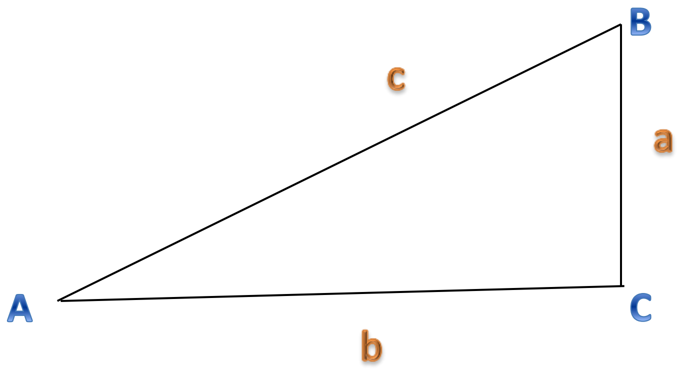
نسبت های مثلثاتی

- **نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه**



$$\sin_{\hat{A}} = \frac{a}{c} \qquad \tan_{\hat{A}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos_{\hat{A}} = \frac{b}{c} \qquad \cot_{\hat{A}} = \frac{b}{a}$$

- **نسبت های مثلثاتی زاوایای متمم**

به دو زاویه ای که مجموع آن ها برابر ۹۰ درجه باشد ، زاوایای متمم می گویند.

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = cos\alpha$$

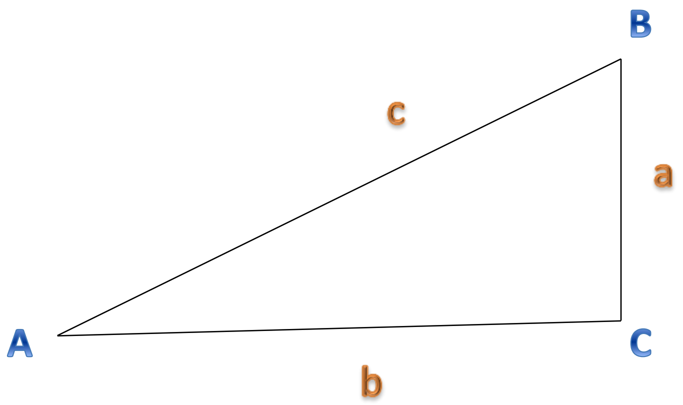
$$\cos\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = tan\alpha$$

علیرضا مصطفوی

همچنین در هر مثلث قائم الزاویه ای داریم:



$$\hat{A}+\hat{B}=۹۰$$

$$\sin_{\hat{A}}=cos_{\hat{B}} \qquad \cos_{\hat{A}}=sin_{\hat{B}}$$

$$\tan_{\hat{A}}=cot_{\hat{B}} \qquad \cot_{\hat{A}}=tan_{\hat{B}}$$

- نسبت های مثلثاتی برای دو زاویه ای که با هم $\frac{\pi}{۲}$ رادیان اختلاف دارند.

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-tan\alpha$$

- **نسبت های مثلثاتی زوایای مکمل**

به دو زاویه ای که مجموعشان برابر ۱۸۰ درجه باشد، زوایای مکمل می گویند.

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

- **نسبت های مثلثاتی برای دو زاویه ای که با هم π رادیان اختلاف دارند.**

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

- **نسبت های مثلثاتی دو زاویه قرینه**

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

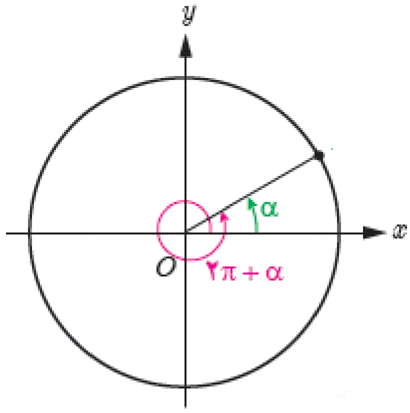
- **نسبت های مثلثاتی زوایای هم انتها**

زاویه هایی مانند α و ۲π + α که انتهای کمان های آن ها بر هم منطبق می شود را زوایای هم انتها گویند.

