درس دوّم : بخش پذیری در اعداد صحیح

در این درس به بررسی مفهوم تقسیم پذیری در اعداد صحیح می پردازیم و به دنبال آن ویژگی های تقسیم پذیری و بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد صحیح را بررسی می کنیم. در نهایت نیز قضیه‌ی تقسیم و کاربرد آن و افزار مجموعه‌ی اعداد صحیح را بیان می کنیم.

تقسیم پذیری

اگر a و b دو عدد صحیح و $b \neq ۰$ گوییم a بر b بخشپذیر است، هرگاه عدد صحیحی مانند q وجود داشته باشد که $a = bq$ (یعنی باقی مانده‌ی تقسیم a بر b برابر صفر باشد.)

اگر a بر b بخشپذیر باشد، می نویسند $b \mid a$ و می خوانند b عدد a را عاد می کند.[1] (b عدد a می شمارد.)

همچنین اگر a بر b بخشپذیر نباشد، می نویسند $b \nmid a$

مثال :

۱: عدد صحیح ۲۴ بر ۶ بخش پذیر است، پس: $۶|۲۴$

۲: عدد صحیح ۵۰- بر ۵ بخش پذیر است، پس: $۵|-۵۰$

۳: عدد صحیح ۱۲ بر ۳- بخش پذیر است، پس: $-۳|۱۲$

۴: عدد صحیح ۳۰- بر ۱۰- بخش پذیر است، پس: $-۱۰|-۳۰$

۵: عدد صحیح ۲۵ بر ۶ بخش پذیر نیست، پس: $۶\nmid ۲۵$

تمرین ۱ : با توجه به تعریف عادکردن، جاهای خالی را کامل کنید.

الف) $۷ \mid ۶۳ \Leftrightarrow ۶۳ = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$

ب) $۹۱ = ۷ \times \ldots\ldots \Leftrightarrow \ldots\ldots \mid ۹۱$

پ) $-۶ \mid ۵۴ \Leftrightarrow ۵۴ = \ldots\ldots \times (-۶)$

ت) $۵ \mid -۳۵ \Leftrightarrow -۳۵ = ۵ \times \ldots\ldots$

ث) $۰ = ۱۸ \times \ldots\ldots \Leftrightarrow ۱۸ \mid \ldots\ldots$

ج) $a \mid ۱ \Leftrightarrow a = \ldots\ldots$ یا $a = \ldots\ldots$

چ) $۲۶ = ۲ \times ۱۳ \Rightarrow ۲ \mid \ldots\ldots$ و $\ldots\ldots \mid ۲۶$

[1] . اینکه صفر عدد صفر را می شمارد به عنوان قرار داد پذیرفته می شود.

تمرین۲ : نشان دهید که $۶^{۵۰۲}$ بر ۹ بخش پذیر است.

حل:

$$۶^{۵۰۲}=۶\times۶\times۶^{۵۰۰}=۳\times۲\times۳\times۲\times۶^{۵۰۰}=(۳\times۳)\times(\underbrace{۲\times۲\times۶^{۵۰۰}}_{q})=۹q\to۹|۶^{۵۰۲}$$

تمرین۳ : اگر n و m دو عدد طبیعی دلخواه و $m\leq n$ باشند. نشان دهید که $a^m\mid a^n$

حل : چون $m\leq n$ پس واضح است که $a^n=a^m\times a^{n-m}$ و این یعنی وجود دارد عدد صحیح q که

$a^n=a^m\times q$. لذا $a^m\mid a^n$

مثال :

$$۳^۹=۳^۵\times۳^۴\to۳^۹=۳^۵\times۳^۴\xrightarrow{۳^۴=q}۳^۹=۳^۵\times q\to۳^۵\mid۳^۹$$

تمرین۴ : برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید که $۳|۲^{۳n}-۵^n$

حل:

$$۲^{۳n}-۵^n=۸^n-۵^n=(۸-۵)q=۳q\to۳|۲^{۳n}-۵^n$$

تمرین۵ : ثابت کنید که $۳^{۵۲}-۲^{۳۹}$ بر ۷۳ بخش پذیر است.

حل:

$$۳^{۵۲}-۲^{۳۹}=(۳^۴)^{۱۳}-(۲^۳)^{۱۳}=(۸۱)^{۱۳}-(۸)^{۱۳}=(۸۱-۸)q=۷۳q\to۷۳\mid۳^{۵۲}-۲^{۳۹}$$

نتیجه : طبق تعریف عاد کردن در اعداد صحیح، به ازاء هر عدد صحیح a همواره داریم:

الف) $a\mid a$ ب) $-a\mid a$ ج) $\pm۱\mid a$ د) $a\mid۰$

***

ویژگی های رابطه‌ی عاد کردن

ویژگی ۱ : اگر a عدد b را بشمارد،آنگاه هر مضرب صحیح bرا نیز می شمارد. یعنی اگر $a\,|\,b$ آنگاه $a\,|\,mb$ که در آن m عدد صحیح می باشد.

اثبات:

$$a\,|\,b \xrightarrow{\exists k \in Z} b = ak \to mb = mak \to mb = a(mk)$$
$$\xrightarrow{mk=q} mb = aq \to a\,|\,mb$$

برای مثال، چون ۶ | ۳ آنگاه ۶ × ۵ | ۳

نتیجه: اگر a عدد b را بشمارد، آنگاه ثابت می شود که

الف : عدد a عدد $b^۲$ را می شمارد

ب : در حالت کلی عدد a عدد b^n را نیز می شمارد. (n عدد طبیعی)

اثبات: چون $a\,|\,b$ طبق ویژگی فوق $a\,|\,mb$ که در آن m عدد صحیح می باشد.

