فصل ۱ : بخش پذیری و هم نهشتی

درس ۲ : بخش پذیری در اعداد صحیح

عدد صحیح ناصفر a و عدد صحیح b را در نظر بگیرید، اگر b بر a بخش پذیر باشد گوییم a، عدد b را می شمارد (a عاد می کند عدد b را) و با نماد $a|b$ نمایش می دهیم.

توجه : b بر a بخش پذیر است یعنی وجود دارد عدد صحیح q به طوری که $b=aq$.

بنابراین : $b=aq \iff a|b$

مثال : کدام یک از گزاره های زیر صحیح است ؟

الف) $-2|14$ ص

ب) $-2|-12$ ص

پ) $2|-24$ ص

ت) $0|2$ غ

ث) $2|0$ ص

ج) $0|0$ ص → به طور قراردادی می پذیریم

مثال : جاهای خالی را پر کنید.

الف) $7|63 \iff 63 = 7 \times 9$

ب) $91 = 7 \times 13 \iff 7|91$ و $13|91$

پ) $-6|54 \iff 54 = -9 \times (-6)$

ت) $0 = 18 \times 0 \iff 18|0$

ث) $a|1 \Rightarrow a = 1$ یا $a = -1$ *

افشین ملاسعیدی - دبیر ریاضی مجتمع استعداد های ناب صالحین آبادان - لطفاً هر گونه ایراد و اشتباه رویت شد ، آن را با شماره ۰۹۱۶۸۳۲۴۵۰۰ به بنده اطلاع دهید./سپاسگزارم
هزینه این فایل قرائت صلوات جهت سلامتی منجی عالم بشریت عج است
وبلاگ : sinxcosx.blogfa.com

پنجشنبه ۲ فروردین
22 March 2018
۴ رجب ۱۴۳۹
۱۳۹۷

مثال: n را چنان بیابید که $(n-5)|2$.

$n-5=1 \Rightarrow n=6$ یا $n-5=2 \Rightarrow n=7$

$n-5=-1 \Rightarrow n=4$ یا $n-5=-2 \Rightarrow n=3$

مثال: ثابت کنید: $\forall m,n\in \mathbb{N} ,\ m<n \Rightarrow a^m|a^n$

می‌دانیم: $a^n = a^m \times a^{n-m} \xrightarrow{q=a^{n-m}} a^m|a^n$

مثال: اگر $ab=cd$ (a, b, c, d اعداد صحیح ناصفرند) در این صورت پنج رابطهٔ عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

$a|cd$ و $b|cd$ ، $c|ab$ ، $d|ab$ ، $ab|cd$

خواص رابطهٔ عاد کردن:

1. اگر عدد a، عدد b را بشمارد آنگاه هر مضرب عدد b را نیز می‌شمارد.

به عبارت دیگر: $a|b \Rightarrow a|mb$

جمعه ۳ فروردین
23 March 2018
۵ رجب ۱۴۳۹
۱۳۹۷

توجه: اگر $a|b$ ، آنگاه می‌توان گفت:

الف) $a|b^2$ (زیرا $a|mb$ و کافیست $m=b$ فرض شود)

ب) $a|b^3$ (" " " $m=b^2$ " ")

پ) $a|b^7$ (" " " " " $m=b^6$ " ")

مثال: درصورتی‌که $a|b$ و $n\in\mathbb{N}$ ثابت کنید $a|b^n$.

طبق خاصیت ۱ داریم $a|mb$، کافیست به جای m عدد b^{n-1} را جایگزین کنیم:

$a|b^{n-1}\times b \Rightarrow a|b^n$

سؤال: آیا از اینکه $a|b$ می‌توان نتیجه گرفت $ka|kb$؟ عکس آن چطور؟ $(k\neq 0)$

صحیح است زیرا: $a|b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{\times k} kb=kaq \Rightarrow ka|kb$

عکس این موضوع نیز صحیح است یعنی از $ka|kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a|b$.

زیرا: $ka|kb \Rightarrow kb=kaq \xrightarrow{\div k} b=aq \Rightarrow a|b$

نتیجه: اگر $a|b$، آنگاه می‌توان دو طرف در هر عدد صحیح ناصفر ضرب یا بر آن تقسیم کرد.

سؤال: آیا از این‌که $a|bc$ می‌توان نتیجه گرفت a، حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند. خیر به عنوان نمونه:

$۶|۳\times۸ \not\Rightarrow ۶|۳$ یا $۶|۸$

خلاصه: اگر m عدد طبیعی بیشتر از ۱ باشد و $a|b$، آنگاه کدام گزاره صحیح است؟

الف) $a|mb$ ص

ب) $ma|b$ غ

پ) $ma|mb$ ص

2. خاصیت تعدی : $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

اثبات :

$a|b \Rightarrow b=aq_1$ ①

$b|c \Rightarrow c=bq_2 \overset{①}{\Rightarrow} c=b(aq_1)=a(\underbrace{bq_1}_{q}) \Rightarrow a|c$

مثال : با استفاده از خاصیت تعدی، برای هر عدد طبیعی n، نشان دهید :

$a|b \Rightarrow a|b^n$

$a|b \wedge b|b^n \xrightarrow{\text{تعدی}} a|b^n$

3. هرگاه عددی، دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

به عبارت دیگر : $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b\pm c$

اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow b=aq_1 \\ a|c \Rightarrow c=aq_2 \end{array}\right\} \longrightarrow b\pm c=a(\underbrace{q_1\pm q_2}_{q}) \Rightarrow a|b\pm c$$

تست : اگر $a|16$ و $a|12$، کدام گزاره صحیح نیست؟

$a|14$ $a|32$ $a|28$ $a|4$

$16-12=4 \Rightarrow a|4$ $16+12=28 \Rightarrow a|28$

$16\times 2=32 \Rightarrow a|32$

بنابراین گزینه ۴ یعنی $a|14$ صحیح نیست

مثال: اگر $7|2a+b$ نشان دهید $7|3a+5b$.

$$\left.\begin{array}{l} 7|7(a+b) \Rightarrow 7|7a+7b \\ 7|2a+b \Rightarrow 7|2(2a+b) \Rightarrow 7|4a+2b \end{array}\right\} \xrightarrow{-} 7|3a+5b$$

سؤال: آیا از اینکه $a|b\pm c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a|b$ یا $a|c$؟

خیر به طور مثال $2|5\pm3$ ولی $2\nmid 5$ و $2\nmid 3$.

4. اگر $a|b$ و $b\neq 0$ آنگاه $|a|\leq|b|$.

اثبات:

$$a|b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{b\neq 0} q\neq 0 \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} 1\leq|q|$$

$$\xrightarrow{\times|a|} |a|\leq|aq| \Rightarrow |a|\leq|b|$$

نتیجه مهم: اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a=\pm b$.

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow |a|\leq|b| \\ b|a \Rightarrow |b|\leq|a| \end{array}\right\} \Rightarrow |a|=|b| \Rightarrow a=\pm b$$

تست: به ازای چند مقدار صحیح m، داریم $2m|m^2+1$ و $m^2+1|2m$؟

هیچ مقدار　　۱ مقدار　　۲ مقدار　　بیش از ۲ مقدار

$$m^2+1=\pm 2m \Rightarrow m^2\mp 2m+1=0 \Rightarrow (m\mp 1)^2=0 \Rightarrow m\mp 1=0$$

$$\Rightarrow m=\pm 1 \longrightarrow$$ به ازای ۲ مقدار m

نکته: اگر $|b|<|a|$ و $a|b$ آنگاه $b=0$ است.

تست: اگر a و b دو عدد طبیعی باشند که $a \nless b$ و $b|b-a$، آنگاه:

$a=1$ $a=b$ $b=1$ $b=2$

طبق نکته‌ی فوق، چون b عدد کوچکتر خود یعنی $b-a$ را عاد کرده است،
پس $b-a=0$ و در نتیجه $b=a$ است.

نکته: اگر $ab|c$ آنگاه $a|c$ و $b|c$.
به طور مثال اگر عددی بر ۶ بخش‌پذیر باشد آنگاه آن عدد بر ۲ و ۳ نیز بخش‌پذیر است.