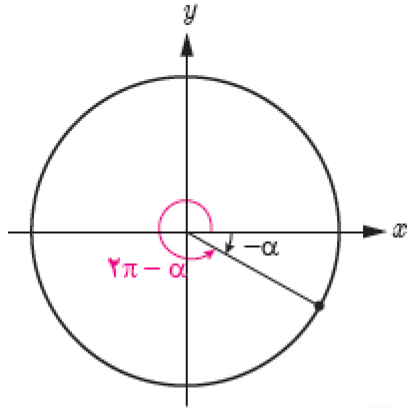
$$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha \qquad \sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$$

$$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha \qquad \tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

دقت شود که k هر عدد صحیحی می تواند باشد.



با استدلالی مشابه از آنجا که زوایای α− و $2k\pi-\alpha$ نیز هم انتها هستند، نسبت های مثلثاتی زوایای α− و $2k\pi-\alpha$ نیز با هم برابرند.



مثال: نسبت های مثلثاتی زوایای زیر را بدست آورید.

a) $\frac{-۷\pi}{۶}$ b) ۳۹۰ c) $\frac{۱۱\pi}{۶}$

پاسخ)

a)

$$\sin\left(\frac{-۷\pi}{۶}\right)=\sin\left(-\pi-\frac{\pi}{۶}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{۶}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\left(\frac{-۷\pi}{۶}\right)=\cos\left(-\pi-\frac{\pi}{۶}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{۶}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{۶}\right)=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\left(\frac{-۷\pi}{۶}\right)=\tan\left(-\pi-\frac{\pi}{۶}\right)=-\tan\left(\pi+\frac{\pi}{۶}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{۶}\right)=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot\left(\frac{-۷\pi}{۶}\right)=\cot\left(-\pi-\frac{\pi}{۶}\right)=-\cot\left(\pi+\frac{\pi}{۶}\right)=-\cot\left(\frac{\pi}{۶}\right)=-\sqrt{۳}$$

b)

$$\sin(۳۹۰)=\sin\left(۲\pi+\frac{\pi}{۶}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos(۳۹۰)=\cos\left(۲\pi+\frac{\pi}{۶}\right)=cos\left(\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(۳۹۰)=\tan\left(۲\pi+\frac{\pi}{۶}\right)=tan\left(\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot(۳۹۰)=\cot\left(۲\pi+\frac{\pi}{۶}\right)=cot\left(\frac{\pi}{۶}\right)=\sqrt{۳}$$

c)

$$\sin\left(\frac{۱۱\pi}{۶}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{۳}\right)=-\frac{۱}{۲}$$