حال اگر قرار دهیم $m = b$ بدست می آید $a\,|\,b^۲$

همچنین اگر قرار دهیم $m = b^{n-۱}$ بدست می آید $a\,|\,b^n$

تمرین ۶ : ثابت کنید، اگر $a\,|\,b$ آنگاه $a\,|\,-b$

اثبات :

$$a\,|\,b \to a\,|\,mb \xrightarrow{m=-۱} a\,|\,-b$$

ویژگی ۲ : هرگاه یک عدد صحیح ، دو عدد صحیح دیگر را بشمارد، مجموع ، تفاضل و حاصل ضرب آنها را می شمارد. به عبارت دیگر ، اگر $a\,|\,b$ و $a\,|\,c$ در این صورت ثابت کنید که:

الف: $a\,|\,b+c$ ب: $a\,|\,b-c$ ج: $a\,|\,bc$

اثبات: مجموعه‌ی اعداد صحیح نسبت به اعمال جمع، تفریق و ضرب بسته است. یعنی مجموع ، تفاضل و حاصل ضرب هر دو عدد صحیح ، عددی صحیح می باشد. پس می توان نوشت:

الف :

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b=aq_1 \\ a|c \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} c=aq_2 \end{cases}$$

$$\to b+c=aq_1+aq_2 \to b+c=a(q_1+q_2) \xrightarrow{q=q_1+q_2} b+c=aq \to a|b+c$$

ب:

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b=aq_1 \\ a|c \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} c=aq_2 \end{cases}$$

$$\to b-c=aq_1-aq_2 \to b-c=a(q_1-q_2) \xrightarrow{q=q_1-q_2} b-c=aq \to a|b-c$$

ج:

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b=aq_1 \\ a|c \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} c=aq_2 \end{cases}$$

$$\to bc=(aq_1)(aq_2) \to bc=a(aq_1q_2) \xrightarrow{q=aq_1q_2} bc=aq \to a|bc$$

توجه کنید که :

الف : اگر $a|b+c$ نمی توان نتیجه گرفت که $a|c$ یا $a|b$

برای مثال $2|5+3$ ولی $2\nmid 3$ و $2\nmid 5$

ب : اگر $a|bc$ نمی توان نتیجه گرفت که $a|c$ یا $a|b$

برای مثال $6|3\times 4$ ولی $6\nmid 3$ و $6\nmid 4$

تمرین۷ : ثابت کنید که اگر $a|b$ و k یک عدد صحیح غیر صفر باشد، آنگاه $ka|kb$ و برعکس

اثبات :

حالت اوّل

$$a|b \xrightarrow{k\in Z\ ,\ k\neq 0} ka|kb \quad ?$$

$$a|b \xrightarrow{q\in Z} b=aq \xrightarrow{\times k} kb=kaq \to ka|kb$$

حالت دوّم

$$ka|kb \xrightarrow{k\in Z\ ,\ k\neq 0} a|b \quad ?$$

$$ka|kb \xrightarrow{\exists q\in Z} kb = kaq \to k(b-aq) = 0$$

$$\xrightarrow{k\neq 0} b-aq = 0 \to b = aq \to a|b$$

تمرین۸ : ثابت کنید، اگر $a|b$ آنگاه $-a|-b$

اثبات :

$$a|b \xrightarrow{\exists k\in Z} ka|kb \xrightarrow{k=-1} -a|-b$$

تمرین۹ : اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه $a|mb+nc$ که در آن n و m عدد صحیح می باشند.

اثبات:

$$\begin{cases} a|b \to a|mb \\ a|c \to a|nc \end{cases} \to a|mb+nc$$

توجه کنید که

الف : این خاصیت برای تفریق نیز برقرار است. یعنی اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه $a|mb-nc$

ب : این خاصیت را می توان به شکل زیر تعمیم داد.

$$\begin{cases} a|b_1 \to a|m_1b_1 \\ a|b_2 \to a|m_2b_2 \\ a|b_3 \to a|m_3b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a|b_n \to a|m_nb_n \end{cases} \to a|m_1b_1+m_2b_2+m_3b_3+\ldots+m_nb_n$$

ویژگی۳ : اگر a عدد b را بشمارد و b عدد c را بشمارد، آنگاه a عدد c را می شمارد. یعنی اگر $a|b$ و $b|c$ آنگاه $a|c$ (خاصیت تعدی عادکردن)

حل:

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b = aq_1 \\ b|c \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} c = bq_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow c = (aq_1)q_2 \rightarrow c = a(q_1q_2) \xrightarrow{q=q_1q_2} c = aq \rightarrow a|c$$

تمرین ۱۰ : ثابت کنید، اگر $a|b$ آنگاه $-a|b$

اثبات :

$$\left.\begin{matrix} -a|a \\ a|b \end{matrix}\right\} \rightarrow -a|b$$

تمرین ۱۱ : اگر a عدد b را بشمارد، با استفاده از خاصیت تعدی عاد کردن، ثابت کنید که a عدد b^n را نیز می شمارد. (n عدد طبیعی)

اثبات : چون $a|b$ و $b|b^n$ پس $a|b^n$

توجه : اگر $a|b^n$ ($n \in N$) آنگاه نمی توان نتیجه گرفت که $a|b$

برای مثال واضح است که $4|100$ یعنی $4|10^2$ ولی $4\nmid 10$

ویژگی ۴ : اگر a عدد b را بشمارد و c عدد d را نیز بشمارد. آنگاه اگر ac نیز عدد bd را نیز می شمارد.