تست: هرگاه $n\in\mathbb{Z}$ و $3n|n(n-1)$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

$3|n-1$ $3n|n^3-n^2$ $n|n^2-n$ $3|n^2-n$

$$3n|n(n-1) \xrightarrow{\text{نکته فوق}} 3|n(n-1) \Rightarrow 3|n^2-n$$
$$3n|n(n-1) \xrightarrow{\text{''}} n|n(n-1) \Rightarrow n|n^2-n$$
$$3n|n(n-1) \xrightarrow{\text{طرف راست در n ضرب شود}} 3n|n^2(n-1) \Rightarrow 3n|n^3-n^2$$

لذا گزینه‌ی ۴ یعنی $3|n-1$ نادرست است زیرا به ازای $n=0$ داریم:
$3|-1$ که نادرست است.

حل چند نمونه سؤال مهم:

۱- m را چنان بیابید که برای هر عدد صحیح n داشته باشیم $n|m^2+m-2$.
می‌دانیم به ازای هر عدد صحیح n داریم $n|0$. پس:
$m^2+m-2=0 \Rightarrow m=1$ و $m=-2$

۲- اگر $a\neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $7m+6$ و $6m+5$ بر a بخش‌پذیر باشند ثابت کنید $a=\pm1$.

$$a|7m+6 \xrightarrow{\times 6 \text{ طرفین}} a|42m+36$$
$$a|6m+5 \xrightarrow{\times 7 \text{ طرفین}} a|42m+35$$
$$\Rightarrow a|1 \Rightarrow |a|\leq 1$$

$\Rightarrow |a|=1 \Rightarrow a=\pm1$

۳ـ a چند مقدار طبیعی مختلف می‌تواند باشد تا به ازای حداقل یک عدد صحیح n داشته باشیم $a|2n+1$ و $a|5n-2$ ؟

$$a|2n+1 \xrightarrow{\text{طرف راست } \times 5} a|10n+5$$
$$a|5n-2 \xrightarrow{\text{طرف راست } \times 2} a|10n-4$$
$$\Big\} \xrightarrow{-} a|9 \xrightarrow{a\in\mathbb{N}} a=1\text{ یا }3\text{ یا }9$$

۳ مقدار طبیعی برای a وجود دارد

۴ـ اگر $a|b$ ثابت کنید:

الف) $a|-b$

$$a|b \xrightarrow{\text{طرف راست } \times(-1)} a|-b$$

ب) $-a|b$

میدانیم: $-a|a \;\wedge\; a|b \xrightarrow{\text{تعدی}} -a|b$

پ) $-a|-b$

$$a|b \xrightarrow{\times(-1)} -a|-b$$

۵ـ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$ همواره می‌توان نتیجه گرفت $a+c|b+d$ ؟

خیر به طور مثال $2|8$ و $3|6$ ولی $2+3\nmid 6+8$ یعنی $5\nmid 14$

۶ـ اگر $a|b$ و $c|d$، نشان دهید $ac|bd$.

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow b=aq_1 \\ c|d \Rightarrow d=cq_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times} bd=ac\underbrace{(q_1q_2)}_{q} \Rightarrow ac|bd$$

۷ـ اگر $a|b$ نشان دهید که $a^n|b^n$. (توجه: عکس این موضوع نیز صحیح است، یعنی می‌توان از دو طرف ریشه‌ی n ام گرفت)

$$a|b \Rightarrow b=aq \Rightarrow b^n=(aq)^n \Rightarrow b^n=a^n\underbrace{q^n}_{q'} \Rightarrow a^n|b^n$$

۸- اگر k ای در $\mathbb{Z}$ باشد که داشته باشیم $5|4k+1$، ثابت کنید:
$25|16k^2+28k+6$

$5|4k+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 25|16k^2+8k+1$

$5|4k+1 \xrightarrow{\times 5} 25|20k+5$

$\xrightarrow{+} 25|16k^2+28k+6$

۹- درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.

الف) $a|b-c \iff a|c-b$ درست است (کافی است طرف راست در (۱-) ضرب شود)

ب) $a|b-c \iff a|b+c$ نادرست است به طور مثال
$3|10-1$ ولی $3\nmid 10+1$

پ) $a|b \iff a\,|\,|b|$ درست است زیرا اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$
یعنی $a|\pm b$ و $a\,|\,|b|$.

ت) اگر p عددی اول باشد و a عدد طبیعی به طوری که $a|p$، آنگاه $a=1$ یا $a=p$.
درست است زیرا در اعداد طبیعی هر عدد اول فقط بر خودش و ۱ بخش پذیر است.
توجه داشته باشیم که اگر $a\in\mathbb{Z}$ آنگاه از $a|p$ می توان نتیجه گرفت:
$a=1$ یا $a=-1$ یا $a=p$ یا $a=-p$

۱۰- اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$ ثابت کنید a عددی اول است.

$a|5k+3 \xrightarrow{\text{طرفین را } \times 9} a|45k+27$

$a|9k+4 \xrightarrow{\text{طرفین را } \times 5} a|45k+20$

$\xrightarrow{-} a|7 \Rightarrow a=1$ یا $a=7$

اما با توجه به $a>1$، باید $a=7$ باشد پس a عددی اول است.

۱۱- اگر a عددی طبیعی باشد و دو عدد $9k+7$ و $7k+6$ را عاد کند،
ثابت کنید $a=1$ یا $a=5$ است.

$a|9k+7 \xrightarrow{\text{طرفین را } \times 7} a|63k+49$

$a|7k+6 \xrightarrow{\text{طرفین را } \times 9} a|63k+54$

$\xrightarrow{-} a|5 \Rightarrow a=1$ یا $a=5$

۱۲- اگر $a|b$ و $a|c$ نشان دهید $a|mb\pm nc$.

$a|b \xrightarrow{\text{طرفین را } \times m} a|mb$

$a|c \xrightarrow{\text{طرفین را } \times n} a|nc$

$\xrightarrow{\pm} a|mb\pm nc$

۱۳- اگر $m,n \in \mathbb{N}$ و $a,b \in \mathbb{Z}$، ثابت کنید $m<n$ ، $a|b \Rightarrow a^m|b^n$

$a|b \xrightarrow{\text{توان } m} a^m|b^m \xrightarrow{\text{طرف راست} \times b^{n-m}} a^m|b^m \times b^{n-m} \Rightarrow a^m|b^n$

۱۴- اگر $a^3|b^8$ نشان دهید:

الف) $a^6|b^{25}$

$a^3|b^8 \xrightarrow{\text{سوال ۱۳}} (a^3)^2|(b^8)^3 \Rightarrow a^6|b^{24} \xrightarrow{\text{طرف راست} \times b} a^6|b^{25}$

ب) $a^2|b^7$

$a^2|a^3$ و $a^3|b^8 \Rightarrow a^2|b^8 \Rightarrow a|b^4$

$a^3|b^8 \xrightarrow{\text{طرف راست} \times b} a^3|b^9 \Rightarrow a|b^3$

$\Big\} \rightarrow a^2|b^7$

۱۵- m را چنان بیابید که به ازای هر عدد صحیح $n \neq 0$ داشته باشیم $m^2-3m+1|n$.

$m^2-3m+1=\pm 1 \begin{cases} m^2-3m=0 \Rightarrow m=0 \vee m=3 \\ m^2-3m+2=0 \Rightarrow m=1 \vee m=2 \end{cases}$

۱۶- اگر a، b و c اعداد صحیح باشند به طوری که $0<b<a<b+c$ و $c|a-b$
چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟

$\xrightarrow{-b} 0<a-b<c$ نامساوی مفروض و $c|a-b \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b$

۱۷- ثابت کنید:

الف) $a|b \Rightarrow a|b+ma$ (هر مضربی از a را می‌توان به طرف راست افزود)

$\left.\begin{matrix} a|b \\ a|ma \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} a|b+ma$

ب) $11|3a-4b \Rightarrow 11|3a+7b$

$11|3a-4b \xrightarrow{\text{راست} +11b} 11|3a+7b$

ج) $7|a-4b \Rightarrow 7|6a-10b$

$7|a-4b \xrightarrow{\text{راست} -7(a-2b)} 7|-6a+10b \xrightarrow{\text{راست} \times(-1)} 7|6a-10b$

۱۸- اگر x ، y و z سه عدد طبیعی باشند به طوری که $xyz \mid xy+xz$. نشان دهید $z=y$.

$$\xrightarrow{\div x} yz \mid y+z$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} y \mid y+z \xrightarrow{\text{راست } -y} y \mid z \\ z \mid y+z \xrightarrow{\text{راست } -z} z \mid y \end{cases}\right\} \Rightarrow |y|=|z| \Rightarrow y=z$$