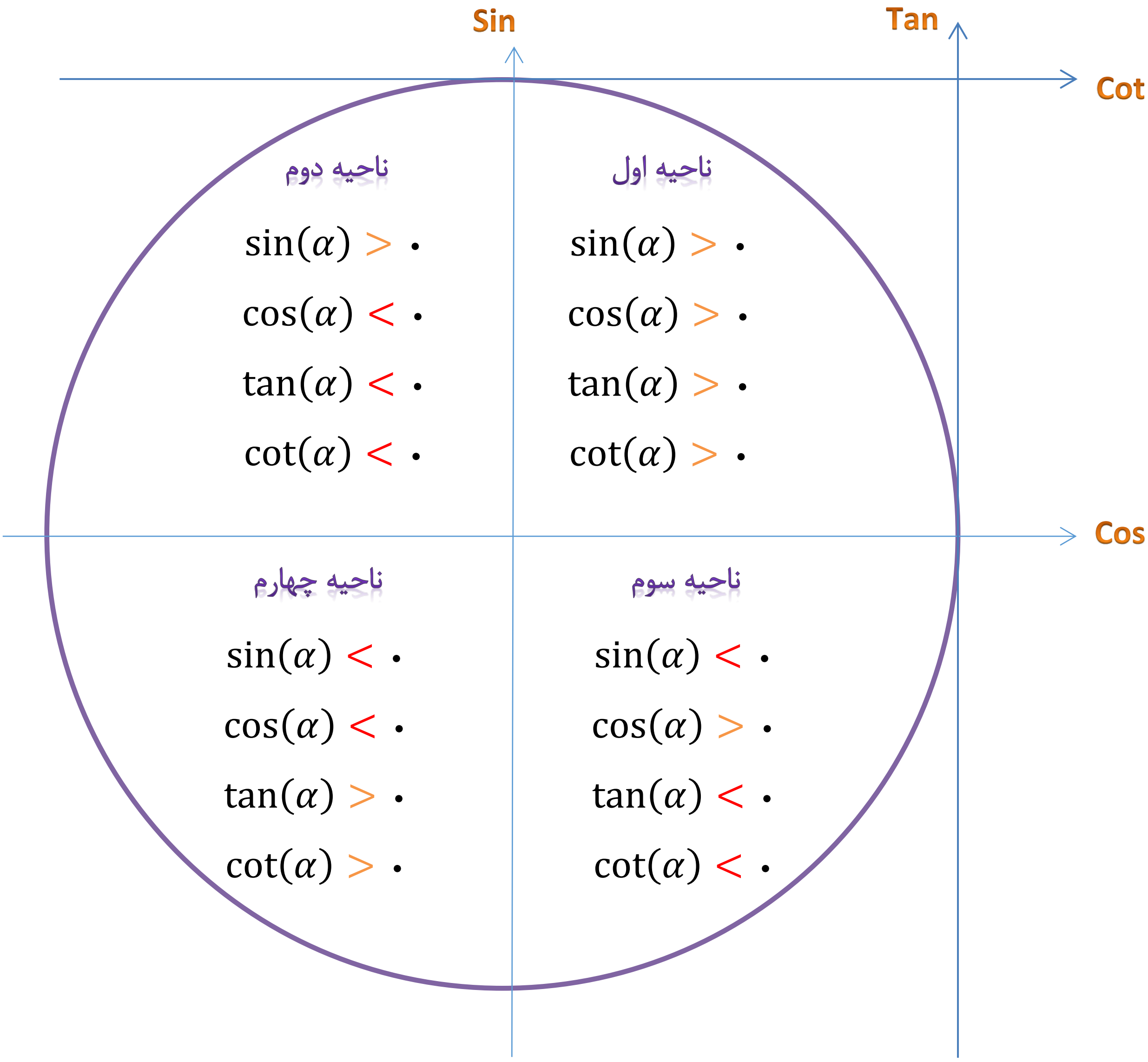
$$\cos\left(\frac{۱۱\pi}{۶}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{۳}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\left(\frac{۱۱\pi}{۶}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}\right)=-\cot\left(\frac{\pi}{۳}\right)=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot\left(\frac{۱۱\pi}{۶}\right)=\cot\left(\pi+\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}\right)=\cot\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{۳}\right)=-\sqrt{۳}$$

نکته: هر گاه انتهای کمان زاویه ای در ناحیه ی

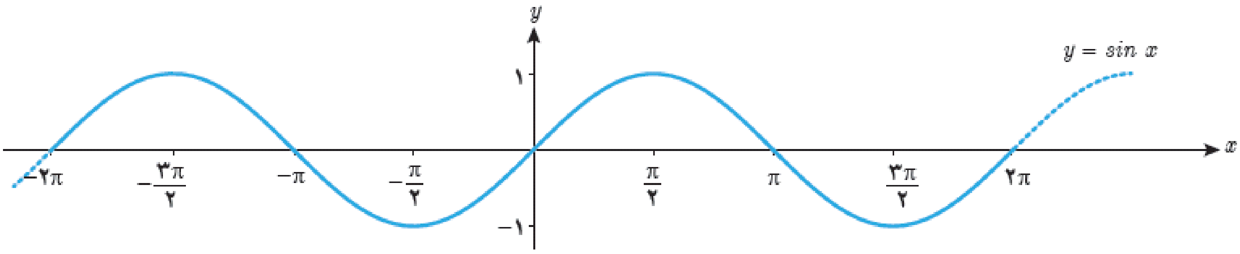
- **اول** باشد، همه ی نسبت های مثلثاتی آن زاویه **مثبت** اند.
- **دوم** باشد، فقط sin **مثبت** و بقیه نسبت ها **منفی** هستند.
- **سوم** باشد، sin و cos **منفی** و tan و cot **مثبت** اند.
- **چهارم** باشد، فقط cos **مثبت** و بقیه نسبت ها **منفی** اند.