یعنی اگر $a|b$ و $c|d$ در این صورت ثابت کنید که: $ac|bd$

اثبات :

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b = aq_1 \\ c|d \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} d = cq_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow bd = (aq_1)(cq_2) \rightarrow bd = ac(q_1q_2) \xrightarrow{q=q_1q_2} bd = acq \rightarrow ac|bd$$

تمرین ۱۲ : برای دو عدد صحیح b و a و عدد طبیعی n ، ثابت کنید که اگر $a|b$ آنگاه $a^n|b^n$

اثبات:

$$a|b \xrightarrow{\exists k \in Z} b = ak \rightarrow (b)^n = (ak)^n \rightarrow b^n = a^nk^n$$

$$\xrightarrow{k^n = q \in Z} b^n = a^nq \rightarrow a^n|b^n$$

توجه : عکس تمرین فوق نیز برقرار است، یعنی اگر b و a دو عدد صحیح و n یک عدد طبیعی باشد، از اینکه $a^n | b^n$ نتیجه می شود که $a | b$

اثبات این موضوع خارج از اهداف کتاب است.

تمرین ۱۳ : اگر برای عدد صحیح k داشته باشیم $۵ | ۴k + ۱$. ثابت کنید $۲۵ | ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$

حل :

$$۵ | ۴k + ۱ \rightarrow (۵)^۲ | (۴k + ۱)^۲ \rightarrow ۲۵ | ۱۶k^۲ + ۸k + ۱ \qquad (۱)$$

$$۵ | ۴k + ۱ \xrightarrow{\times ۵} ۲۵ | ۲۰k + ۵ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۲۵ + ۵ | (۱۶k^۲ + ۸k + ۱) + (۲۰k + ۵) \rightarrow ۲۵ | ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$$

تمرین ۱۴ : آیا از اینکه $a | b$ و $c | d$ می توان نتیجه گرفت که $a + c | b + d$

حل : خیر نمی توان نتیجه گرفت. برای مثال $۳ | ۳$ و $۲ | ۴$ ولی $۲ + ۳ \nmid ۴ + ۳$

تمرین ۱۵: فرض کنید n و m دو عدد طبیعی و $m \leq n$ و $a,b \in Z$ ثابت کنید که اگر $a | b$ آنگاه $a^m | b^n$

$$a | b \rightarrow a^m | b^m \rightarrow a^m | b^{n-m} \times b^m \rightarrow a^m | b^n$$

ویژگی ۵ : اگر $a | b$ و $b \neq ۰$، آنگاه $| a | \leq | b |$

اثبات : چون $a | b$ پس $b = aq$ ولی چون $b \neq ۰$ پس $q \neq ۰$ لذا باید $| q | > ۱$

اکنون دو طرف این نامساوی را در $| a |$ ضرب می کنیم. در این صورت خواهیم داشت.

$$۱ \leq | q | \rightarrow | a | \leq | a | \times | q | \rightarrow | a | \leq | aq | \rightarrow | a | \leq | b |$$

نتیجه : اگر $a | b$ و $b | a$ آنگاه $| a | = | b |$

اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} a | b \rightarrow | a | \leq | b | \\ b | a \rightarrow | b | \leq | a | \end{array}\right\} \rightarrow | a | = | b |$$

تمرین ۱۶ : اگر $a|۱$ ، آنگاه $a=\pm۱$

اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} ۱|a \\ a|۱ \end{array}\right\} \rightarrow |a|=۱ \rightarrow a=\pm۱$$

تمرین ۱۷ : اگر $a\neq ۰$ عدد صحیح و دو عدد $۷m+۶$ و $۶m+۵$ بر a بخش پذیر باشد. ثابت کنید:

$a=\pm۱$

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a|۷m+۶ \xrightarrow{\times ۶} a|۴۲m+۳۶ \\ a|۶m+۵ \xrightarrow{\times ۷} a|۴۲m+۳۵ \end{array}\right\} \rightarrow a|(۴۲m+۳۶)-(۴۲m+۳۵)$$
$$\rightarrow a|۱ \rightarrow a=\pm۱$$

تمرین ۱۸: اگر $a|۳n-۲$ و $a|-۴n+۳$ نشان دهید که $a=\pm۱$

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a|۳n-۲ \rightarrow a|۴(۳n-۲) \\ a|-۴n+۳ \rightarrow a|۳(-۴n+۳) \end{array}\right\}$$
$$\rightarrow a|۴(۳n-۲)+۳(-۴n+۳) \rightarrow a|۱۲n-۸-۱۲n+۹ \rightarrow a|۱ \rightarrow a=\pm۱$$

تمرین ۱۹ : اگر $a>۱$ و $a|۹k+۴$ و $a|۵k+۳$ ، ثابت کنید که a عددی اوّل است.

