

حسابان ۲

پایه می دوازدهم « رشته می ریاضی و فیزیک »

فصل ۲ : مثلثات

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.ir

@mathameri

مهر ۱۳۹۷

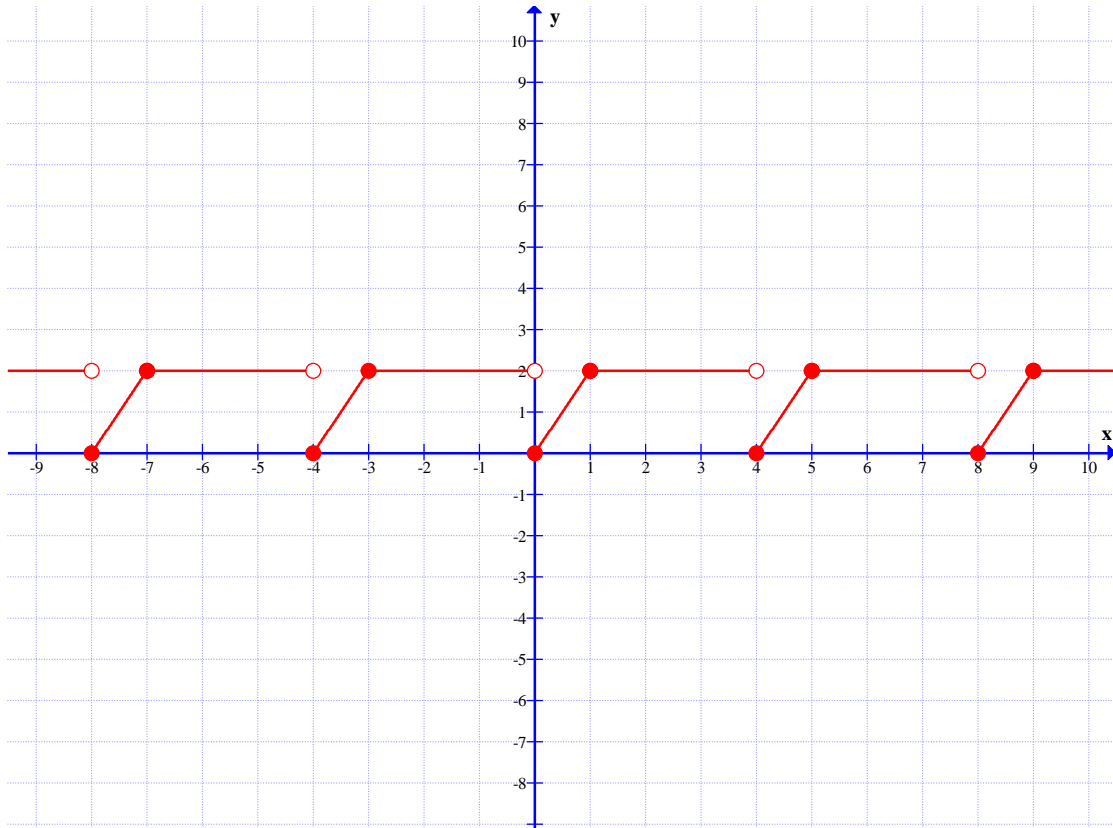


درس اول : توابع متناوب و دوره‌ی تناوب

در این درس با مفهوم تناوب و توابع متناوب آشنا می شوید و در ادامه دوره‌ی تناوب را تعریف می کنیم. سپس روش های تعیین دوره‌ی تناوب برخی از توابع را نیز بیان می کنیم.

تابع متناوب

به نمودار تابع زیر توجه کنید.



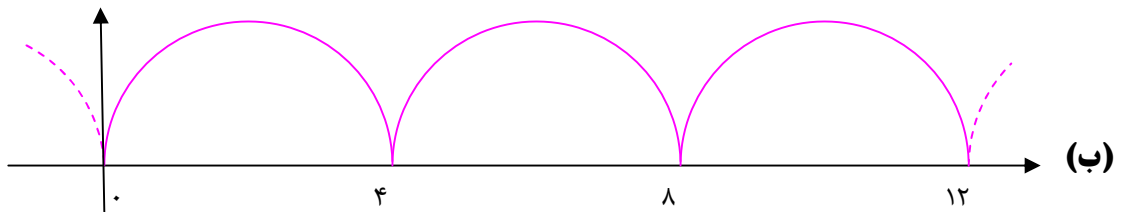
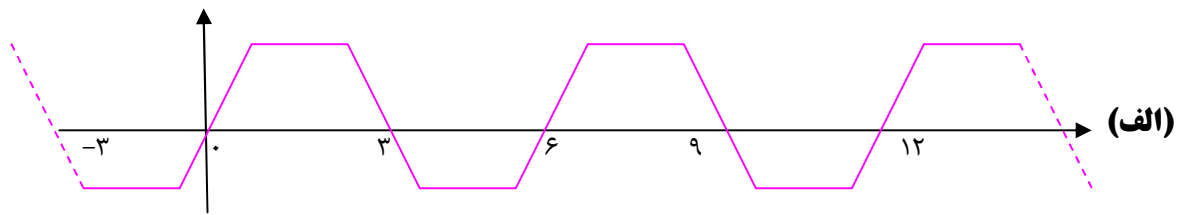
همانطور که مشاهده می کنید. نمودار این تابع در فواصل معینی تکرار می شود.

می توان گفت که نمودار تابع در فواصل به طول ۴ و در فواصل به طول ۸ واحدی و ... تکرار می شود.