توابع مثلثاتی

- **sin**

نمودار این تابع به شکل زیر است:



نکته ۱: در تابع sin x همواره x را برحسب رادیان در نظر میگیریم مگر اینکه صریحا گفته شود x بر حسب درجه است.به طور مثال منظور از sin ۴ سینوس ۴ رادیان و منظور از $\sin 4^{\circ}$ سینوس ۴ درجه است.

نکته ۲: تابع sin x در **بازه هایی به طول 2π تکرار می شود** یعنی داریم:

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin(\alpha)$$

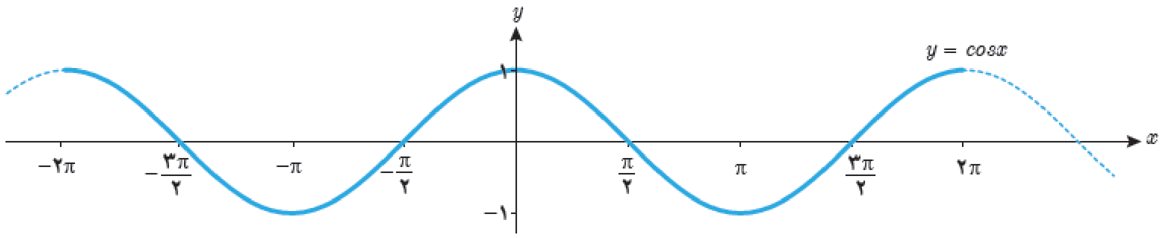
نکته ۳: دامنه تابع sin کل اعداد حقیقی(R) و برد آن بازه بسته $[-1 , +1]$ می باشد.

نکته ۴: تابع sin محور x هارا در ضرایب صحیح π قطع می کند.

نکته ۵: گاهی به نمودار تابع $y = sinx$ **موج سینوسی** می گویند.

- **cos**

نمودار این تابع به شکل زیر است:



نکته ۱: در تابع cos x همواره x را برحسب رادیان در نظر می گیریم مگر اینکه صریحا گفته شود x بر حسب درجه است.

نکته ۲: تابع cos x در بازه هایی به طول ۲π تکرار می شود یعنی داریم:

$$\cos(۲k\pi+\alpha)=\cos(\alpha)$$

نکته۳: دامنه تابع cos کل اعداد حقیقی(R) و برد آن بازه بسته $[+۱ \text{ و } -۱]$ می باشد.

نکته۴: تابع cos محور x هارا در ضرایب صحیح و فرد $\frac{\pi}{2}$ قطع می کند.

نکته۵: گاهی به نمودار تابع $y=cosx$ موج کسینوسی می گویند.

نکاتی در مورد رسم نمودار توابع مثلثاتی به کمک انتقال:

۱) برای رسم نمودار تابع $y = f(x-\theta)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه θ واحد به سمت راست انتقال دهیم.

۲) برای رسم نمودار تابع $y = f(x+\theta)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه θ واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

۳) برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + a$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه a واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

۴) برای رسم نمودار تابع $y = f(x) - a$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه a واحد به سمت بالا پایین دهیم.

۵) برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

۶) برای رسم نمودار تابع $y = f(-x)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

۷) برای رسم نمودار تابع $y = f(ax)$ کافی است طول همه ی نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را $\frac{1}{a}$ برابر کنیم.

۸) برای رسم نمودار تابع $y = f(\frac{x}{a})$ کافی است طول همه ی نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را a برابر کنیم.

۹) برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ کافی است عرض همه ی نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را k برابر کنیم.

۱۰) برای رسم نمودار تابع $y = \frac{1}{k}f(x)$ کافی است عرض همه ی نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر کنیم.

۱۱) برای رسم نمودار تابع $y = f(|x|)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم سپس آن قسمت از نمودار را که در سمت چپ محور xها قرار دارد را حذف و سمت راست محور xها را در سمت چپ قرینه کنیم.

۱۲) برای رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم سپس آن قسمت از نمودار را که در زیر محور yها قرار دارد را حذف و قرینه آن را در بالای محور yها رسم کنیم.