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a|۹k+۴ \xrightarrow{\times ۵} a|۴۵k+۲۰ \\ a|۵k+۳ \xrightarrow{\times ۹} a|۴۵k+۲۷ \end{array}\right\} \rightarrow a|(۴۵k+۲۷)-(۴۵k+۲۰) \rightarrow a|۷$$

و چون $a>۱$ پس a برابر ۷ (عددی اوّل) است.

توجه : اگر p یک عدد اوّل[2] باشد و a عددی طبیعی و $a|p$ در این صورت $a=۱$ یا $a=p$

تمرین ۲۰ : اگر عدد طبیعی a دو عدد $۹k+۷$ و $۷k+۶$ را عاد کند. ثابت کنید $a=۱$ یا $a=۵$

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a|۷k+۶ \xrightarrow{\times ۹} a|۶۳k+۵۴ \\ a|۹k+۷ \xrightarrow{\times ۷} a|۶۳k+۴۹ \end{array}\right\} \rightarrow a|(۶۳k+۵۴)-(۶۳k+۴۹)$$
$$\rightarrow a|۵ \rightarrow a=۵ \text{ یا } a=۱$$

---

[2] . هر عدد طبیعی بزرگتر از یک را اوّل گویند، هرگاه فقط بر یک و خودش بخش پذیر باشد. مانند: .... و ۱۱ و ۷ و ۵ و۳ و۲

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد (ب. م. م)

عدد صحیح c را مقسوم علیه (شمارنده‌ی) مشترک دو عدد صحیح a و b گوییم، هرگاه هم a و هم b بر آن بخش پذیر باشند. یعنی $c|b$ و $c|a$

مثلاً عدد ۴ مقسوم علیه مشترک ۱۶ و ۱۲ است، زیرا ۴|۱۶ و ۴|۱۲

تعریف : عدد طبیعی d را بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آنها مخالف صفر است، گوییم، هرگاه:

الف: d یک مقسوم علیه مشترک a و b باشد.

ب: هر مقسوم علیه مشترک دیگر a و b از d کوچکتر باشد.

به عبارت دیگر ب.م.م دو عدد a و b ، بزرگترین عدد طبیعی است که هم a و هم b بر آن بخش پذیر باشند.

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b را به صورت (a,b) یا d یا $a\prod b$ نمایش می دهند.

تمرین ۲۱ : مجموعه‌ی مقسوم علیه های دو عدد ۱۸و۱۲را نوشته و سپس (ب.م.م) این دو عدد را مشخص کنید.

حل:

مجموعه‌ی مقسوم علیه های ۱۸ $=\{\pm ۱,\pm ۲,\pm ۳,\pm ۶,\pm ۹,\pm ۱۸\}$

مجموعه‌ی مقسوم علیه های ۱۲ $=\{\pm ۱,\pm ۲,\pm ۳,\pm ۴,\pm ۶,\pm ۱۲\}$

مجموعه‌ی مقسوم علیه های مشترک $=\{\pm ۱,\pm ۲,\pm ۳,\pm ۶\}$

ب.م.م $d=(۱۲,۱۸)=۶$

نتیجه : عدد طبیعی d را بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b گویند، اگر وتنها اگر

۱: $d|a$ و $d|b$

۲: هرگاه $c|a$ و $c|b$ آنگاه $c\leq d$

برای مثال بزرگترین مقسوم علیه مشترک ۱۲ و ۱۸ عدد ۶ است و ۳ مقسوم علیه مشترک این دو عدد نیز هست. واضح است که ۳|۶ و ۳ ≤ ۶

تعریف : دو عدد صحیح b و a را نسبت به هم اوّل (متباین) گویند، هرگاه بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها یک باشد.

$$(a,b)=۱$$

برای مثال دو عدد ۷ و ۱۲ نسبت به هم اوّلند.

تمرین۲۲ : ثابت کنید که هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اوّلند.

حل : کافی است که ثابت کنیم، (ب م م) هر دو عدد صحیح متوالی برابر ۱ است. فرض کنیم کـه m یـک عدد صحیح و $(m,m+۱)=d$ لذا

$$\left.\begin{array}{l} d\mid m \\ d\mid m+۱ \end{array}\right\} \to d\mid m+۱-m \to d\mid ۱$$

و چون d عددی مثبت است لذا $d=۱$

تمرین۲۳ : ثابت کنید که هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اوّلند.

حل : کافی است که ثابت کنیم (ب م م) هر دو عدد صحیح متوالی برابر ۱ است. فرض کنیم که k یک عدد صحیح و $(۲k+۱,۲k+۳)=d$ لذا

$$\left.\begin{array}{l} d\mid ۲k+۱ \\ d\mid ۲k+۳ \end{array}\right\} \to d\mid (۲k+۳)-(۲k+۱) \to d\mid ۲$$

و چون d عددی مثبت و زوج نیست لذا $d=۱$

تمرین۲۴: اگر p و q دو عدد اوّل و $p\neq q$ باشد. ثابت کنید $(p,q)=۱$

اثبات: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که $(p,q)=d$ و $d\neq ۱$ باشد. بنابراین :

$$\left.\begin{array}{l} d\mid p \\ d\mid q \end{array}\right\} \xrightarrow{d\neq ۱} d=p\ ,\ d=q \to p=q$$

و با فرض مسئله تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و $d=۱$

***

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد (ک. م. م)

عدد صحیح c را مضرب مشترک دو عدد صحیح a و b گوییم، هرگاه هم بر a و هم بر b بخش پذیر باشند. یعنی $a|c$ و $b|c$

مثلاً عدد ۱۸ مضرب مشترک دو ۲ و ۳ است، زیرا ۲|۱۸ و ۳|۱۸

عدد طبیعی c را کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو عدد صحیح غیرصفر a و b می نامیم ، هرگاه

۱: c مضرب مشترک a و b باشد. یعنی $a|c$ و $b|c$

۲: اگر m یک مضرب طبیعی مشترک دیگر a و b باشد،آنگاه $c \leq m$

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد صحیح a و b را با $[a,b]$ یا c یا $a \coprod b$ نشان می دهیم.