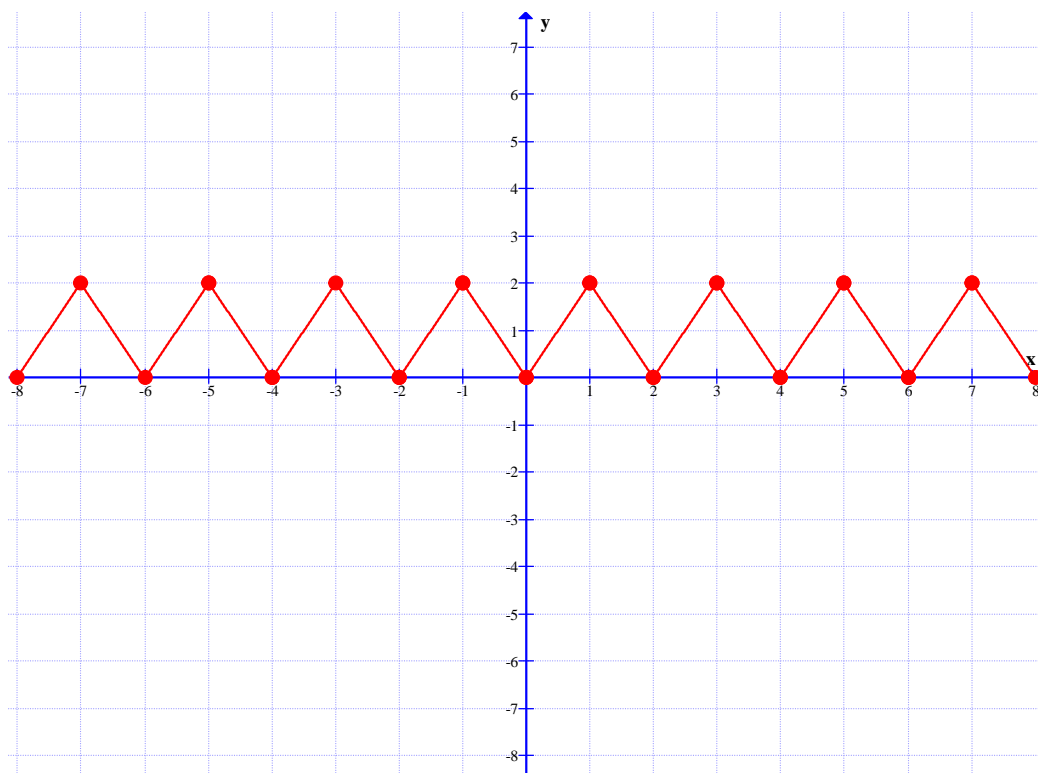
این چنین توابعی را توابع **متناوب** می نامند. طول کوچکترین فاصله‌ای که نمودار تابع تکرار می شود را

دوره‌ی تناوب می نامند و آن را با T نمایش می دهند. در تابع فوق دوره‌ی تناوب برابر ۴ است.

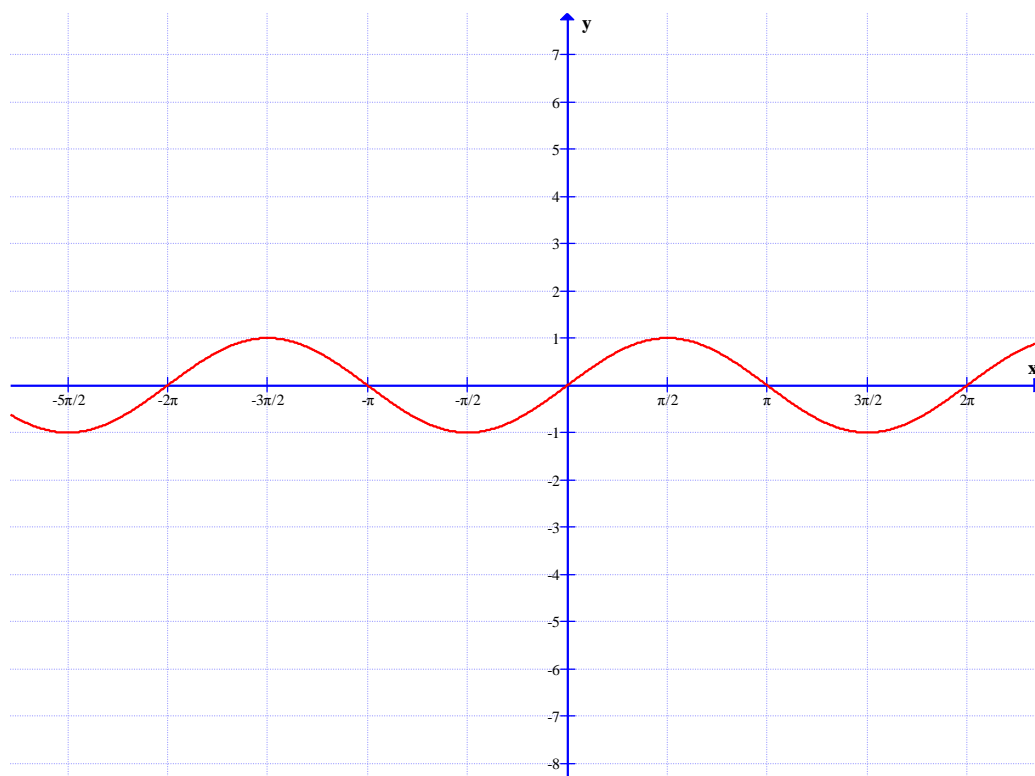
تمرین ۱: توابع زیر متناوب هستند. دوره‌ی تناوب هر یک را تعیین کنید.



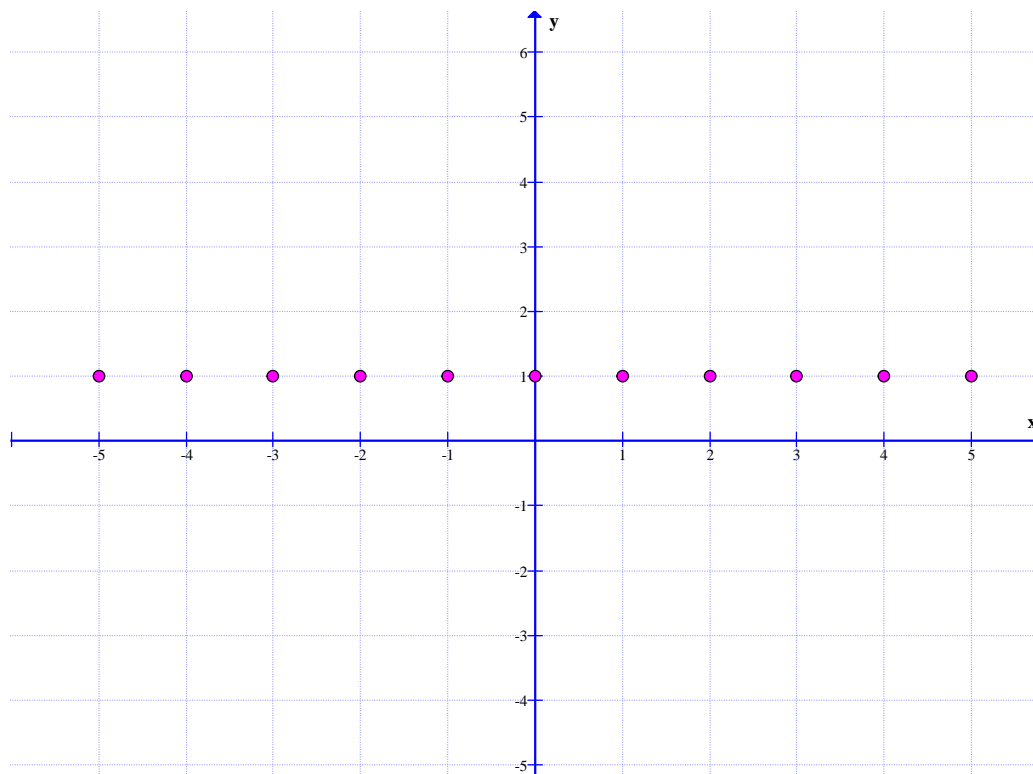
(پ)



(ت)



(ث)



تمرین ۲ : به کمک رسم نمودار ثابت کنید که تابع $f(x) = \sin x$ متناوب است. دوره‌ی تناوب اصلی آن را بدست آورید.