اتحاد های مثلثاتی

- $\sin^۲ x + cos^۲ x = ۱$
- $\sin^۲ x = ۱ - cos^۲ x$
- $cos^۲ x = ۱ - \sin^۲ x$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\tan x = \frac{۱}{\cot x}$
- $\cot x = \frac{۱}{\tan x}$
- $\tan x \times \cot x = ۱$
- $۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x} \qquad (\cos \alpha \neq ۰)$
- $۱ + \cot^۲ x = \frac{۱}{\sin^۲ x} \qquad (\sin \alpha \neq ۰)$

به کمک روابط بالا می توانیم اتحاد های کمکی زیر را استخراج کنیم:

$$(\sin x \pm \cos x)^۲ = ۱ \pm ۲ \sin x \times \cos x$$

$$\sin^۴ x + \cos^۴ x = ۱ - ۲\sin^۲ x$$

$$\sin^۶ x + \cos^۶ x = ۱ - ۳\sin^۲ x \cos^۲ x$$

$$\tan x + \cot x = \frac{۱}{\sin x \times \cos x}$$

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

$$\sin(x+y)=\sin x\times\cos y+\cos x\times\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x\times\cos y-\cos x\times\sin y$$

$$\cos(x+y)=\cos x\times\cos y-\sin x\times\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x\times\cos y+\sin x\times\sin y$$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{۱-\tan x\times\tan y}$$
$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{۱+\tan x\times\tan y}$$

چند اتحاد پر کاربرد و مهم

$$\sin(۲x)=۲\sin x\times\cos x$$
$$\cos(۲x)=\cos^{۲}x-\sin^{۲}x$$

از رابطه بالا دو اتحاد مهم زیر بدست می آید که به فرمول های توان شکن معروف اند:

$$\cos^{۲}x=\frac{۱+\cos(۲x)}{۲}$$
$$\sin^{۲}\mathrm{x}=\frac{۱-\cos(۲\mathrm{x})}{۲}$$

نکته تستی: با استفاده از اتحاد های مجموع و تفاضل به رابطه مهم زیر می رسیم:

$$\sin x\pm\cos x=\sqrt{۲}\sin(x\pm\frac{\pi}{۴})$$
$$\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\cos(x-\frac{\pi}{۴})$$

حد و پیوستگی

مفهوم حد و فرایند های حدی

همسایگی

اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می نامیم.

یعنی اگر $x_0 \in (a,b)$ آنگاه بازه (a,b) یک همسایگی x_0 است.

اگر نقطه x_0 را از این بازه حذف کنیم، مجموعه $(a,b)-\{x_0\}$ را همسایگی محذوف x_0 می نامیم.

همسایگی راست x_0

اگر $r > 0$ باشد، بازه $(x_0, x_0 + r)$ را یک همسایگی راست x_0 می نامیم.

همسایگی چپ x_0

اگر $r > 0$ باشد، بازه $(x_0 - r, x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می نامیم.

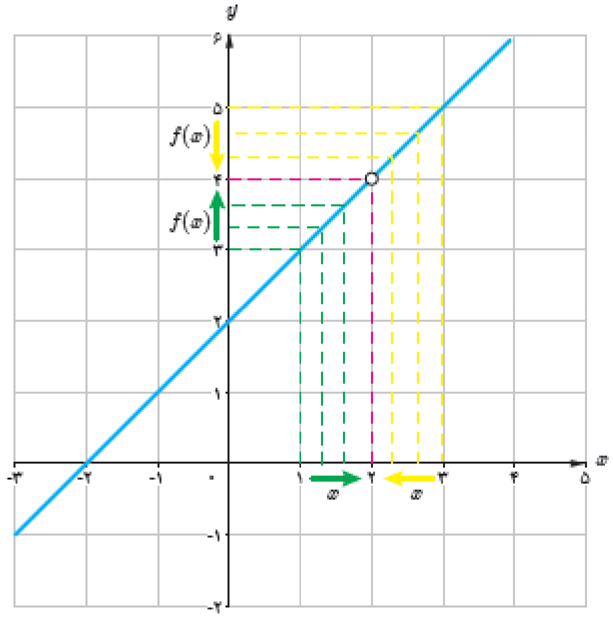
تعریف حد تابع

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف عدد a تعریف شده باشد. می گوییم **حد تابع f وقتی x به a نزدیک می شود برابر عدد حقیقی L است** و می نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

عدد L را حد تابع f در نقطه a می نامیم.