تذکر: ک.م.م دو عدد صحیح a و b کوچکترین عدد صحیح مثبتی است که هم بر a و هم بر b بخشپذیر باشد.

تمرین ۲۵ : کوچکترین مضرب مشترک دو عدد ۴ و۶ را بدست آورید.

حل:

مضرب های ۴ $= \{۰, \pm ۴, \pm ۸, \pm ۱۲, \pm ۱۶, \pm ۲۰, \pm ۲۴, \pm ۲۸, \pm ۳۲, \pm ۳۶, \pm ۴۰, ...\}$

مضربهای ۶ $= \{۰, \pm ۶, \pm ۱۲, \pm ۱۸, \pm ۲۴, \pm ۳۰, \pm ۳۶, \pm ۴۲, ...\}$

مضربهای مشترک $= \{۰ , \pm ۱۲, \pm ۲۴ , \pm ۳۶ , ...\}$

ک.م.م $c = [۶,۴] = ۱۲$

تمرین ۲۶ : اگر b و a دو عدد صحیح باشند. با توجه به تعریف (ب م م) و (ک م م) ثابت کنید.

الف: اگر $a|b$ آنگاه $(a,b) = |a|$ ب: اگر $a|b$ آنگاه $[a,b] = |b|$

اثبات : کافی است در هر مورد نشان دهیم که شرایط (ب م م) یا (ک م م) برقرار است.

الف) ابتدا نشان می دهیم که $|a|$ یک مقسوم علیه مشترک b و a باشد.

$$|a| \,|\, a \xrightarrow{a|b} |a| \,|\, b$$

یعنی $|a|$ یک مقسوم علیه مشترک b و a است.

اکنون نشان می دهیم که هر مقسوم علیه مشترک دیگر بین دو عدد b و a از $|a|$ کوچکتر است. گیریم که عد مثبت m یک مقسوم علیه مشترک دو عدد b و a است. لذا

$$\left.\begin{matrix} m\mid a \\ m\mid b \end{matrix}\right\} \rightarrow |m| \le |a| \xrightarrow{m>0} m \le |a|$$

یعنی هر مقسوم علیه مشترک بین دیگر دو عدد b و a از $|a|$ کوچکتر است.

ب) ابتدا نشان می دهیم که $|b|$ یک مضرب مشترک b و a است.

$$b \mid |b| \xrightarrow{a|b} a \mid |b|$$

$|b|$ یک مضرب مشترک b و a است.

اکنون نشان می دهیم که هر مضرب مشترک دیگر بین دو عدد b و a از $|b|$ بزرگتر است. گیریم که عدد مثبت n یک مقسوم علیه مشترک دو عدد b و a است. لذا

$$\left.\begin{matrix} a\mid n \\ b\mid n \end{matrix}\right\} \rightarrow |b| \le |n| \xrightarrow{n>0} |b| \le n$$

یعنی هر مضرب مشترک بین دیگر دو عدد b و a از $|b|$ بزرگتر است.

مثال :

الف) $۶\mid ۱۸ \rightarrow \begin{cases} (۶,۱۸)=۶ \\ [۶,۱۸]=۱۸ \end{cases}$

ب) $-۵\mid ۲۰ \rightarrow \begin{cases} (-۵,۲۰)=۵ \\ [-۵,۲۰]=۲۰ \end{cases}$

ج) $-۳\mid -۱۲ \rightarrow \begin{cases} (-۳,-۱۲)=۳ \\ [-۳,-۱۲]=۱۲ \end{cases}$

تمرین ۲۷ : اگر p عددی اوّل باشد و $a \in Z$ و $p \nmid a$ ثابت کنید، $(p,a)=۱$

اثبات : فرض کنیم که $(p,a)=d$ و $d \neq ۱$ (فرض خلف) . پس طبق تعریف (ب م م) $d\mid p$ و $d\mid a$.

اکنون با توجه به اوّل بودن عدد p و فرض $d \neq ۱$ از $d\mid p$ نتیجه می شود که $d=p$

از طرفی داریم $d\mid a$ پس $p\mid a$ که با فرض مسئله تناقض دارد. لذا باید $d=۱$ باشد.

توجه : در تمرین فوق اگر p عدد اوّل نباشد. مسئله دیگر برقرار نیست. مثلاً: $۶ \nmid ۴$ ولی $(۴,۶)=۲$ که برابر یک نیست.

***

قضیه‌ی تقسیم

اگر a و b دو عدد صحیح و $b \neq ۰$ آنگاه اعداد صحیح و یکتای q و r وجود دارند، بطوری که:

$$a \,\big|\, \underline{b} \quad q \qquad\qquad a = bq + r \qquad\qquad ۰ \leq r < b$$

$$\frac{\cdots}{r}$$

عدد a را مقسوم و عدد b را مقسوم علیه، q خارج قسمت و r را باقی مانده گویند.[3]

مثال : عدد ۲۵ را بر ۷ تقسیم کنید و رابطه‌ی فوق را بررسی نمایید.