نتیجه : در واقع تابع متناوب، تابعی است که در فواصل معینی نمودار آن تکرار می شود و دوره‌ی تناوب آن، کوچکترین طول بازه ای است که در آن، نمودار تابع تکرار می گردد.
 اکنون تابع متناوب را به شکل زیر تعریف می کنیم.

اگر تابع $y = f(x)$ دو شرط زیر را داشته باشد، آن را **متناوب** گویند.

الف) هرگاه عدد مثبتی مانند c وجود داشته باشد، به طوری که وقتی x عضو دامنه باشد، آنگاه $x + c$ نیز عضو دامنه است.

$$x \in D_f \xrightarrow{\exists c > 0} (x + c) \in D_f$$

$$f(x + c) = f(x) \quad \text{ب)}$$

در این صورت کمترین مقدار مثبت c را با T نمایش می دهیم و آن را دوره‌ی تناوب (دوره‌ی تناوب اصلی) می نامیم.

مثال : نشان دهید که توابع زیر متناوب هستند.

الف) $f(x) = \sin x$

ب) $f(x) = \cos x$

حل :

الف : واضح است که برای هر عدد صحیح k تساوی $\sin(2k\pi + x) = \sin x$ برقرار است. لذا می توان

$$\text{نوشت } f(2k\pi + x) = f(x)$$

پس طبق تعریف، این تابع متناوب است و دوره‌ی تناوب آن به ازای $k = 1$ برابر $T = 2\pi$ است.

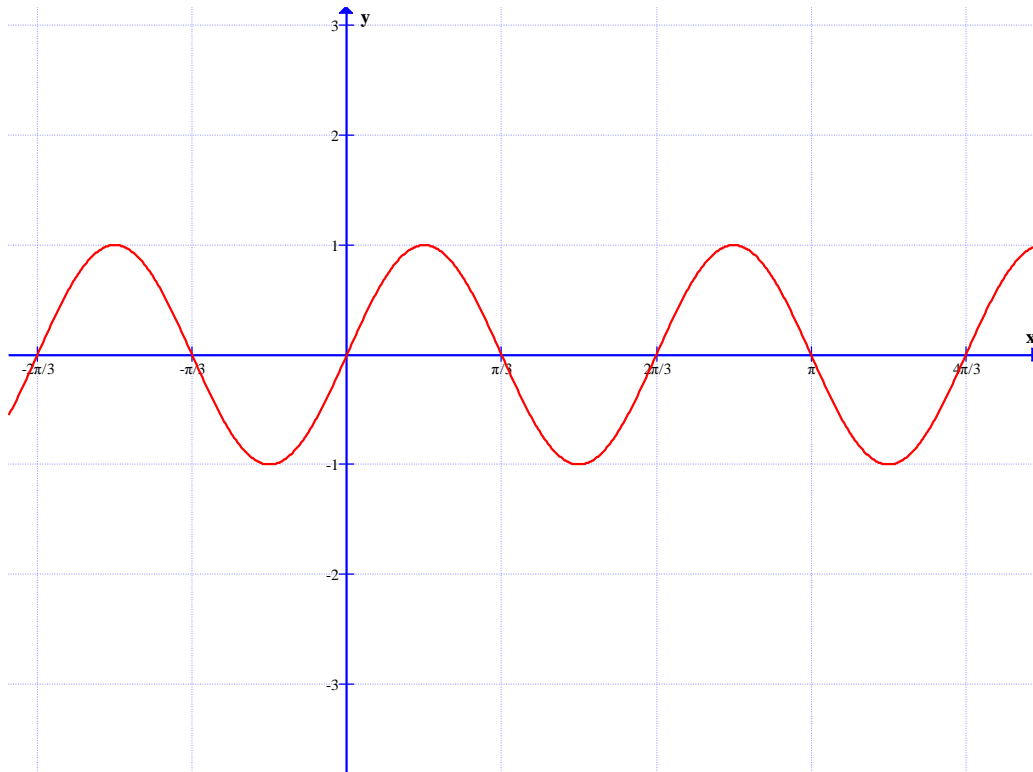
ب : واضح است که برای هر عدد صحیح k تساوی $\cos(2k\pi + x) = \cos x$ برقرار است. لذا می توان

$$\text{نوشت } f(2k\pi + x) = f(x)$$

پس طبق تعریف این تابع متناوب است و دوره‌ی تناوب آن به ازای $k = 1$ برابر $T = 2\pi$ است.

تمرین ۳ : در زیر نمودار تابع $f(x) = \sin 3x$ را رسم شده است. دوره‌ی تناوب آن را به کمک نمودار

تعیین کنید.



تمرین ۴ :

- الف : ثابت کنید که تابع $f(x) = 2\sin x$ متناوب است. دوره‌ی تناوب اصلی آن را بدست آورید.
 ب : مقدار ماکزیمم و می نیمم این تابع را تعیین کنید.

تمرین ۵ :

- الف : ثابت کنید که تابع $f(x) = \cos 2x$ متناوب است. دوره‌ی تناوب اصلی آن را بدست آورید.
 ب : مقدار ماکزیمم و می نیمم این تابع را تعیین کنید.

توجه : برای توابع $f(x) = a\cos bx + c$ و $f(x) = a\sin bx + c$ می توان گفت که :

الف : مقدار ماکزیمم برابر $|a| + c$ ب : مقدار می نیمم برابر $-|a| + c$

پ : دوره‌ی تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$

مثال : مقدار ماکزیمم و مقدار می نیمم و دوره‌ی تناوب تابع به معادله‌ی $f(x) = -3\cos 2x + 5$ را تعیین کنید.

حل:

$$\text{مقدار ماگزیمم } |a| + c = |-3| + 5 = 8$$

$$\text{مقدار می نیمم } -|a| + c = -|-3| + 5 = 2$$

$$\text{دوره‌ی تناوب } T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

مثال: معادله‌ی یک تابع سینوسی را بنویسید که مقدار ماگزیمم آن ۱- و مقدار می نیمم آن ۷- و دوره‌ی تناوب آن 4π باشد.