۱۹- ثابت کنید

الف) $a \mid a+b \Rightarrow a \mid b$

روش اول: $a \mid a+b \xrightarrow{\text{راست } -a} a \mid a+b-a \Rightarrow a \mid b$

روش دوم: $\left.\begin{array}{l} a \mid a+b \\ a \mid a \end{array}\right\} \xrightarrow{-} a \mid b$

ب) $a+b \mid a \Rightarrow a+b \mid b$

$$\left.\begin{array}{l} a+b \mid a \\ a+b \mid a+b \end{array}\right\} \xrightarrow{-} a+b \mid b$$

پ) $a-b \mid b \Rightarrow a-b \mid a+b$

روش اول: $\left.\begin{array}{l} a-b \mid b \; ① \\ a-b \mid a-b \end{array}\right\} \xrightarrow{+} a-b \mid a \; ②$ $\quad \xrightarrow{①+②} a-b \mid a+b$

روش دوم: $a-b \mid b \xrightarrow{\text{راست } \times 2} a-b \mid 2b \xrightarrow{\text{راست } +(a-b)} a-b \mid a+b$

۲۰- نشان دهید نتیجه‌گیری زیر صحیح نیست:

$a+b \mid a-b \Rightarrow a+b \mid a$

مثال نقض: $a=1$, $b=-3$: $-2 \mid 4 \not\Rightarrow -2 \mid 1$

خلاصه‌ای از قواعد گفته شده :

تعریف : $a|b \Leftrightarrow b=aq$ و $0|0$

قواعد مختص به راست : $a|b \Rightarrow a|mb$ و $a|b+ma$ و $a|b^n \ (n>0)$

قواعد دو طرف : $a|b \overset{m\neq 0}{\Longleftrightarrow} am|bm$ و $a|b \overset{n>0}{\Longleftrightarrow} a^n|b^n$

خاصیت تعدی : $a|b \,,\, b|c \Rightarrow a|c$

خواص متفرقه :

1. $a|b \xrightarrow{b\neq 0} |a|\leqslant|b|$
2. $|a|>|b| \,,\, a|b \Rightarrow b=0$
3. $ab|c \Rightarrow a|c \wedge b|c$
4. $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b\pm c$
5. $a|b \wedge c|d \Rightarrow ac|bd$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) :

دو عدد ۱۲ و ۱۸ را در نظر بگیرید. مقسوم علیه‌های این دو عدد عبارتند از :

۱۲ : ۱ و ۲ , ۳ , ۴ , ۶ , ۱۲

۱۸ : ۱ , ۲ , ۳ , ۶ , ۹ , ۱۸

مقسوم علیه‌ها مشترک این دو عدد ۶ و ۳ , ۲ , ۱ می‌باشند که بزرگترین آن‌ها ۶ است ، بنابراین گوییم ب.م.م دو عدد ۱۲ , ۱۸ ، برابر ۶ است و با نماد ریاضی به صورت $(۱۲,۱۸)=۶$ می‌نویسیم .

تعریف : عدد طبیعی d را بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b (که حداقل یکی از آن‌ها صفر نیست) گوییم ، هرگاه d مقسوم علیه مشترک a و b باشد ، و a و b مقسوم علیه مشترک بزرگتر از d نداشته باشند . به عبارت دیگر $(a,b)=d$ ، اگر و تنها اگر :

الف) $d|a$ و $d|b$

ب) $\forall m>0 \,;\, m|a \,,\, m|b \Rightarrow m\leqslant d$

مثال: حاصل هر یک را بنویسید.

الف) $(6,21)=3$ ب) $(0,5)=5$ پ) $(1,12)=1$

ت) $(3,4)=1$ ث) $(6,-4)=2$ ج) $(-8,-6)=2$

توجه: دو عدد a و b را نسبت به هم اول گوییم هرگاه $(a,b)=1$.

تست: اگر $x|18$ و $x|12$ و برای هر $y\in\mathbb{Z}$ که $y|18$ و $y|12$ داشته باشیم $y\leq x$ آنگاه:

$x=18$ $\quad$ $x=12$ $\quad$ $x=6$ $\quad$ $x=3$

جواب: طبق تعریف x همان ب.م.م ۱۲ و ۱۸ است. یعنی $x=(12,18)=6$

تست: اگر $0\neq a\in\mathbb{Z}$، کدام گزینه صحیح نیست؟

$(a,-1)=1$ $\quad$ $(a,-a)=|a|$ $\quad$ $(a,2|a|)=|a|$ $\quad$ $(a,0)=0$

گزینه ۴ صحیح نیست زیرا طبق تعریف ب.م.م همواره مثبت است. درضمن $(a,0)=|a|$.

نکته ۱: $a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$

اثبات:

شرط اول: $|a|\,\big|\,a \xrightarrow{a|b} |a|\,\big|\,b$

شرط دوم: $\forall m>0;\ m|a,\ m|b \Rightarrow m|a \Rightarrow |m|\leq|a| \Rightarrow m\leq|a|$

با توجه به برقراری هر دو شرط، اثبات تمام است.

مثال: حاصل $(12!,10!)$ چیست؟

$10!\,|\,12! \Rightarrow (10!,12!)=10!$

مثال: اگر $a^3|b^4$ مقدار (a,b^2) را بیابید.

$a^3|b^4 \xrightarrow{\times b^2 \text{ طرفین}} a^3|b^6 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} a|b^2 \xrightarrow{\text{نکته}} (a,b^2)=|a|$

نکته ۲: $(a,b)=(a,b+ma)=(a+mb,b)$

(هر مضربی از a را می‌توان به b اضافه یا کم کرد، همچنین هر مضربی از b را می‌توان به a اضافه یا کم کرد.)

مثال: حاصل $(60,603)$ را بنویسید.

$$(60,603)\overset{-10\times 60}{=}(60,3)=3$$

مثال: اگر $(a,b)=d$ مقدار $(a,b+ab+3a^2)$ را بیابید.

$$(a,b+ab+3a^2)\overset{-a(b+3a)}{=}(a,b)=d$$

نکته ۳: $(ka,kb)=|k|(a,b)$ و $(a^n,b^n)=(a,b)^n$

مثال: درصورتی که $(3a,3b)+(-2a,-2b)=20$ مقدار (a^3,b^3) را بیابید.

فرض: $3(a,b)+2(a,b)=20 \Rightarrow 5(a,b)=20 \Rightarrow (a,b)=4$

$$(a^3,b^3)=(a,b)^3=4^3=64$$

حل چند نمونه سؤال مهم:

۱- اگر p عدد اول باشد و $a\in\mathbb{Z}$ و $p\nmid a$ ثابت کنید $(p,a)=1$.

$(p,a)=d$ می‌گیریم $\Rightarrow \begin{cases} d\mid a \quad ① \\ d\mid p \Rightarrow d=p \ \vee\ d=1 \end{cases}$

اگر $d=p$ باشد پس طبق ① داریم $p\mid a$ که با فرض تناقض دارد

پس $d=1$ است یعنی $(p,a)=1$.

۲- با فرض $4=(a,b)+(-a,-b)+(6a+2b,2a)-(a^2,b^2)$ مقدار $(3a,3b-6a)$ را تعیین کنید.

$-3(2a)$

فرض: $(a,b)+(a,b)+\underbrace{(2b,2a)}_{2(a,b)}-(a,b)^2=4$

$$\underline{(a,b)=d} \rightarrow 4d-d^2=4 \Rightarrow d^2-4d+4=0 \Rightarrow d=2$$

$$(3a,3b-6a)\overset{+2(3a)}{=}(3a,3b)=3(a,b)=3d=6$$

۳- با فرض $n\in\mathbb{N}$، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $2n+3$ و $5n+6$ را تعیین کنید.

$$(2n+3,5n+6)\overset{-2(2n+3)}{=}(2n+3,n)\overset{-2n}{=}(3,n)=1 \text{ یا } 3$$

۴ـ اگر p یک عدد اول باشد و $(a,p^3)=p$ و $(b,p^4)=p^2$ ، حاصل (ab^2,p^5) را بیابید.

$(a,p^3)=p \Rightarrow p|a$

$(b,p^4)=p^2 \Rightarrow p^2|b \xrightarrow{\text{توان } 2} p^4|b^2$

$\xrightarrow{\times} p^5|ab^2$

$\Longrightarrow (ab^2,p^5)=p^5$

۵ـ به ازای چه مقدار از a داریم $(a,15)=\frac{4}{a}$.