تابع f(x)=x+۲ را در نظر بگیرید که نقطه (۲،۴) از آن جدا شده باشد. همانطور که در نمودار این تابع مشاهده می کنید وقتی که x را با مقادیر بزرگ تر یا کوچک تر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می کنیم. مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می شوند. در این حالت می گوییم حد تابع f وقتی x به ۲ نزدیک می شود برابر ۴ است و می نویسیم:

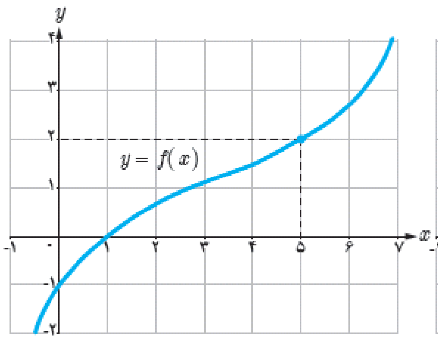


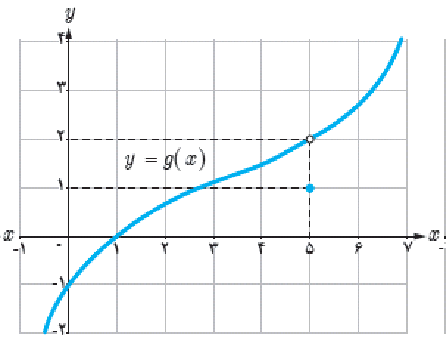
$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲}(x+۲) = ۴$$

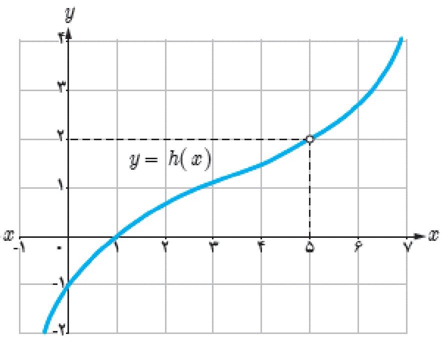
@just_jozve

علیرضا مصطفوی

نکته: نمودار سه تابع f،g و h را در نظر بگیرید.







بین حد تابع در یک نقطه و مقدار تابع در همان نقطه چند حالت وجود دارد که در زیر به سه مورد آن اشاره می کنیم:

۱. تابع در نقطه $a \in R$ تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد باشد و حد تابع در نقطه a با مقدار تابع در این نقطه برابر باشد.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

مانند تابع f که حدش با مقدارش در نقطه ۵ برابر است.

$$\lim_{x \to ۵} f(x) = f(۵) = ۲$$

۲. تابع در نقطه $a \in R$ تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد باشد ولی حد تابع در نقطه a با مقدار تابع در همان نقطه برابر نباشد.

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

مانند تابع g که حدش با مقدارش در نقطه ۵ برابر نیست.

$$\lim_{x \to ۵} g(x) = ۲$$

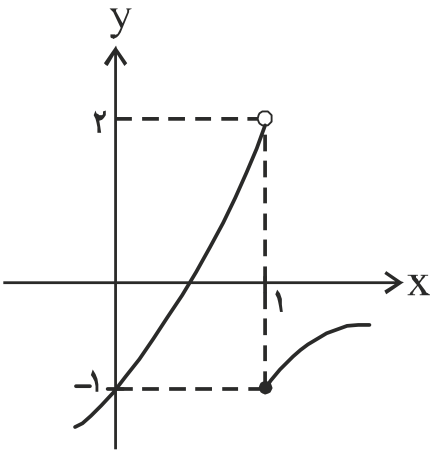
$$g(۵) = ۱$$

۳. تابع در نقطه $a \in R$ تعریف نشده باشد ولی در نقطه a حد داشته باشد.