حل:

$$f(x) = a \sin bx + c \quad \text{مقدار ماگزیمم } |a| + c = -1 \quad \text{مقدار می نیمم } -|a| + c = 7$$

با توجه به دو تساوی فوق می توان نتیجه گرفت که $2c = -8$ پس $c = -4$ لذا:

$$|a| - 4 = -1 \rightarrow |a| = 3 \rightarrow a = \pm 3$$

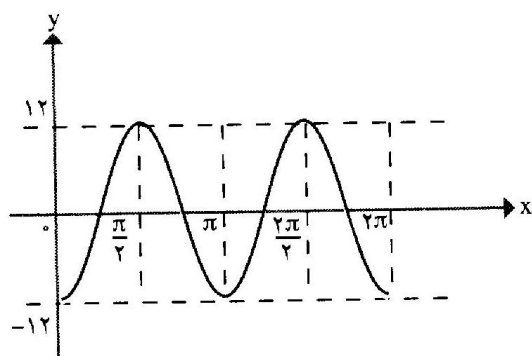
$$\text{دوره‌ی تناوب } T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

پس می توان گفت که این تابع به یکی از شکل های زیر است.

$$f(x) = 3 \sin \frac{1}{2}x - 4 \quad \text{یا} \quad f(x) = -3 \sin \frac{1}{2}x - 4$$

مثال: معادله‌ی یک تابع (سینوسی یا کسینوسی)

برای نمودار زیر بنویسید.



حل: این تابع یک تابع کسینوسی است و معادله‌ی آن

به صورت $y = a \cos bx$ خواهد بود.

از طرفی با توجه شکل معلوم است که دوره‌ی تناوب

تابع برابر $T = \pi$ است. از طرفی برای این تابع

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \text{ است. پس}$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi \rightarrow |b| = 2 \rightarrow b = \pm 2$$

برای تعیین مقدار a کافی است مختصات یک نقطه از نمودار تابع را در معادله‌ی فوق، جایگزین کنیم. در این جا می‌توان، نقطه‌ی $(0, -12)$ را در نظر گرفت

$$y = a \cos bx \xrightarrow{(0, -12)} -12 = a \cos b(0) \rightarrow -12 = a \times 1 \rightarrow a = -12$$

در نهایت معادله‌ی تابع را بدین شکل خواهیم داشت.

$$y = -12 \cos 2x$$

تمرین برای حل :

۶: دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و می نیمم هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

۱) $y = 3 \sin(2x) - 2$

۵) $y = 1 + 2 \sin 7x$

۲) $y = \pi \sin(-x) + 1$

۶) $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x$

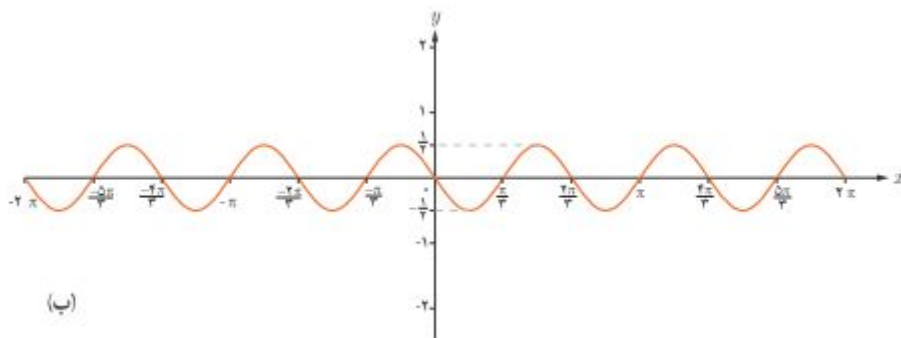
۳) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

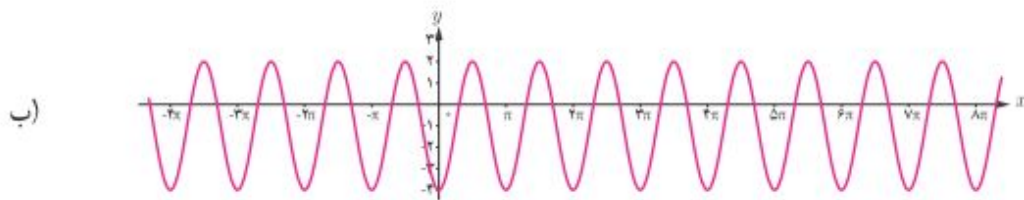
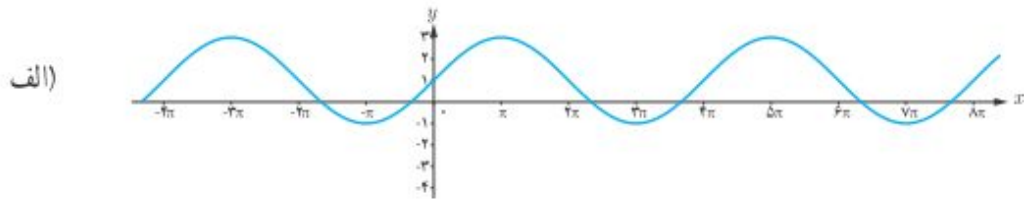
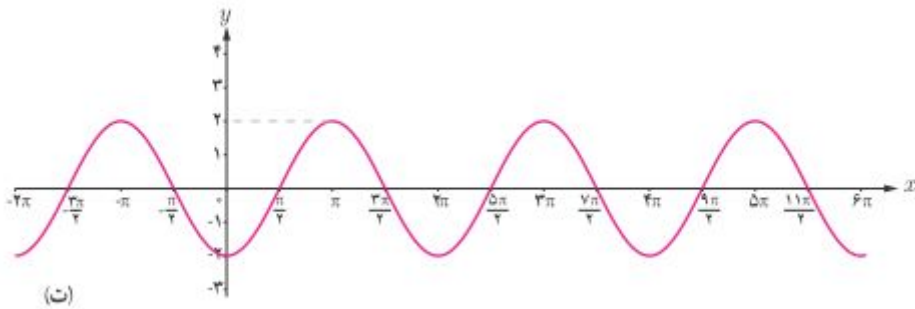
۷) $y = -\pi \sin \frac{1}{2}(x - 2)$