$\frac{4}{a}\in \mathbb{N} \Rightarrow a|4$

$\frac{4}{a}|15 \xrightarrow{\times a} 4|15a \Rightarrow 4|a$

$\Rightarrow |a|=4 \xrightarrow{a\in \mathbb{N}} a=4$

۶ـ اگر $p \neq q$ و p و q هردو عدد اول باشند ثابت کنید $(p,q)=1$.

برهان خلف: فرض می‌کنیم $d\neq 1$ و $(p,q)=d$ باشد آنگاه:

$d|p \wedge d|q \xrightarrow{d\neq 1} d=p \wedge d=q \Rightarrow p=q$ تناقض

۷ـ ثابت کنید:

الف) هر دو عدد صحیح متوالی مثبت به هم اولند.

روش اول:

فرض: $(n,n+1)=d \Rightarrow \begin{cases} d|n \\ d|n+1 \end{cases} \longrightarrow d|1 \Rightarrow d=1$

روش دوم:

$(n,\underbrace{n+1)=(n}_{-n},1)=1$.

ب) هر دو عدد صحیح فرد متوالی مثبت به هم اولند.

روش اول:

فرض: $(2n+1,2n+3)=d \Rightarrow \begin{cases} d|2n+1 \\ d|2n+3 \end{cases} \longrightarrow d|2 \xrightarrow{\text{فرد } d} d=1$

روش دوم:

$(2n+1,\underbrace{2n+3)=(\overset{\text{فرد}}{2n+1}}_{-(2n+1)},2)=1$

کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) :

دو عدد ۴ و ۶ را در نظر بگیرید، مضارب مثبت این دو عدد عبارتند از :

۴ : ۴ ، ۸ ، ۱۲ ، ۱۶ ، ۲۰ ، ۲۴ ، ۲۸ ، ۳۲ ، ۳۶ ، ۴۰ ، ...

۶ : ۶ ، ۱۲ ، ۱۸ ، ۲۴ ، ۳۰ ، ۳۶ ، ۴۲ ، ۴۸ ، ...

مضارب مشترک این دو عدد ... ، ۳۶ ، ۲۴ ، ۱۲ می باشند که کوچکترین آنها ۱۲ است.

بنابراین ک.م.م دو عدد ۴ و ۶ ، برابر ۱۲ است و می نویسیم : $[4,6]=12$

تعریف : عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد صحیح ناصفر a و b گوییم، هرگاه c مضرب مشترک a و b بوده و a و b مضرب مشترک کوچکتر از c نداشته باشند به عبارت دیگر $[a,b]=c$ اگر و تنها اگر :

الف) $a|c$ و $b|c$

ب) $\forall m>0 ;\ a|m \wedge b|m \Rightarrow c\leq m$

مثال : حاصل هر یک را بنویسید.

شهادت حضرت امام موسی کاظم (ع) (۱۸۳ هـ.ق)

جمعه ۲۴ فروردین ۱۳۹۷
13 April 2018
۲۶ رجب ۱۴۳۹

الف) $[6,10]=30$ ب) $[1,8]=8$

پ) $[-4,16]=16$ ت) $[-2,-3]=6$

توجه: $[-a,-b]=[-a,b]=[a,-b]=[a,b]$

توجه : برای تعیین ک.م.م دو عدد، ابتدا آنها را به عوامل اول تجزیه کرده، پس از ضرب عامل های مشترک و غیرمشترک با بیشترین توان، ک.م.م را حساب کرد.

تست : کوچکترین مضرب مشترک دو عدد ۳۶ و ۵۴ کدام است؟ (سراسری ۹۲)

۵۴ ۷۲ ۱۰۸ ۱۴۴

$36=2^2\times 3^2$, $54=2^1\times 3^3 \Rightarrow [36,54]=2^2\times 3^3=4\times 27=108$

نکته۱: $a|b \Rightarrow [a,b]=|b|$

اثبات : شرط اول : $b\,|\,|b| \xrightarrow{a|b} a\,|\,|b|$

شرط دوم : $\forall m>0 ;\ a|m \wedge b|m \Rightarrow |b|\leq |m| \Rightarrow |b|\leq m$

با توجه به برقراری هر دو شرط، اثبات تمام است.

تست : اگر $(a,b)=d$ آنگاه $[a,d]$ کدام است؟

d $|a|$ $|a|d$ $|ab|$

$(a,b)=d \Rightarrow d|a \xrightarrow{\text{نکته } 1} [a,d]=|a|$

مثال: اگر $a^2|b^3$، مقدار $[a, b^2]$ را بیابید.

$$a^2|b^3 \xrightarrow{\times b \text{ ضرب در}} a^2|b^4 \xrightarrow{\text{جذر}} a|b^2 \Rightarrow [a,b^2]=|b^2|=b^2$$

نکته ۲: $[ka,kb]=|k|\times[a,b]$

تست: کوچکترین مضرب مشترک بین دو عدد صحیح $2a$ و $5a$ کدام است؟

$5|a|$ $\quad$ $|a|$ $\quad$ $2|a|$ $\quad$ $10|a|$

$$[2a,5a]=|a|\,[2,5]=|a|\times 10=10|a|$$

نکته ۳: $[a^n,b^n]=[a,b]^n$

مثال: در صورتی که $[2a,2b]+[-a,-b]=84$ باشد مقدار $[a^2,b^2]$ را محاسبه نمایید.

$$\text{فرض} \Rightarrow 2[a,b]+[a,b]=84 \Rightarrow 3[a,b]=84 \Rightarrow [a,b]=28$$

$$[a^2,b^2]=[a,b]^2=28^2$$

سؤال: با یک مثال نقض نشان دهید تساوی $[a,b]=[a,b+ma]$ در حالت کلی صحیح نیست.

$$\left.\begin{array}{l}[2,5]=10\\ [2,5+1\times2]=[2,7]=14\end{array}\right\} \Rightarrow [2,5]\neq[2,5+1\times2]$$

سؤال: بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد طبیعی، ۱۱ و کوچکترین مضرب مشترک آنها ۶۶ است. آن دو عدد را بیابید.

$$(a,b)=11 \Rightarrow \begin{cases} a=11a' \\ b=11b' \end{cases}$$

$$[a,b]=[11a',11b']=11[a',b']=66 \Rightarrow [a',b']=6$$

$$\begin{cases} a'=1 \Rightarrow a=11 \\ b'=6 \Rightarrow b=66 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'=2 \Rightarrow a=22 \\ b'=3 \Rightarrow b=33 \end{cases}$$

بنابراین آن دو عدد ۱۱ و ۶۶ یا آن دو عدد ۲۲ و ۳۳ می‌باشند.

$$\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline 10 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$$

مقسوم ← ۱۳ ، مقسوم علیه ← ۵ ، خارج قسمت ← ۲ ، باقیمانده ← ۳

قضیه تقسیم: از تقسیم عدد ۱۳ بر عدد ۵ داریم:

در دوره ابتدایی آموختیم برای تعیین صحت تقسیم باید تساوی $13=(5\times 2)+3$ برقرار باشد.

در حالت کلی می‌توان گفت:

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت (با تقسیم a بر b) اعداد صحیح منحصر به فردی مانند q و r یافت می‌شوند به طوری که

یعنی: $\begin{array}{r|l} a & b \\ & q \\ \hline r & \end{array}$ $\quad a=bq+r \ , \ 0\le r<b$

همانطور که در بالا اشاره شد، a را مقسوم، b را مقسوم علیه، q را خارج قسمت و r را باقیمانده نامند.