حل :

$$۲۵ \,\big|\, \underline{۷} \quad ۳, \quad \frac{\cdots}{۴} \qquad\qquad \begin{cases} ۲۵ = ۷(۳) + ۴ \\ ۰ \leq ۴ < ۷ \end{cases}$$

مثال : عدد ۲۵- را بر ۷ تقسیم کنید و رابطه‌ی فوق را بررسی نمایید.

حل :

$$-۲۵ \,\big|\, \underline{۷} \quad -۴, \quad \frac{\cdots}{۳} \qquad\qquad \begin{cases} -۲۵ = ۷(-۴) + ۳ \\ ۰ \leq ۳ < ۷ \end{cases}$$

تمرین۲۸: باقی مانده‌ی تقسیم عدد صحیح a بر ۷ برابر۶ است. باقی مانده‌ی تقسیم $۵a$ بر ۷ را به دست آورید.

حل :

$$a = ۷q + ۶ \xrightarrow{\times ۵} ۵a = ۷(۵q) + ۳۰ \rightarrow ۵a = ۷(۵q) + ۲۸ + ۲$$

$$\rightarrow ۵a = ۷(۵q + ۴) + ۲ \rightarrow ۵a = ۷k + ۲$$

$$\rightarrow r = ۲$$

تمرین۲۹ : اگر باقی مانده‌ی اعداد n و m بر ۱۷ به ترتیب ۵ و۳ باشد. در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد $۲m - ۵n$ بر ۱۷ را به دست آورید.

حل :

$$\begin{cases} m = ۱۷q_۱ + ۵ \\ n = ۱۷q_۲ + ۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۲m = ۱۷(۲q_۱) + ۱۰ \\ -۵n = ۱۷(-۵q_۲) - ۱۵ \end{cases}$$

[3] . این قضیه را بدون اثبات می پذیریم.

$$\rightarrow 2m-5n=17(2q_1-5q_2)-5$$

$$\rightarrow 2m-5n=17(2q_1-5q_2)-17+12$$

$$\rightarrow 2m-5n=17(\underbrace{2q_1-5q_2-1}_{q})+12$$

$$\rightarrow 2m-5n=17q+12$$

$$\rightarrow r=12$$

تمرین ۳۰ : اگر باقی مانده‌ی تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد. باقی مانده تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

حل :

$$a=7k_1+5 \xrightarrow{\times 8} 8a=56k_1+40 \qquad (1)$$

$$a=8k_2+7 \xrightarrow{\times 7} 7a=56k_2+49 \qquad (2)$$

اکنون با تفاضل روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت.

$$a=56k_1-56k_2-9 \rightarrow a=56k_1-56k_2-56+47$$

$$a=56(\underbrace{k_1-k_2-1}_{k})+47=56k+47$$

یعنی باقی مانده‌ی عدد a بر۵۶ برابر ۴۷ است.

تمرین ۳۱ : اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b \mid a+2$ در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد a^2+b^2+3 بر ۸ را بیابید.

حل: چون a عددی صحیح و فرد است، لذا وجود دارد یک عدد صحیح مانند n که $a=2n+1$. از طرفی چون $b \mid a+2$ پس $b \mid (2n+1)+2$ یا $b \mid 2n+3$. از اینجا معلوم می شود که b عددی فرد است. پس وجود دارد یک عدد صحیح مانند m که $b=2m+1$. در نهایت خواهیم داشت.

$$a^2+b^2+3=(2n+1)^2+(2m+1)^2+3=4n^2+4n+1+4m^2+4m+1+3$$

$$=4\underbrace{n(n+1)}_{2k_1}+4\underbrace{m(m+1)}_{2k_2}+5=8k_1+8k_2+5=8(k_1+k_2)+5=8k+5$$

یعنی باقی مانده‌ی عدد a^2+b^2+3 بر ۸ برابر۸ است.

***

افراز مجموعه‌ی اعداد صحیح به کمک قضیه‌ی تقسیم

می دانیم که در تقسیم هر عدد صحیح a بر عدد طبیعی b باقی مانده یک عدد حسابی کمتر از b می باشد. برای مثال در تقسیم هر عدد صحیح a بر ۵ باقی مانده یک عدد حسابی کمتر از ۵ می باشد. لذا یکی از حالت های زیر را خواهیم داشت :

اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر۵ برابر صفر است.(بخش پذیر بر ۵) **مثلاً:** ... و۱۰ و ۵ و ۰ و ۵- و ۱۰- و ...	$a=5k$
اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر ۵ برابر ۱ است. **مثلاً:** ... و۱۱ و ۶ و ۱ و ۴- و ۹- و ...	$a=5k+1$
اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر ۵ برابر ۲ است. **مثلاً:** ... و۱۲ و ۷ و ۲ و ۳- و ۸- و ...	$a=5k+2$
اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر ۵ برابر ۳ است. **مثلاً:** ... و۱۳ و ۸ و ۳ و ۲- و ۷- و ...	$a=5k+3$
اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر ۵ برابر ۴ است. **مثلاً:** ... و۱۴ و ۹ و ۴ و ۱- و ۶- و ...	$a=5k+4$

بر این اساس می توان نتیجه گرفت که مجموعه‌ی اعداد صحیح در تقسیم بر ۵ به پنج مجموعه افراز شده است. بطور مشابه این موضوع را برای هر عدد طبیعی می توان مطرح نمود و افراز لازم را تشکیل داد.