۴) $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

۸) $y = -\frac{3}{4} \cos 3x$

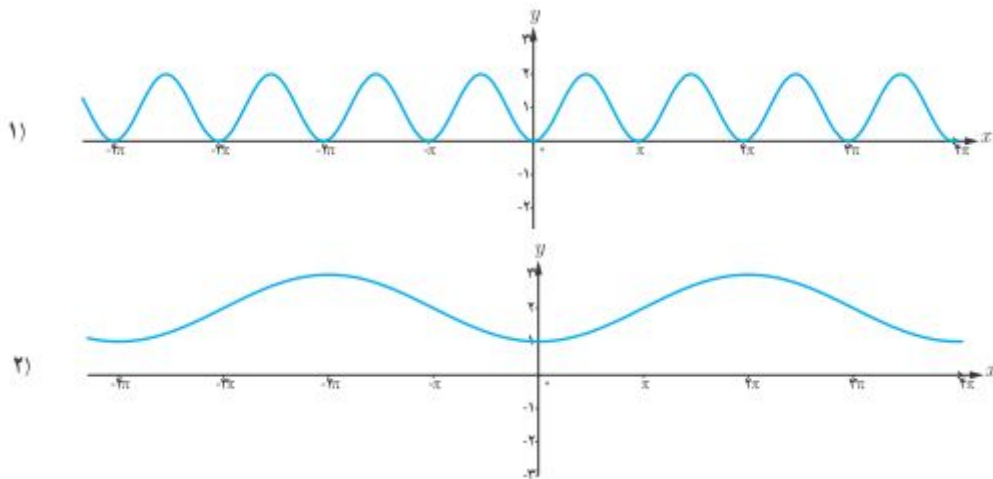
۷: معادله‌ی یک تابع (سینوسی یا کسینوسی) متناظر با هر یک از نمودار های زیر بنویسید.

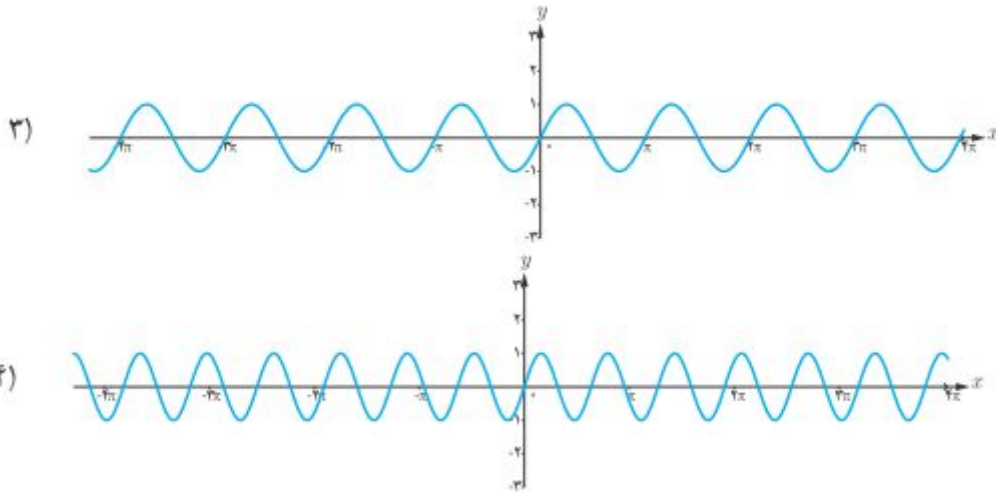




۸: هر یک از توابع زیر را به یکی از نمودارهای داده شده نظیر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$ ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{2} x$ پ) $y = \sin 2x$ ت) $y = 1 - \cos 2x$





۹: برای هر مورد با مشخصات داده شده یک تابع مثلثاتی معرفی کنید.

الف) $T = \pi$ و $\max = 3$ و $\min = -3$

ب) $T = 3$ و $\max = 9$ و $\min = 3$

پ) $T = 4\pi$ و $\max = -1$ و $\min = -7$

ت) $T = \frac{\pi}{2}$ و $\max = 1$ و $\min = -1$

۱۰: دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y = \sin \frac{3x}{m+1}$ برابر 5π است. مقدار m را بیابید.

تهیه کننده: جابر عامری، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

کانال تلگرامی:

@mathameri

سایت:

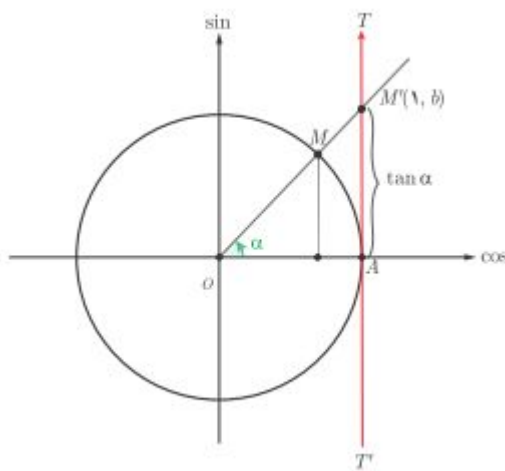
www.mathtower.ir

درس دوم : تابع تانژانت

در سال گذشته با توابع سینوس و کسینوس و خواص آنها آشنا شده‌اید. در این درس تابع تانژانت را معرفی و ویژگی‌های آن را بیان می‌کنیم.

تابع تانژانت

دایره‌ی مثلثاتی روبرو را در نظر بگیرید. در این دایره خط TAT' در نقطه‌ی A بر محور کسینوس عمود



است. اگر نقطه‌ی A مبدأ این محور و جهت آن از

پایین به بالا فرض شود، طبق تعریف تانژانت می‌دانیم

که $\tan(\alpha) = AM'$ و با توجه به مختصات نقطه-

ی M' می‌توان نوشت: $\tan(\alpha) = b$

با این دید می‌توان گفت که با تغییر زاویه‌ی α

مقدار $\tan(\alpha)$ نیز تغییر می‌کند. لذا می‌توان گفت که

تابع $f(x) = \tan(x)$ از زاویه‌ی α است. این تابع

را **تابع تانژانت** می‌نامند. تابع تانژانت دارای ویژگی‌های زیر است.

الف : اگر زاویه‌ی α در ربع اول یا سوم باشد، مقدار تابع مثبت است.

ب : اگر زاویه‌ی α در ربع دوم یا چهارم باشد، مقدار تابع منفی است.

ج : اگر زاویه‌ی α برابر صفر یا π رادیان باشد، مقدار تابع صفر است.

د : تابع در نقاط $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ تعریف نمی‌شود. به طور کلی دامنه و برد تابع تانژانت به شکل زیر است.