مانند تابع h که در نقطه ۵ تعریف نشده است ولی در این نقطه دارای حد می باشد.

$$\lim_{x \to ۵} h(x) = ۲$$

حد های یک طرفه



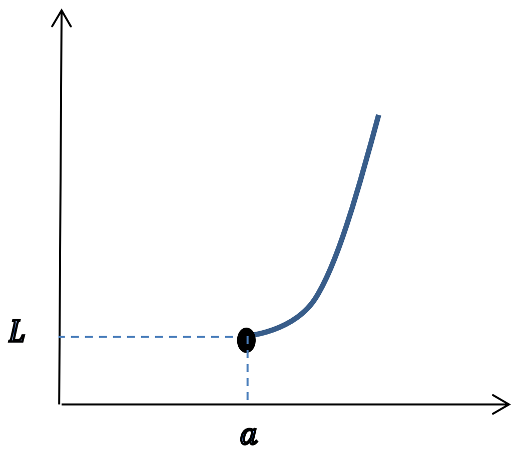
نمودار تابعی مانند $f(x)$ را در نظر بگیرید:

در این تابع می بینیم که اگر متغیر x را با مقادیر کوچک تر از ۱ به ۱ نزدیک کنیم مقادیر $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می شوند و اگر متغیر x را با مغادیر بزرگ تر از ۱ به ۱ نزدیک کنیم، مقادیر $f(x)$ به عدد ۲- نزدیک می شوند. در این صورت می گوییم حد تابع f در نقطه ۱ وجود ندارد ولی تابع در این نقطه دارای حدود چپ و راست می باشد.

حد راست

اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می گوییم حد راست تابع f در نقطه $x = a$ برابر عدد L است هرگاه تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه متغیر x (از سمت راست) به قدر کافی به a نزدیک شود.

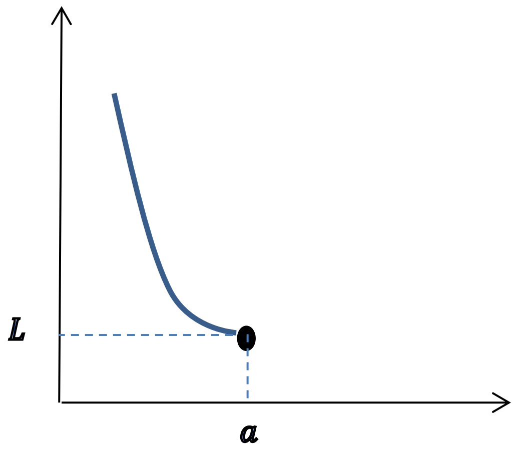
در این صورت می نویسیم: $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$



حد چپ

اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می گوییم حد چپ تابع f در نقطه x=a برابر عدد L است هرگاه تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه متغیر x (از سمت چپ) به قدر کافی به a نزدیک شود.

در این صورت می نویسیم: $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

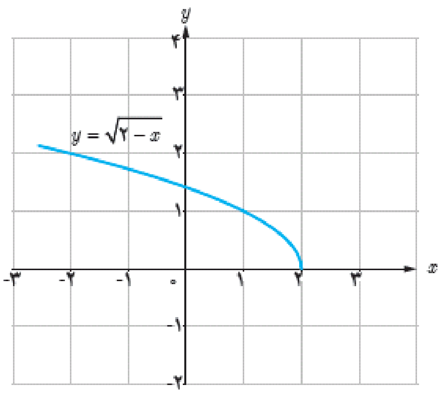


نکته: حد تابع f در نقطه $x = a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x = a$ موجود و با هم برابر باشند.

با توجه به نکته بالا می توان گفت که حد تابع f در نقطه $x = a$ موجود نیست اگر:

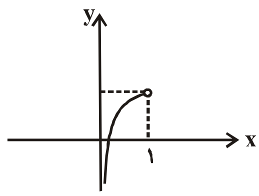
۱. حد چپ و راست در نقطه a موجود ولی دو مقدار متفاوت داشته باشند.
۲. یکی از حد های چپ یا راست وجود نداشته باشد(تابع در همسایگی چپ یا راست تعریف نشده باشد.

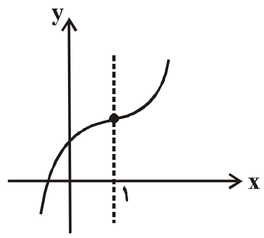
به طور مثال تابع $f(x) = \sqrt{۲ - x}$ در نقطه $x = ۲$ حد ندارد چون در هیچ همسایگی راست ۲ تعریف نشده است.