تمرین ۳۲ : نشان دهید که هر عدد صحیح را می توان به شکل $2k$ یا $2k+1$ نوشت.

حل: بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a\in Z \to a=2q+r \quad , \quad 0\le r<2$$

و چون $r\in Z$ پس یا $r=0$ یا $r=1$ در هر صورت داریم:

$$\begin{cases} r=1 \\ a=2q+r \end{cases} \to a=2q+1 \qquad \text{و} \qquad \begin{cases} r=0 \\ a=2q+r \end{cases} \to a=2q$$

توجه : اگر $k \in Z$ در این صورت همه‌ی اعداد صحیح، به شکل $x = ۲k$ را زوج و همه‌ی اعداد صحیح، به شکل $y = ۲k + ۱$ را فرد می نامند.

تمرین۳۳ : نشان دهید که هر عدد صحیح را می توان به شکل $۳k$ یا $۳k + ۱$ یا $۳k + ۲$ نوشت.

حل: بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a \in Z \rightarrow a = ۳q + r \quad , \quad ۰ \le r < ۳$$

و چون $r \in Z$ پس یا $r = ۰$ یا $r = ۱$ یا $r = ۲$ در هر صورت داریم:

$$\begin{cases} r = ۰ \\ a = ۳q + r \end{cases} \rightarrow a = ۳q$$

$$\begin{cases} r = ۱ \\ a = ۳q + r \end{cases} \rightarrow a = ۳q + ۱$$

$$\begin{cases} r = ۲ \\ a = ۳q + r \end{cases} \rightarrow a = ۳q + ۲$$

تمرین۳۴ : ثابت کنید که اگر P عددی اوّل و $P > ۳$ باشد،آنگاه به یکی از دو صورت $p = ۶k + ۱$ یا $P = ۶k + ۵$ نوشته می شود.

حل : بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a \in Z \rightarrow a = ۶q + r \quad , \quad ۰ \le r < ۶$$

پس عدد طبیعی p را می توان به یکی از صورت های زیر نوشت.

الف) $p = ۶k$	ج) $p = ۶k + ۲$	هـ) $p = ۶k + ۴$
ب) $p = ۶k + ۱$	د) $p = ۶k + ۳$	و) $p = ۶k + ۵$

واضح است که در حالت های« الف» و « ج» و« د» و« هـ» عدد مورد نظر به دلیل بخش پذیری بر۲ یا ۳، اوّل نیست. پس تنها حالت های دیگر یعنی « ب» و« و» می مانند که مورد نظر هستند.

تمرین۳۵ : نشان دهید که هر عدد صحیح و فرد را می توان به شکل $۴k + ۱$ یا $۴k + ۳$ نوشت.

حل: بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a \in Z \rightarrow a = ۴q + r \quad , \quad ۰ \le r < ۳$$

و چون $r \in Z$ پس یا $r=۰$ یا $r=۱$ یا $r=۲$ یا $r=۳$ در هر صورت داریم:

$$۱)\begin{cases} r=۰ \\ a=۴q+r \end{cases} \to a=۴q$$

$$۲)\begin{cases} r=۱ \\ a=۴q+r \end{cases} \to a=۴q+۱$$

$$۳)\begin{cases} r=۲ \\ a=۴q+r \end{cases} \to a=۴q+۲$$

$$۴)\begin{cases} r=۳ \\ a=۴q+r \end{cases} \to a=۴q+۳$$

در حالت۱ و۳ عدد a زوج است که با فرض مسئله مطابقت ندارند. لذا فقط دو حالت۲ و۴ می مانند که مورد نظر هستند.

تمرین۳۶ : ثابت کنید که مربع هر عدد فرد به صورت $۸q+۱$ است. $(q \in Z)$

حل: چون a عدد فرد است پس $a=۲k+۱$ در نتیجه

$$a^۲=(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۴k(k+۱)+۱$$

$k(k+۱)$ حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی است لذا $k(k+۱)=۲q$

و در نهایت داریم:

$$a^۲=۴(۲q)+۱=۸q+۱$$

تمرین۳۷ : اگر n عدد صحیح باشد. ثابت کنید $۳|n^۳-n$

حل: بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a \in Z \to a=۳q+r \quad , \quad ۰\le r<۳$$

و چون $r \in Z$ پس یا $r=۰$ یا $r=۱$ یا $r=۲$ در هر صورت داریم:

$$\begin{cases} r=۰ \\ a=۳q+r \end{cases} \to a=۳q$$

$$n^۳-n=(۳q)^۳-(۳q)=۲۷q^۳-۳q=۳(\underbrace{۹q^۳-q}_{k})=۳k \to ۳|n^۳-n$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ a = 3q + r \end{cases} \rightarrow a = 3q + 1$$

$$n^3 - n = (3q+1)^3 - (3q+1) = 27q^3 + 27q^2 + 9q + 1 - 3q - 1$$

$$= 3(\underbrace{9q^3 + 9q^2 + 2q}_{k}) = 3k \rightarrow 3 \mid n^3 - n$$

$$\begin{cases} r = 2 \\ a = 3q + r \end{cases} \rightarrow a = 3q + 2$$

$$n^3 - n = (3q+2)^3 - (3q+2) = 27q^3 + 54q^2 + 36q + 8 - 3q - 2$$

$$= 3(\underbrace{9q^3 + 18q^2 + 11q + 2}_{k}) = 3k \rightarrow 3 \mid n^3 - n$$

تمرین۳۸ : اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی مانده‌ی تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.