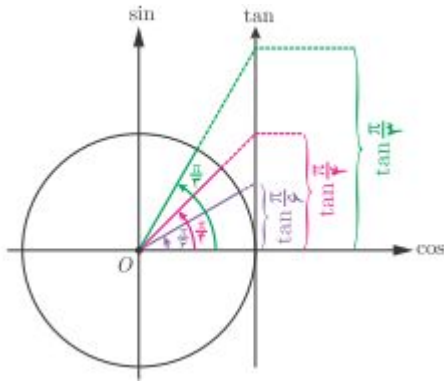
$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$R_f = \mathbb{R}$$

و : چون $\tan(\pi + x) = \tan(x)$ پس این تابع متناوب است و دوره‌ی تناوب آن $T = \pi$ می‌باشد.

به طور کلی دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = a \tan(bx) + c$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است.

تغییرات تانژانت



با افزایش مقدار α در ربع اول مقدار تابع افزایش می‌یابد. با نزدیک شدن مقدار α به $\frac{\pi}{2}$ مقدار تابع زیاد و زیادتر می‌شود.

تمرین ۱: با افزایش مقدار α در ربع های دوم و سوم و چهارم، روند تغییر مقدار تابع $f(x) = \tan(\alpha)$ را بررسی کنید.

تمرین ۲: نمودار تابع $f(x) = \tan(\alpha)$ را در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

تمرین ۳: درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.

الف : تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.

ب : می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی است.

پ : می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی است.

ت : تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

ث : اگر α زاویه ای در ربع اول دایره‌ی مثلثاتی باشد، در این صورت $\tan(\alpha) < \sin(\alpha)$

حل :

الف : نادرست ب : نادرست پ : درست ت : درست ث : نادرست

تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه

در این قسمت در پی آن هستیم رابطه‌هایی برای محاسبه‌ی تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه بیان کنیم. به کمک روابطی که در سال گذشته برای سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل دو زاویه داشتیم می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} \\ &= \frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} \end{aligned}$$

همچنین

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan(\alpha + (-\beta)) = \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha \cdot \tan(-\beta)} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\text{الف) } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} \quad \text{ب) } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

مثال : تانژانت زاویه‌ی ۷۵ درجه را حساب کنید.

حل :

$$\tan 75^\circ = \tan(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \times \tan 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - (\frac{\sqrt{3}}{3} \times 1)} = \frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

تمرین برای حل :

۴ : تانژانت زاویه‌ی ۱۵ درجه را حساب کنید.

۵ : اگر $\tan(a + b) = 2$ و $\tan(a - b) = 3$ باشد. مقدار $\tan(2a)$ را به دست آورید.

درس سوم : معادلات مثلثاتی

در این درس به تعریف ، بررسی و حل معادلات مثلثاتی می پردازیم و به کاربردهایی برای آنها نیز اشاره می کنیم.

معادله‌ی مثلثاتی

هر معادله که شامل نسبت های مثلثاتی باشد را معادله‌ی مثلثاتی می نامند. در هر معادله‌ی مثلثاتی، اطلاعاتی از نسبت های مثلثاتی یک زاویه‌ی مجهول را داریم و منظور از حل معادله‌ی مثلثاتی، یافتن زاویه یا زاویه هایی است که به ازاء آنها تساوی برقرار باشد. به مثال های زیر از یک معادله‌ی جبری و معادله‌ی مثلثاتی توجه کنید.

الف : معادله‌ی جبری

$$2x - 1 = 0$$

حل :

$$2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

ب : معادله‌ی مثلثاتی

$$2 \sin x - 1 = 0$$

حل :

$$2 \sin x = 1 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

بیشمار زاویه وجود دارند که سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ می شود. ولی کوچکترین زاویه‌ی مثبت از بین آنها $\frac{\pi}{6}$ است.

برای تعیین زاویه های دیگر می نویسیم.

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

این جواب را **جواب عمومی** معادله می نامند که در آن k یک عدد صحیح است. در واقع با اختیار مقداری

برای k یک جواب برای معادله‌ی مثلثاتی به دست می آید.

برای حل هر معادله‌ی مثلثاتی باید ابتدا با انجام عملیاتی^۱ آن را به یکی از صورت های زیر تبدیل کرد و جواب عمومی آن را تعیین کرد.

ردیف	صورت معادله	شرط داشتن جواب	یافتن زاویه	جواب
۱	$\sin(u) = a$	$-1 \leq a \leq 1$	$\sin(u) = \sin \alpha$	$u = 2k\pi + \alpha$ $u = (2k + 1)\pi - \alpha$
۲	$\cos(u) = b$	$-1 \leq b \leq 1$	$\cos(u) = \cos \alpha$	$u = 2k\pi + \alpha$ $u = 2k\pi - \alpha$
۳	$\tan(u) = c$	-	$\tan(u) = \tan \alpha$	$u = k\pi + \alpha$
۴	$\cot(u) = d$	-	$\cot(u) = \cot \alpha$	

تذکر: با توجه به این جدول

(۱) اگر مقادیر c و a منفی باشد، در فرمول جواب قرینه‌ی زاویه‌ی α را قرار دهید.

(۲) اگر مقادیر d و b منفی باشد، در فرمول جواب مکمل زاویه‌ی α را قرار دهید.

(۳) α کوچکترین زاویه‌ی غیر منفی است که تساوی به ازاء آن برقرار می باشد و آنرا **زاویه‌ی اصلی** می نامند.

برای تعیین زاویه‌ی اصلی در صورت وجود می توانید از جدول مقادیر نسبت های مثلثاتی استفاده کنید و در غیر این صورت می توانید به ذکر α اکتفا کنید.

مثال ۱: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0$$

حل:

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0 \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

مثال ۲: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2 \cos x - 1 = 0$$

حل:

^۱ رایج ترین این عملیاتی، استفاده از فرمول های مثلثاتی و فاکتور گیری است. این عملیات به دو منظور بکار می روند.
الف: یکسان سازی نسبت های مثلثاتی
ب: یکسان سازی زاویه‌ی مثلثاتی

$$\cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{3}} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

مثال ۳: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\tan x - \sqrt{3} = 0$$

حل:

$$\tan x = \sqrt{3} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{3}} x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

مثال ۴: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2 \cos x + \sqrt{3} = 0$$

حل:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

مثال ۵: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$3 \tan x + \sqrt{3} = 0$$

حل:

$$\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\alpha = -\frac{\pi}{6}} x = k\pi - \frac{\pi}{6}$$

مثال ۶: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin 3x - 1 = 0$$

حل:

$$\sin 3x = 1 \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{2}} \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

مثال ۷: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\tan x = \tan \delta x$$

حل:

$$\tan \underbrace{x}_u = \tan \underbrace{\Delta x}_\alpha \rightarrow x = k\pi + \Delta x \rightarrow -\Delta x = k\pi \rightarrow x = -\frac{k\pi}{\Delta}$$

مثال ۸: معادله‌ی $\tan 4x \cdot \tan 3x = 1$ را حل کنید.