مثال: اگر $a=12q-5$ و $a,q\in\mathbb{Z}$، باقیمانده تقسیم a بر ۱۲ را حساب کنید.

$$a=12q-5=12q-12+7=12\underbrace{(q-1)}_{q'}+7 \Rightarrow r=7$$

مثال: اگر $a=15k-5$ باشد، باقیمانده a بر ۳ را حساب کنید.

$$a=3(5k)-5=3(5k)-6+1=3\underbrace{(5k-2)}_{q}+1 \Rightarrow r=1$$

تست: باقیمانده تقسیم $99^{100}-2$ بر ۴۹ کدام است؟

صفر ۱ ۳ ۴۸

$$\text{سپاریم: } 99-1 \mid 99^{100}-1 \Rightarrow 98 \mid 99^{100}-1 \Rightarrow 99^{100}-1=98q$$

$$\xrightarrow{-1} 99^{100}-2=98q-1=49(2q)-1=49(2q)-49+48$$

$$\Rightarrow 99^{100}-2=49\underbrace{(2q-1)}_{q'}+48 \Rightarrow r=48$$

تست: باقیمانده تقسیم -26 بر ۱۵ کدام است؟ ۱ ۲ ۳ ۴

$$-26=-30+4=15(-2)+4 \rightarrow r=4$$

تست: اگر $n|a+1$ و $n|b+3$ و $n>5$ ، باقیمانده تقسیم ab بر n کدام است؟ ۱ ۲ ۳ ۴

$$n|a+1 \Rightarrow a+1 = nq_1 \Rightarrow a = nq_1 - 1$$

$$n|b+3 \Rightarrow b+3 = nq_2 \Rightarrow b = nq_2 - 3$$

$$\Rightarrow ab = (nq_1-1)(nq_2-3) = n^2q_1q_2 - 3nq_1 - nq_2 + 3$$

$$\Rightarrow ab = n\underbrace{(nq_1q_2 - 3q_1 - q_2)}_{q} + 3 \Rightarrow r = 3$$

تست: باقیمانده تقسیم a بر ۸ برابر ۷ است. باقیمانده تقسیم $2a+1$ بر ۴ کدام است؟ صفر ۱ ۲ ۳

$$a = 8k+7 \Rightarrow 2a+1 = 16k+15$$

$$\Rightarrow 2a+1 = 4(4k) + 12 + 3 = 4\underbrace{(4k+3)}_{q} + 3 \Rightarrow r=3$$

مثال: اگر باقیمانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(2m-5n)$ بر ۱۷ را بدست آورید.

$$m = 17q_1 + 5 \quad , \quad n = 17q_2 + 3$$

$$\Rightarrow 2m - 5n = 2\times 17q_1 + 10 - 5\times 17q_2 - 15$$

$$= 17(2q_1 - 5q_2) - 5$$

$$= 17(2q_1 - 5q_2) - 17 + 12$$

$$= 17\underbrace{(2q_1 - 5q_2 - 1)}_{q} + 12 \Rightarrow r = 12$$

افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم :

اگر عدد صحیحی مثل a را بر ۳ تقسیم کنیم یکی از سه حالت زیر رخ می‌دهد :

۱- a بر ۳ بخش‌پذیر باشد یعنی باقیمانده صفر شود در این صورت : $a=3k$

۲- a بر ۳ بخش‌پذیر نبوده و باقیمانده آن ۱ شود، یعنی : $a=3k+1$

۳- a بر ۳ بخش‌پذیر نبوده و باقیمانده آن ۲ شود پس : $a=3k+2$

به عبارت دیگر طبق قضیه تقسیم $a=3k+r$ و $0 \leq r < 3$ می‌باشد یعنی : $r=0$ یا $r=1$ یا $r=2$ است.

مسئله ۱ : اگر $m \in \mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $2k$ یا $2k+1$ (زوج یا فرد) می‌توان نوشت.

طبق قضیه تقسیم، اگر m را بر ۲ تقسیم کنیم داریم :

$$m=2k+r \ , \ 0 \leq r < 2 \Rightarrow \begin{cases} r=0 \Rightarrow m=2k \\ r=1 \Rightarrow m=2k+1 \end{cases}$$

یعنی نشان دادیم هر عدد صحیح، یا زوج است و یا فرد.

جمعه ۳۱ فروردین
20 April 2018
۳ شعبان ۱۴۳۹
۱۳۹۷

مسئله ۲ : ثابت کنید اگر $p>3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p=6k+1$ یا $p=6k+5$ نوشته می‌شود.

کافیست p را بر ۶ تقسیم کنیم، طبق قضیه تقسیم با ۶ حالت روبرو می‌شویم :

$p=6k+0 \longrightarrow$ غیرقابل قبول، زیرا $6k$ اول نیست

$p=6k+1$

$p=6k+2=2(3k+1) \longrightarrow$ غیرقابل قبول، زیرا $6k+2$ اول نیست

$p=6k+3=3(2k+1) \longrightarrow$ غیرقابل قبول، زیرا $6k+3$ اول نیست

$p=6k+4=2(3k+2) \longrightarrow$ غیرقابل قبول، زیرا $6k+4$ اول نیست

$p=6k+5$

بنابراین برای p فقط دو حالت توانستیم بنویسیم که قابل قبول باشد :

$p=6k+1$ یا $p=6k+5$

مسئله ۳: الف) ثابت کنید هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $4k+1$ یا $4k+3$ نوشته می‌شود.

طبق قضیه تقسیم، از تقسیم a بر ۴ یکی از ۴ حالت زیر رخ می‌دهد:

$a=4k+0 \longrightarrow$ غیرقابل قبول زیرا $4k$ فرد نیست

$a=4k+1$

$a=4k+2=2(2k+1) \longrightarrow$ غیرقابل قبول زیرا $4k+2$ فرد نیست

$a=4k+3$

بنابراین برای a فقط دو حالت توانستیم بنویسیم: $4k+1$ یا $4k+3$

ب) نشان دهید مربع هر عدد فرد به شکل $8t+1$ است.

طبق الف، برای هر عدد فرد یکی از دو حالت زیر تعریف می‌شود:

$$a=4k+1 \xrightarrow{\text{مربع}} a^2=16k^2+8k+1=8(\underbrace{2k^2+k}_{t})+1=8t+1$$

$$a=4k+3 \xrightarrow{\text{مربع}} a^2=16k^2+24k+9=16k^2+24k+8+1$$
$$=8(\underbrace{2k^2+3k+1}_{t'})+1=8t'+1$$

توجه:

در مسئله (۱) نشان دادیم هر عدد صحیح به صورت $2k$ یا $2k+1$ است یعنی مجموعه $\mathbb{Z}$ را می‌توان به دو مجموعه $A_1=\{2k \mid k\in \mathbb{Z}\}$ و $A_2=\{2k+1 \mid k\in \mathbb{Z}\}$ افراز کرد.

حال با توجه به این که برای هر عدد صحیح a یکی از چهار حالت $4k$ ، $4k+1$ ، $4k+2$ ، $4k+3$ تعریف می‌شود، می‌توان گفت: مجموعه $\mathbb{Z}$ به ۴ مجموعه زیر افراز می‌شود:

$B_1=\{4k \mid k\in \mathbb{Z}\}$ ، $B_2=\{4k+1 \mid k\in \mathbb{Z}\}$ ، $B_3=\{4k+2 \mid k\in \mathbb{Z}\}$

$B_4=\{4k+3 \mid k\in \mathbb{Z}\}$

مثال: مجموعه $\mathbb{Z}$ را به ۳ مجموعه افراز کنید.

$A_1=\{3k \mid k\in \mathbb{Z}\}$ ، $A_2=\{3k+1 \mid k\in \mathbb{Z}\}$ ، $A_3=\{3k+2 \mid k\in \mathbb{Z}\}$

حل چند نمونه سؤال :

۱- اگر باقیماندهٔ تقسیم عدد a بر اعداد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقیماندهٔ تقسیم عدد a بر ۵۶ را بیابید.

$$a = 7q_1 + 5 \xrightarrow{\times 8} 8a = 56q_1 + 40$$
$$a = 8q_2 + 7 \xrightarrow{\times 7} 7a = 56q_2 + 49$$
$$\longrightarrow a = 56(q_1 - q_2) - 9, \quad -9 = -56 + 47$$
$$\Longrightarrow a = 56(q_1 - q_2 - 1) + 47 \longrightarrow r = 47$$

۲- اگر a عدد صحیح و فرد باشد و $b \mid a+2$ در این صورت باقیماندهٔ تقسیم عدد (a^2+b^2+3) را بر ۸ بیابید.

$$a \text{ عدد صحیح فرد} \Rightarrow a = 2n+1 \xrightarrow{b \mid a+2} b \mid 2n+3$$
$$\Longrightarrow b \text{ فرد} \Rightarrow b = 2m+1$$
$$a^2+b^2+3 = (2n+1)^2 + (2m+1)^2 + 3 = 4n^2 + 4n + 4m^2 + 4m + 5$$
$$= 4\underbrace{n(n+1)}_{2k} + 4\underbrace{m(m+1)}_{2k'} + 5$$

ضرب دو عدد متوالی عددی زوج است

$$= 8k + 8k' + 5 = 8(k+k') + 5 \Rightarrow r = 5$$

۳- اگر n عدد صحیح باشد ثابت کنید $3 \mid n^3 - n$

می‌دانیم: $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

برای عدد صحیح n سه حالت بررسی می‌شود:

اگر $n = 3k \Rightarrow n^3 - n = 3\underbrace{k(3k-1)(3k+1)}_{q} \Rightarrow 3 \mid n^3 - n$

اگر $n = 3k+1 \Rightarrow n^3 - n = (3k+1)(3k)(3k+2) = 3\underbrace{k(3k+1)(3k+2)}_{q'} \Rightarrow 3 \mid n^3 - n$

اگر $n = 3k+2 \Rightarrow n^3 - n = (3k+2)(3k+1)\overbrace{(3k+3)}^{3(k+1)} = 3\underbrace{(k+1)(3k+2)(3k+1)}_{q''} \Rightarrow 3 \mid n^3 - n$

بنابراین حکم ثابت است.