حل : فرض کنیم که $a = bq + r$ پس :

$n \mid a \qquad (1)$

$n \mid b \rightarrow n \mid bq \qquad (2)$

$$\xrightarrow{(1),(2)} n \mid a - bq \xrightarrow{a-bq=r} n \mid r$$

تمرین۳۹ : اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد. ثابت کنید، همواره اعداد صحیح a و $a+2$ و $a+4$ بر ۳ بخش پذیر است.

حل : برای عدد صحیح a یکی از حالت زیر وجود دارد.

حالت اوّل :

$$a = 3k \rightarrow 3 \mid a$$

حالت دوّم :

$$a = 3k + 1 \rightarrow a + 2 = 3k + 3 \rightarrow a + 2 = 3(k+1) \rightarrow 3 \mid a + 2$$

حالت سوّم :

$$a = 3k + 2 \rightarrow a + 4 = 3k + 6 \rightarrow a + 4 = 3(k+2) \rightarrow 3 \mid a + 4$$

تمرین ۴۰ : ثابت کنید، تفاضل مکعب های دو عدد صحیح متوالی، عددی فرد است.

حل : فرض کنیم که

$a=n$ و $b=n+۱$

لذا

$$b^۳-a^۳=(n+۱)^۳-(n)^۳=(n^۳+۳n^۲+۳n+۱)-n^۳$$

$$=۳n^۲+۳n+۱=\underbrace{۳n(n+۱)}_{۲q}+۱=۲q+۱$$

تمرین ۴۱ : با فرض صحیح و غیر صفر بودن عدد m حاصل هر یک از موارد زیر را به دست آورید.

الف) $[m^۲,m]$

ب) $(m^۲,m^۵)$

پ) $([m^۲,m],m^۵)$

ت) $(۲m,۶m^۳)$

ث) $(۳m+۱,۳m+۲)$

ج) $(m^۷,(m^۲,m^۳))$

ح) $[m^۳,m^۲]$

خ) $[(۷۲,۴۸),۱۲۰]$

حل :

الف)

$$m\,|\,m^۲\rightarrow[m^۲,m]=m^۲$$

ب)

$$m^۲\,|\,m^۵\rightarrow(m^۲,m^۵)=m^۲$$

پ)

$$([m^۲,m],m^۵)=(m^۲,m^۵)=m^۲$$

ت)

$$(۲m,۶m^۳)=۲\,|m|$$

ث)

$$(۳m+۱,۳m+۲)=۱$$

دو عدد $۳m+۱$ و $۳m+۲$ دو عدد صحیح متوالی هستند.

ج)

$$(m^۷,\underbrace{(m^۲,m^۳)}_{m^۲})=(m^۷,m^۲)=m^۲$$

چ)

$$[m^{۳},m^{۲}]=|m^{۳}|$$

ح)

$$[(۷۲,۴۸),۱۲۰]=[\underbrace{(۷۲,۴۸)}_{۲۴},۱۲۰]=[۲۴,۱۲۰]=۱۲۰$$

یادمان باشد که ۱۲۰ | ۲۴

تمرین ۴۲ : ثابت کنید که حاصل ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

حل: فرض کنیم که

$a=n+۱$ و $b=n+۲$ و $c=n+۳$

لذا

$$abc=(n+۱)(n+۲)(n+۳)=\frac{۱\times۲\times۳\times\ldots\times n\times(n+۱)\times(n+۲)\times(n+۳)}{۱\times۲\times۳\times\ldots\times n}$$

$$=\frac{(n+۳)!}{n!}=\frac{(n+۳)!}{n!}\times\frac{۳!}{۳!}=\frac{(n+۳)!}{n!\times۳!}\times۳!$$

با تشکر فراوان از آقای ملاسعیدی
به جهت هر گونه مساعدت در تهیه ی این جزوه

$$=\frac{(n+۳)!}{۳!\times[(n+۳)-۳]!}\times۳!=\binom{n+۳}{۳}\times۳!=k\times۶=۶k$$

توجه : تمرین فوق برای هر سه عدد صحیح متوالی نیز قابل اثبات است. برای مثال اگر هر سه عدد a و b و c منفی باشند در این صورت:

$$abc=-۶k=۶k'$$

تمرین ۴۳ : ثابت کنید که اگر n عدد صحیح زوج باشد، آنگاه $۴۸\,|\,n^{۳}-۴n$

حل: چون n عدد صحیح زوج است پس $n=۲k$ از طرفی

$$n^{۳}-۴n=(۲k)^{۳}-۴(۲k)=۸k^{۳}-۸k=۸k(k^{۲}-۱)=۸k(k+۱)(k-۱)$$

و چون حاصل ضرب هر سه عدد صحیح متوالی مضرب ۶ است پس:

$$n^{۳}-۴n=۸(۶q)=۴۸q$$

***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

کانال تلگرامی: @mathameri   سایت : www.mathtower.ir