حل:

$$\tan 4x \cdot \tan 3x = 1 \rightarrow \tan 4x = \frac{1}{\tan 3x} \rightarrow \tan 4x = \cot 3x \rightarrow \tan \underbrace{4x}_u = \tan \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)}_\alpha$$

$$\rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 3x \rightarrow 7x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{7} + \frac{\pi}{14}$$

مثال ۹: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos 2x = 0$$

حل:

$$\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 2x \rightarrow \sin \underbrace{\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)}_u = \sin \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}_\alpha$$

لذا می توان نوشت:

$$x - \frac{2\pi}{3} = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \xrightarrow{\times 6} 6x - 4\pi = 12k\pi + 3\pi - 12x \rightarrow x = \left(\frac{12k + 7}{18}\right)\pi$$

همچنین:

$$x - \frac{2\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \xrightarrow{\times 6} 6x - 4\pi = 12k\pi + 6\pi - 3\pi + 12x \rightarrow x = \left(\frac{12k + 7}{-6}\right)\pi$$

مثال ۱۰: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\tan x \cdot \tan 2x = 1$$

حل:

$$\tan x \cdot \tan 2x = 1 \rightarrow \tan 2x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan 2x = \cot x \rightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\rightarrow 2x = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

توجه داشته باشید که این معادله به ازای برخی از مقادیر بدست آمده برقرار نیست. مثلاً به ازای $k = 1$ به

$$\text{دست می‌آید، } x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ که جواب معادله نیست.}$$

حالت‌های خاص معادلات مثلثاتی

علاوه بر جدول کلی فوق در حل معادلات مثلثاتی می‌توان از حالت‌های خاص زیر نیز استفاده نمود.

$\sin(u) = 1 \rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\cos(u) = 0 \rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin(u) = 0 \rightarrow u = k\pi$	$\cos(u) = -1 \rightarrow u = 2k\pi + \pi$
$\sin(u) = -1 \rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	$\tan(u) = 0 \rightarrow u = k\pi$
$\cos(u) = 1 \rightarrow u = 2k\pi$	$\cot \varphi(x) = 0 \rightarrow \varphi(x) = k\pi + \frac{\pi}{2}$

مثال ۱: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin 2x - 1 = 0$$

حل:

$$\sin 2x = 1 \xrightarrow{\text{ح.ح}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

مثال ۲: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin^2 x + \sin x = 0$$

حل:

$$\sin x(\sin x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{ح}} x = k\pi \\ \sin x = -1 \xrightarrow{\text{ح}} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

مثال ۳: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$$

حل:

$$(\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \xrightarrow{\text{ح}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

مثال:

الف: تساوی مقابل را ثابت کنید.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

ب: به کمک تساوی فوق، معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin x + \cos x = 1$$

حل:

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

یادآوری: دو تساوی مهم و مفید را به خاطر داشته باشید.

$$\text{الف) } \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{ب) } \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

توجه: به کمک جواب عمومی می‌توانید، مجموعه‌ی جواب‌های معادله را در یک محدوده‌ی مشخص را نیز

تعیین کرد. برای این کار مقدار مختلف برای k اختیار کنید.

مثال ۱: معادله‌ی زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب‌های آن را در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ را تعیین کنید.

$$2\sin 2x - 1 = 0$$

حل:

$$2 \sin 2x - 1 = 0 \rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} & (1) \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} & (2) \end{cases}$$

اکنون برای هر یک از جواب‌های عمومی بدست آمده، جدولی مشابه جدول زیر تنظیم می‌کنیم و با انتخاب مقادیر مختلف برای k ، جواب‌های مورد نظر در محدوده‌ی داده شده را تعیین می‌کنیم.

k	۰	۱	۲
θ	$\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$	$\frac{13\pi}{12}$ و $\frac{17\pi}{12}$	بیش از حد مجاز

لذا مجموعه‌ی جواب در فاصله‌ی داده شده برابر $\left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \right\}$

مثال ۲: معادله‌ی زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب‌های آن را در فاصله‌ی $[-2\pi, 2\pi]$ را تعیین کنید.

$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$$

حل:

$$1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow \sin^2 x + \sin x = \frac{3}{4} \rightarrow 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$$

$$\Delta = (4)^2 - 4(4)(-3) = 64 \rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-4+8}{8} = \frac{1}{2} & (1) \\ \sin x = \frac{-4-8}{8} = -\frac{3}{2} & \text{غ م} \end{cases}$$

اکنون معادله‌ی (۱) را به شکل زیر ادامه می‌دهیم.

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

k	-۲	-۱	۰	۱
θ	کمتر از حد مجاز	$-\frac{11\pi}{6}$ و $-\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$	بیش از حد مجاز

لذا مجموعه‌ی جواب در فاصله‌ی داده شده برابر $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6} \right\}$

تمرین برای حل:

۱: معادله های زیر را حل کنید.

$$۱-۱) ۲ \sin x + ۱ = ۰$$

$$۱-۶) \sin x = \sin ۲x$$

$$۱-۲) \sin \frac{\pi}{۲} = \sin ۳x$$

$$۱-۷) \sin ۵x = \cos x$$

$$۱-۳) ۲ \sin x - \sqrt{۳} = ۰$$

$$۱-۸) \sin x - \cos x = ۰$$

$$۱-۴) ۴ \sin x + \sqrt{\lambda} = ۰$$

$$۱-۹) \tan(۲x + ۱) = ۰$$

$$۱-۵) ۲ \cos ۳x - \sqrt{۲} = ۰$$

$$۱-۱۰) \tan ۳x = \tan x$$

۲: معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) \sin x \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$۲) \cos^2 x - ۳ \cos x = ۰$$

$$۲) \sin ۲x + ۲ \sin^2 x = ۰$$

$$۳) \cos x(۲ \cos x - ۹) = ۵$$

۳: معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) \cos x = \cos ۲x$$

$$۵) \sin x - \cos ۲x = ۰$$

$$۲) \tan x = \tan ۵x$$

$$۶) \sin ۲\theta + \sqrt{۲} \cos \theta = ۰$$

$$۳) \sin x - \cos x = ۱$$

$$۷) \tan x - \cot x = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

$$۴) \cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$$

$$۸) \sin x + \cos x = ۱$$

۴: مجموعه ای جواب معادله ای زیر را در فاصله $[۰, ۲\pi]$ بدست آورید.

$$\cos ۲x - \sin x = ۰$$

۵: مجموعه ای جواب معادله ای زیر را در فاصله $[-\pi, \pi]$ بدست آورید.