۴- اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقیمانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.

$a \,|\, \underline{b}$ ، q ، r (باقیمانده) $\Rightarrow a = bq + r \xrightarrow{a=nk,\ b=nk'}$

$nk = nk'q + r \Rightarrow r = n\underbrace{(k-k'q)}_{Q} \Rightarrow$ r بر n بخش پذیر است

۱۳۹۷

۵- اگر a عدد صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش پذیر است.

برای هر عدد صحیح دلخواه a سه حالت قابل بررسی است:

۱) $a = 3k \Rightarrow$ a بر ۳ بخش پذیر است

۲) $a = 3k+1 \Rightarrow a+2 = 3k+3 = 3(k+1) \Rightarrow$ $a+2$ بر ۳ بخش پذیر است

۳) $a = 3k+2 \Rightarrow a+4 = 3k+6 = 3(k+2) \Rightarrow$ $a+4$ بر ۳ بخش پذیر است

۶- ثابت کنید تفاضل مکعب های دو عدد صحیح متوالی، عددی فرد است.

دو عدد صحیح و متوالی k و $k+1$ را در نظر می‌گیریم:

$(k+1)^3 - k^3 = \cancel{k^3} + 3k^2 + 3k + 1 - \cancel{k^3} = 3\underbrace{k(k+1)}_{2n} + 1$

$= 2\underbrace{(3n)}_{m} + 1 = 2m+1 \longrightarrow$ فرد است

روش دیگر:

اگر آن دو عدد صحیح متوالی $2k$ ، $2k+1$ باشند:

$(2k+1)^3 - (2k)^3 = \cancel{8k^3} + 12k^2 + 6k + 1 - \cancel{8k^3}$

$= 2\underbrace{(6k^2+3k)}_{n} + 1 = 2n+1 \longrightarrow$ فرد است

۷- ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد متوالی همواره بر !۳ بخش‌پذیر است.

اگر آن سه عدد صحیح متوالی $n-1$, n , $n+1$ باشند، حاصلضرب آنها n^3-n است.

طبق مسئله‌ای از قبل (سؤال ۳) میدانیم $3|n^3-n$.

از طرفی حاصلضرب دو عدد متوالی همواره زوج است پس $2|n^3-n$.

بنابراین $6|n^3-n$ یعنی n^3-n بر !۳ بخش‌پذیر است.

۱۳۹۷ چند نمونه تست:

۱- عدد $xy(x-y)+1$ بر کدام یک از اعداد زیر ممکن است بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۰

درصورتی که حداقل یکی از اعداد x یا y زوج باشند، عدد $xy(x-y)+1$ فرد است.

اما درحالتی که x و y هر دو فرد باشند $x-y$ زوج بود و در نتیجه $xy(x-y)+1$ فرد است.

پس در هر حالت، عدد $xy(x-y)+1$ عددی فرد است پس نمی‌تواند بر ۴ یا ۶ یا ۱۰ بخش‌پذیر باشد و ممکن است بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

لذا گزینه ۲ صحیح است.

۲- اگر عدد صحیح n بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، n^2 به کدام صورت است؟

۱) $3k-1$ ۲) $9k-2$ ۳) $3k+1$ ۴) $9k^2+1$

$$\text{I}: n=3q+1 \Rightarrow n^2=9q^2+6q+1=3\underbrace{(3q^2+2q)}_{k}+1=3k+1$$

$$\text{II}: n=3q+2 \Rightarrow n^2=9q^2+12q+4=9q^2+12q+3+1=3\underbrace{(3q^2+4q+1)}_{k'}+1=3k'+1$$

گزینه ۳ ←

۳- اجتماع دو مجموعه $A=\{4k+1 | k\in Z\}$, $B=\{4k+3 | k\in Z\}$ کدام است؟

۱) $\{4k | k\in Z\}$ ۲) $\{2k+1 | k\in Z\}$ ۳) $\{8k+4 | k\in Z\}$ ۴) $\{4k+3 | k\in Z\}$

با توجه به باقیمانده تقسیم هر عدد صحیح بر ۴، میتوان اعداد صحیح را به صورت اعداد $4k$ ، $4k+1$ ، $4k+2$ ، $4k+3$ ابراز کرد.

که $4k+1$ و $4k+3$ فرد می‌باشند و تمام اعداد صحیح فرد را با اجتماع آنها بدست می‌آوریم. گزینه ۲

۴۰ـ چند نقطه با مختصات صحیح بر منحنی $3y - x^3 + x + 1 = 0$ قرار دارد؟

۱) صفر ۲) دو ۳) سه ۴) بیش از ۳

گزینه ۱ ← تساوی هیچگاه برقرار نیست ⟸

$$\underbrace{3y+1}_{\text{مضرب ۳ نیست}} = \underbrace{x^3 - x}_{\text{نشان دادیم مضرب ۳}}$$

۴۱ـ چند نقطه با مختصات صحیح بر منحنی $y = \frac{x^2-1}{8}$ وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) بی‌شمار

اگر x فرد باشد مربع آن $x^2 = 8k+1$ است. پس $y = \frac{8k+1-1}{8} = k$

پس بی‌شمار x یعنی بی‌شمار نقطه‌ی صحیح وجود دارد.

گزینه ۴

sinxcosx.blogfa.com

ملاسعیدی - آبادان

۱۳۹۷

همنهشتی: برای هر عدد طبیعی m و هر دو عدد صحیح a و b، اگر $m|a-b$ گوییم a همنهشت با b به پیمانهٔ (سنج) m است و می‌نویسیم: $a \overset{m}{\equiv} b$

به عبارت دیگر: $\forall a,b\in\mathbb{Z},\ a\overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m|a-b \quad (m\in\mathbb{N})$

به طور مثال: $21 \overset{4}{\equiv} 1$ زیرا $21-1=20$ و $4|20$.

مثال: نشان دهید: $(a+b)^2 \overset{ab}{\equiv} a^2+b^2$

$$(a+b)^2-(a^2+b^2)=a^2+b^2+2ab-a^2-b^2=2ab \ , \ ab|2ab$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \overset{ab}{\equiv} a^2+b^2$$

ویژگی های همنهشتی:

$$(1)\ a\overset{m}{\equiv}b \rightarrow a\pm c\overset{m}{\equiv}b\pm c$$

اثبات:

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|(a+c)-(b+c) \Rightarrow a+c\overset{m}{\equiv}b+c$$

همچنین: $m|a-b \Rightarrow m|(a-c)-(b-c) \Rightarrow a-c\overset{m}{\equiv}b-c$

$$(2)\ a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$$

اثبات:

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|c(a-b) \Rightarrow m|ac-bc$$

$$\Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$$

تذکر: عکس ویژگی (2) برقرار نیست یعنی از $ac\overset{m}{\equiv}bc$ نمی‌توان نتیجه گرفت: $a\overset{m}{\equiv}b$

$$(3)\ a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n \quad (n\in\mathbb{N})$$

اثبات:

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})$$

$$\Rightarrow m|a^n-b^n \Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$$

تذکر: عکس ویژگی (3) برقرار نیست یعنی از $a^n\overset{m}{\equiv}b^n$ نمی‌توان نتیجه گرفت $a\overset{m}{\equiv}b$.

$$(4)\ a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ c\overset{m}{\equiv}d \Rightarrow \begin{cases} ac\overset{m}{\equiv}bd \\ a\pm c\overset{m}{\equiv}b\pm d \end{cases}$$

اثبات :

$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m|a-b \xrightarrow{\times c} m|ac-bc$