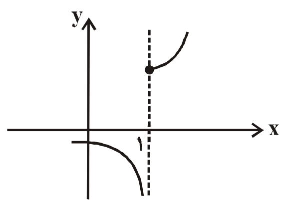


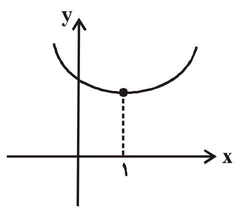
مثال ۱:

کدام‌یک از نمودارهای زیر نشان دهنده‌ی تابعی است که در نقطه‌ی $x=۱$ حد راست دارد ولی حد چپ ندارد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ)

در گزینه‌های «۲» و «۴» تابع موردنظر در $x=۱$ دارای حد راست و چپ می‌باشد. در گزینه‌ی «۱» تابع حد چپ دارد و حد راست ندارد و در گزینه‌ی «۳» تابع حد راست دارد ولی حد چپ ندارد.

مثال ۲: حد چپ تابع $y=\left[\frac{۱}{x}\right]$ در نقطه‌ی $x=\frac{-۱}{۱۰}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱۱

۲) ۹-

۳) ۱۰-

۴) ۱۱-

پاسخ)

گزینه‌ی «۳»

وقتی $x \to \left(\frac{-۱}{۱۰}\right)^-$، یعنی $x<\frac{-۱}{۱۰}$ پس $\frac{۱}{x}>-۱۰$، لذا:

$$\left[\frac{۱}{x}\right]=-۱۰$$

نکته:اگر دو تابع f و g در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a با هم برابر باشند و حد راست یکی از آن ها در a وجود داشته باشد آنگاه حد راست تابع دیگر نیز در a وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند یعنی:

اگر $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ **آنگاه:**

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

به طریق مشابه، دو تابعی که در یک همسایگی چپ نقطه a با هم برابرند مقدار حد چپ آنها در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

بنابراین دو تابع که در یک همسایگی نقطه a (به جز احتمالا خود a) با هم برابر باشند، مقدار حد آن ها نیز در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

به طور مثال مقدار حد راست تابع $f(x) = \frac{[x]}{x}$ **در نقطه x=۰ برابر صفر است چون در این ناحیه تابع f با تابع g(x)=۰ برابر است.**

قضایای حد

قضیه ۱: حد تابع ثابت $f(x)=c$ در هر نقطه دلخواه برابر مقدار ثابت c است. یعنی:

$$\lim_{x\to a} c = c$$

قضیه ۲: هر چند جمله ای مانند $p(x)=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ در هر نقطه دلخواه a حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله ای در نقطه a برابر است یعنی:

$$\lim_{x\to a}(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) = b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \cdots + b_1 a + b_0$$

قضیه ۳: اگر دو تابع g و f در نقطه $x=a$ **حد داشته باشند** و $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ آنگاه:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L_1 - L_2$$

$$\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right).\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = L_1.L_2$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

قضیه ۴: فرض کنید تابع f در نقطه a حد دارد.

اگر تابع f در همسایگی محذوف a نامنفی باشد آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

به طور کلی برای هر عدد طبیعی n، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شه باشد،آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

مثال ۱: اگر f و g در اطراف $x=a$ تعریف شده و هر دو در این نقطه دارای حد باشند و $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=۱$ و $\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x)=-۶$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to a}(f^۲+g^۲)(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

پاسخ:

گزینه‌ی «۲»

اگر فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L_۱$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L_۲$ خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)=L_۱+L_۲=۱\\ \lim\limits_{x\to a}(f.g)(x)=\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to a}g(x)\right)=L_۱L_۲=-۶\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}L_۱=۳,L_۲=-۲\\ \text{یا}\\ L_۲=۳,L_۱=-۲\end{array}\right.$$

$$\lim\limits_{x\to a}(f^۲+g^۲)(x)=\lim\limits_{x\to a}f^۲(x)+\lim\limits_{x\to a}g^۲(x)=۹+۴=۱۳$$

مثال ۲: اگر $f(x)=\begin{cases}۳x^۲+x-۲ & x>۰\\ ۵x+۱ & x<۰\end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^+}f(\frac{۱}{۲x}-\frac{x}{۲})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) -۴

پاسخ:

گزینه‌ی «۲»

$$\lim\limits_{x\to(-۱)^+}f(\frac{۱}{۲x}-\frac{x}{۲})=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}f(\frac{۱-x^۲}{۲x})=f(\frac{۰^+}{-۲})=f(۰^-)=۵(۰)+۱=۱$$

علیرضا مصطفوی

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]