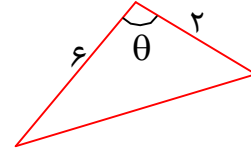
$$۲ \cos^2 x - ۳ \cos x + ۱ = ۰$$

حل چند تمرین کاربردی برای معادلات مثلثاتی

۱: آیا می‌توان مثلثی رسم کرد که طول دو ضلع آن ۲ و ۶ سانتی متر باشد و مساحت آن ۳ سانتی متر مربع شود. مسئله چند جواب دارد؟

حل: فرض کنیم که چنین مثلثی وجود داشته باشد. لذا

$$S = 3 \xrightarrow{\cdot < \theta < \pi} \frac{1}{2}(2)(6) \sin \theta = 3 \rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}$$



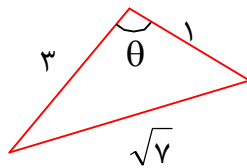
$$\alpha = \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \theta = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

حال مقدار θ مجاز را تعیین می‌کنیم.

k	\cdot	۱	۲
θ	$\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$	بیش از حد مجاز	بیش از حد مجاز

لذا دو مثلث با چنین شرایطی (زاویه‌های داخلی هر مثلث مثبت و کمتر از ۱۸۰ درجه) وجود دارد.
۲: در مثلثی طول اضلاع آن ۱ و ۳ و $\sqrt{7}$ است. زاویه‌ی روبروی ضلع به طول $\sqrt{7}$ چقدر است؟

حل:



$$\cdot < \theta < \pi$$

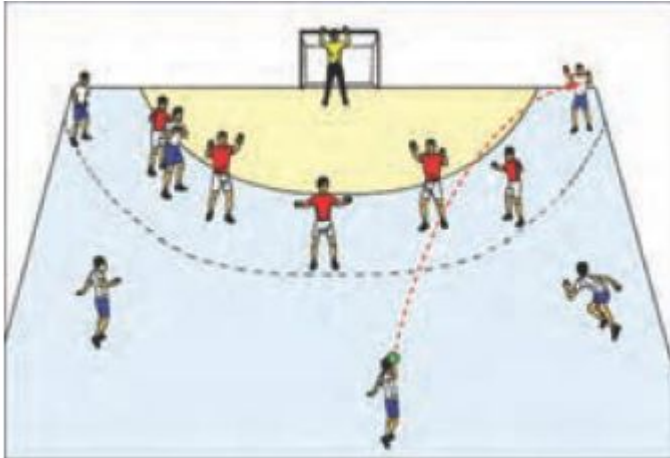
$$(\sqrt{7})^2 = (1)^2 + (3)^2 - 2(1)(3) \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \rightarrow \begin{cases} \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ \theta = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

حال مقدار θ مجاز را تعیین می‌کنیم.

k	\cdot	۱	۲
θ	$\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$	بیش از حد مجاز	بیش از حد مجاز

لذا یک مثلث با چنین شرایطی وجود دارد و در آن $\theta = \frac{\pi}{3}$ می‌باشد.



۳: یک بازیکن هندبال، توپ را با سرعت ۱۶ متر بر ثانیه برای هم تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می کند. اگر رابطه‌ی بین سرعت توپ (v) بر حسب متر بر ثانیه، مسافت طی شده افقی (d) بر حسب متر (و زاویه‌ی پرتاب (θ) به صورت زیر باشد. آنگاه زاویه‌ی پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$$

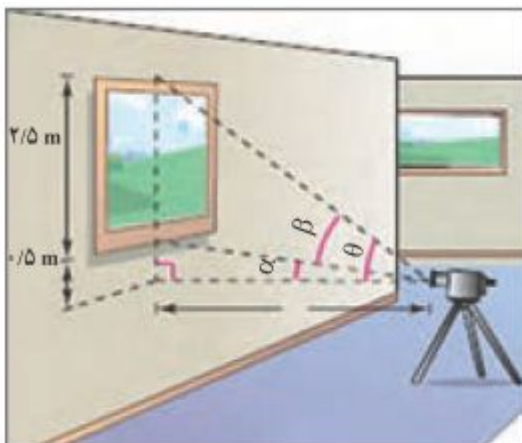
حل:

$$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{10} \rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 10}{256} = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ \theta = (2k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

k	•	۱	۲
θ	$\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$	بیش از حد مجاز	بیش از حد مجاز

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{12}$ می باشد.



۴: شکل مقابل، زاویه‌ی دید دوربین (β) با فاصله‌ی افقی آن با تابلو نقاشی را نشان می دهد.

اولاً: نشان دهید که رابطه‌ی بین زاویه‌ی دید دوربین (β) با فاصله‌ی افقی آن با تابلو نقاشی به صورت زیر است.

$$\tan \beta = \frac{5x}{2x^2 + 3}$$

ثانیاً: زاویه‌ی دید را در حالتی که فاصله‌ی افقی برابر یک متر است، به دست آورید.

حل: با توجه به شکل برای مثلث قائم الزاویه‌ی پایین شکل پایین داریم.

$$\tan \alpha = \frac{0.5}{x}$$

همچنین برای مثلث بزرگ که یک زاویه‌ی آن θ است، داریم:

$$\tan \theta = \frac{3}{x}$$

اکنون با استفاده از رابطه‌ی تفاضل زوایا برای تانژانت به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \tan \beta = \tan(\theta - \alpha) &= \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha} = \frac{\frac{3}{x} - \frac{0.5}{x}}{1 + \frac{3}{x} \times \frac{0.5}{x}} = \frac{\frac{2.5}{x}}{1 + \frac{1.5}{x^2}} = \frac{\frac{2.5}{x}}{\frac{x^2 + 1.5}{x^2}} \\ &= \frac{\frac{5}{2x}}{\frac{2x^2 + 3}{2x^2}} = \frac{5x}{2x^2 + 3} \end{aligned}$$

وقتی فاصله‌ی افقی برابر یک متر است، آنگاه:

$$\tan \beta = \frac{5(1)}{2(1)^2 + 3} = 1 \xrightarrow{\beta = \frac{\pi}{4}} \beta = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

لیکن با توجه به شکل، تنها جواب منطقی در حالت $k = 0$ است که در آن $\beta = \frac{\pi}{4}$ را به دست می‌دهد،

قابل قبول است.

تهیه کننده: جابر عامری، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

@mathameri

کانال تلگرامی:

www.mathtower.ir

سایت: