrow S = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{-1}{1}\right) = +1$$

توجه:

یکی دیگر از روش هایی که برای پیدا کردن باقی مانده تقسیم به کار می رود (به ویژه برای معادلاتی که مقسوم علیه آن درجه دوم باشد) به صورت زیر است:

* بر خلاف روش های قبلی ما معادله ی مقسوم علیه $ax^2 + bx + c = 0$ را حل نمی کنیم ولی با جابجا کردن جملات در طرفین

تساوی می توان با جایگذاری در معادله اصلی به نتایج جالبی برسیم!

$$\text{مثال: } ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{bx + c}{a} \\ ax^2 + bx = -c \\ \vdots \end{cases} \longrightarrow \text{(نیاز به حفظ کردن نمی باشد)}$$

اگر عبارت $-a - 14x + 4x^2 + ax^3$ بر سه جمله ای $x^2 - 2x + 1$ بخش پذیر



تست ۵:

باشد a کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(آزمون کانون سال ۹۵)

www.kanoo.com



$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 1 &= 0 \rightarrow x^2 = 2x - 1 \\ \rightarrow ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a \\ &= ax \cdot x^2 + 4x^2 - 14x + 10 - a \\ &= ax(2x - 1) + 4(2x - 1) - 14x + 10 - a \\ &= 2ax^2 - ax + 8x - 4 - 14x + 10 - a \\ &= 2a(2x - 1) + (-a - 6)x + 6 - a \\ &= (3a - 6)x + 6 - 3a\end{aligned}$$

چون بخش پذیر است پس باقی مانده ی ما باید **صفر** باشد یعنی: $P(x^2 - 2x + 1) = 0$

$$\rightarrow 3a - 6 = 0 \rightarrow \boxed{a = 2}$$