$c\overset{m}{\equiv}d \Rightarrow m|c-d \xrightarrow{\times b} m|bc-bd$

$\xrightarrow{+} m|ac-bd \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bd$

$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m|a-b$

$c\overset{m}{\equiv}d \Rightarrow m|c-d$

$\xrightarrow{+} m|(a+c)-(b+d) \Rightarrow a+c\overset{m}{\equiv}b+d$

$\xrightarrow{-} m|(a-c)-(b-d) \Rightarrow a-c\overset{m}{\equiv}b-d$

مثال : ثابت کنید $۹۷^{۳}+۱۴۴^{۲}\overset{۵}{\equiv}۴$

$۹۷\overset{۵}{\equiv}۲ \xrightarrow{\text{توان ۳}} ۹۷^{۳}\overset{۵}{\equiv}۸\overset{۵}{\equiv}۳$

$۱۴۴\overset{۵}{\equiv}-۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱۴۴^{۲}\overset{۵}{\equiv}۱$

$\xrightarrow{+} ۹۷^{۳}+۱۴۴^{۲}\overset{۵}{\equiv}۴$

تذکر : هرگاه بخواهیم همنهشت عدد a را به پیمانه m تعیین کنیم کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقیمانده (r) را بدست آوریم که: $a\overset{m}{\equiv}r$

اثبات : $a=mq+r \Rightarrow m|a-r \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}r$

نتیجه : اگر a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m، باقیمانده یکسان داشته باشند آنگاه:

$a\overset{m}{\equiv}b$

مثال : باقیمانده تقسیم عدد $A=۲۷^{۷}+۱۹$ را بر ۱۳ بدست آورید.

$۲۷\overset{۱۳}{\equiv}۱ \xrightarrow{\text{توان ۷}} ۲۷^{۷}\overset{۱۳}{\equiv}۱$

$۱۹\overset{۱۳}{\equiv}۶$

$\xrightarrow{+} A\overset{۱۳}{\equiv}۷ \rightarrow$ باقیمانده ۷ است

مثال : باقیمانده تقسیم عدد $A=۱۲\times(۱۰۰۰)^{۱۳}+۱۰$ را بر ۷ بدست آورید.

$۱۰۰۰\overset{۷}{\equiv}۶\overset{۷}{\equiv}-۱ \xrightarrow{\text{توان ۱۳}} (۱۰۰۰)^{۱۳}\overset{۷}{\equiv}-۱ \xrightarrow{\times ۱۲} (۱۰۰۰)^{۱۳}\times۱۲\overset{۷}{\equiv}-۱۲\overset{۷}{\equiv}۲$

$۱۰\overset{۷}{\equiv}۳$

$\xrightarrow{+}$

$A\overset{۷}{\equiv}۵ \Rightarrow r=۵$

⑤ $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a\pm mt\overset{m}{\equiv}b\pm mk$

اثبات :

$a\overset{m}{\equiv}b$

$mt\overset{m}{\equiv}mk$

$\xrightarrow{\pm} a\pm mt\overset{m}{\equiv}b\pm mk$

⑥ $ac\overset{m}{\equiv}bc \xrightarrow{(m,c)=d} a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b$

مثال: $۹۰\overset{۱۲}{\equiv}۵۴ \xrightarrow[(۱۲,۱۸)=۶]{\div ۱۸} ۵\overset{۲}{\equiv}۳$

نتیجه مهم : اگر $(m,c)=۱$ آنگاه :

$ac\overset{m}{\equiv}bc \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}b$

مثال: اگر رقم یکان اعداد $5a+2$ و $2a+6$ یکسان باشد، رقم یکان عدد $7a-3$ را بیابید.

$$5a+2 \overset{10}{\equiv} 2a+6 \Rightarrow 3a \overset{10}{\equiv} 4 \xrightarrow{\text{راست} + (-10)}$$

$$3a \overset{10}{\equiv} -6 \xrightarrow{\div 3} a \overset{10}{\equiv} -2$$

$$\xrightarrow{\times 7} 7a \overset{10}{\equiv} -14 \xrightarrow{\text{راست} + (20)} 7a \overset{10}{\equiv} 6 \xrightarrow{-3}$$

$7a-3 \overset{10}{\equiv} 3 \Rightarrow$ رقم یکان ۳ می‌باشد

حل چند نمونه سؤال:

۱- اگر باقیمانده عدد A بر ۲۷ برابر ۲۳ باشد و $2A-3 \overset{27}{\equiv} x$، آنگاه مقدار x برابر است با:

۶ ۱۷ ۲۰ ۲۶

$$A \overset{27}{\equiv} 23 \xrightarrow{\times 2} 2A \overset{27}{\equiv} 46 \xrightarrow{-3} 2A-3 \overset{27}{\equiv} 43 \overset{27}{\equiv} 6$$

$$x=6$$

جمعه ۱۴ اردیبهشت
4 May 2018
۱۷ شعبان ۱۴۳۹
۱۳۹۷

۲- اگر باقیمانده a و b بر ۷ به ترتیب ۳ و ۴ باشد، باقیمانده عدد $2a+ab+2b$ بر ۷ کدام است؟

۵ ۷ ۱ ۳

$$a \overset{7}{\equiv} 3 \xrightarrow{\times 2} 2a \overset{7}{\equiv} 6$$

$$b \overset{7}{\equiv} 4 \xrightarrow{\times 2} 2b \overset{7}{\equiv} 8$$

$$ab \overset{7}{\equiv} 12$$

$$\xrightarrow{+} 2a+ab+2b \overset{7}{\equiv} 26 \overset{7}{\equiv} 5$$

گزینه ۱

۳- باقیمانده تقسیم 2^{23} بر ۱۷ کدام است؟ ۱۶ ۱۳ ۴ ۹

$$2^4 \overset{17}{\equiv} -1 \xrightarrow{\text{توان ۵}} 2^{20} \overset{17}{\equiv} -1$$

$$\xrightarrow{\times 2^3} 2^{23} \overset{17}{\equiv} -8 \overset{17}{\equiv} 9$$

گزینه ۴ جواب است.

۴- اگر a مضرب ۱۶ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم

$$(17a+1)^2+(17a+2)^2+(17a+3)^2+(17a+4)^2+(17a+5)^2$$

بر ۴ کدام است؟ ۳ ۱ صفر ۲

a مضرب ۱۶ است پس a بر ۴ بخش‌پذیر است پس: $a \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow 17a \overset{4}{\equiv} 0$

$$\text{عدد مورد سؤال} \overset{4}{\equiv} (0+1)^2+(0+2)^2+(0+(-1))^2+(0+0)^2+(0+1)^2$$

$$\overset{4}{\equiv} 1+4+1+0+1$$

$$\overset{4}{\equiv} 7 \overset{4}{\equiv} 3 \longrightarrow$$ گزینه ۴

۵- رقم سمت راست عدد $k=(1!+3!+5!+\cdots+1397!)(2!+4!+6!+\cdots+1398!)$ کدام است؟ ۱ ۴ ۲ صفر

$5! \overset{10}{\equiv} 0$ و بقیه ، $4! \overset{10}{\equiv} 4$ و $3! \overset{10}{\equiv} 6$ ، $2! \overset{10}{\equiv} 2$ و $1! \overset{10}{\equiv} 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2!+4!+6!+\cdots+1398! \overset{10}{\equiv} 2+4+0+\cdots+0 \overset{10}{\equiv} 6 \\ 1!+3!+5!+\cdots+1397! \overset{10}{\equiv} 1+6+0+\cdots+0 \overset{10}{\equiv} 7 \end{cases} \xrightarrow{\times} k \overset{10}{\equiv} 42 \overset{10}{\equiv} 2$$

گزینه ۲

مثال: باقیمانده تقسیم عدد $A=1358$ را بر عدد ۹ بیابید.

$$A=1\times10^3+3\times10^2+5\times10+8$$

می‌دانیم: $10 \overset{9}{\equiv} 1 \Rightarrow 10^n \overset{9}{\equiv} 1$

$$\Rightarrow A \overset{9}{\equiv} 1+3+5+8 \overset{9}{\equiv} 17 \overset{9}{\equiv} 8$$

طبق این مثال درس می‌رسیم به: برای محاسبه باقیمانده عدد A بر ۹ کافی است باقیمانده مجموع ارقام عدد A را بر ۹ حساب کرد.

نکته: باقیمانده تقسیم هر عدد طبیعی بر عدد ۹، برابر است با باقیمانده مجموع ارقام آن عدد در تقسیم بر عدد ۹.

اثبات: عدد n رقمی $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0}$ را در نظر می‌گیریم:

$$A=a_{n-1}\times10^{n-1}+a_{n-2}\times10^{n-2}+\cdots+a_1\times10^1+a_0$$

می‌دانیم: $\forall n\in\mathbb{N}: 10^n \overset{9}{\equiv} 1$

$$\Rightarrow A \overset{9}{\equiv} a_{n-1}\times1+a_{n-2}\times1+\cdots+a_1\times1+a_0$$

$$\Rightarrow A \overset{9}{\equiv} a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1+a_0$$

سؤال: ثابت کنید باقیمانده تقسیم عدد n رقمی $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0}$ بر ۳ برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام A بر ۳.

$$A=a_{n-1}\times 10^{n-1}+a_{n-2}\times 10^{n-2}+\cdots+a_1\times 10^1+a_0$$

میدانیم: $10\overset{3}{\equiv}1 \Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: 10^n\overset{3}{\equiv}1$

$$\Rightarrow A\overset{3}{\equiv}a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1+a_0$$

سؤال: باقیمانده تقسیم عدد $A=4985327$ را بر 11 حساب کنید.

$$A=4\times10^6+9\times10^5+8\times10^4+5\times10^3+3\times10^2+2\times10^1+7$$

میدانیم: $10\overset{11}{\equiv}-1 \Longrightarrow 10^{\text{زوج}}\overset{11}{\equiv}1$ و $10^{\text{فرد}}\overset{11}{\equiv}-1$

$$\Rightarrow A\overset{11}{\equiv}4\times1+9\times(-1)+8\times1+5\times(-1)+3\times1+2\times(-1)+7$$

$\Rightarrow A\overset{11}{\equiv}4-9+8-5+3-2+7 \Rightarrow A\overset{11}{\equiv}6 \Rightarrow$ باقیمانده ۶ است.

نکته: باقیمانده تقسیم عدد n رقمی $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0}$ بر هر یک از اعداد ۲ یا ۵ یا ۱۰ برابر است با باقیمانده رقم یکان A (یعنی a_0) بر هر کدام از این اعداد.

اثبات:

$$A=a_{n-1}\times10^{n-1}+a_{n-2}\times10^{n-2}+\cdots+a_1\times10^1+a_0$$

میدانیم: $10\overset{2}{\equiv}0$, $10\overset{5}{\equiv}0$, $10\overset{10}{\equiv}0 \Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: 10^n\overset{2}{\equiv}0,\ 10^n\overset{5}{\equiv}0,\ 10^n\overset{10}{\equiv}0$

$$\Rightarrow A\overset{2}{\equiv}a_{n-1}\times0+a_{n-2}\times0+\cdots+a_1\times0+a_0 \Rightarrow A\overset{2}{\equiv}a_0$$

و $A\overset{5}{\equiv}a_0$ و $A\overset{10}{\equiv}a_0$

نتیجه: عدد A وقتی بر ۲ یا ۵ یا ۱۰ بخش پذیر است که رقم یکان آن (یعنی a_0) بر ۲ یا ۵ یا ۱۰ بخش پذیر باشد.

به عبارت دیگر عدد A وقتی بر ۲ بخش پذیر است که رقم یکان آن زوج باشد

و عدد A " " ۵ " " " " ۰ یا ۵ باشد

و " A " " ۱۰ " " " " صفر باشد

قرارداد: مجموعه همه اعداد صحیح که باقیمانده تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر r می باشد را کلاس یا دسته همنهشتی r به پیمانه m گوییم: $[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$

مثال: عدد ۱۲۹۸ به کدام دسته همنهشتی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟

$1298 \div 9 = 144$، باقیمانده 3 $\Rightarrow 1298 \overset{9}{\equiv} 3 \Rightarrow [3]_9 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 9k + 3\}$

تست: عدد ۲۰۹- به کدام دسته همنهشتی به پیمانه ۱۲ تعلق دارد؟

$[9]$ $[7]$ $[-7]$ $[-9]$

$209 \div 12 = 17$، باقیمانده 5 $\Rightarrow -209 \overset{12}{\equiv} -5 \overset{12}{\equiv} 7 \Rightarrow [7]_{12}$ → گزینه ۲

مثال: امروز ۱۸ مرداد ماه، پنجشنبه می باشد، ۲۹ شهریور ماه چند شنبه است؟

مرداد: $31 - 18 = 13$
شهریور: 29
$\xrightarrow{+}$ ۴۲ روز $\Rightarrow 42 \overset{7}{\equiv} 0$ → پنجشنبه می باشد

ج	س	د	ی	ش	ج	پ
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

مثال: اگر در یک سال، اول مهر، شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

مهر: $30 - 1 = 29$
آبان + آذر + دی: $3 \times 30 = 90$
بهمن: 12
$\xrightarrow{+} 131 \Rightarrow 131 \overset{7}{\equiv} 5$ → پنجشنبه می باشد

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

مثال: اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

دی + آذر + آبان + مهر + شهریور: $31 + 4 \times 30 = 151$
بهمن: 12
$\xrightarrow{+} 163$

$163 \overset{7}{\equiv} 2$

س	د	ی	ش	چ	پ	ج
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

چهارشنبه

20

تست: بیست و هفتم اردیبهشت روز سه شنبه است، سومین شنبه در ماه اردیبهشت کدام روز ماه است؟

۲۰ ۱۹ ۱۸ ۱۷

طبق فرض ۲۴ اردیبهشت شنبه است پس شنبه ها عبارتند از:

$$۳۱ \xleftarrow{+۷} ۲۴ \xrightarrow{-۷} ۱۷ \xrightarrow{-۷} ۱۰ \xrightarrow{-۷} ۳$$

سومین شنبه   دومین شنبه   اولین شنبه

جواب ۱۷ است.

تست: ۱۷ شهریور سالی شنبه است. ۲۲ بهمن این سال چه روزی از هفته است؟ شنبه   جمعه   دوشنبه   یکشنبه

مثال های این گونه را می توانیم با روز قبل یا بعد حساب کنیم.

: بهمن + دی + آذر + آبان + مهر + شهریور

$$۱۴ + ۴ \times ۳۰ + ۲۲ \overset{۷}{\equiv} ۵ + ۴ \times ۲ + ۱ = ۹ \overset{۷}{\equiv} ۲$$

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

دوشنبه

تست: از انتهای کمان ۱۳۵° روی دایره مثلثاتی به اندازه ۴۰۰۵° در خلاف جهت دایره ی مثلثاتی حرکت می کنیم، انتهای کمان حاصل کدام است؟

۱۸۰   ۹۰   ۱۳۵   ۴۵

$$۴۰۰۵ \overset{۳۶۰}{\equiv} ۴۵$$

حالا اگر از ۱۳۵ به اندازه ۴۵ خلاف جهت دایره مثلثاتی حرکت کنیم به $۹۰ = ۴۵ - ۱۳۵$ می رسیم.

معادله همنهشتی:

می خواهیم اعدادی را بیابیم که به پیمانه ۲، همنهشت با ۱ باشند، یعنی آن اعداد را با x نمایش دهیم، در این صورت:

$$x \overset{۲}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{تعریف همنهشتی}} ۲ \mid x-۱ \Rightarrow x-۱ = ۲k \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = ۲k+۱ \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

حال با نسبت دادن مقادیر مختلف صحیح به k می توان اعداد متمایزی برای x یافت:

k	...	۲-	۱-	۰	۱	۲	۳	...
x	...	۳-	۱-	۱	۳	۵	۷	...

توجه: $x = ۲k+۱$ را جواب عمومی معادله همنهشتی گویند.

مثال: معادلهٔ همنهشتی $4x \overset{5}{\equiv} 17$ را حل کرده و جواب‌های طبیعی کمتر از ۲۰ را بیابید.

$$4x \overset{5}{\equiv} 17-5 \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 12 \xrightarrow[(4,5)=1]{\div 4} x \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow x = 5k+3$$

جواب عمومی معادله

k	0	1	2	3	$\cancel{4}$
x	3	8	13	18	$\cancel{23}$

$\Rightarrow$ جواب‌های مورد نظر ۳ و ۸ و ۱۳ و ۱۸ می‌باشند.

مثال: همهٔ اعداد صحیح را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش‌پذیر باشد.

$$7 \mid 3x-13 \Rightarrow 3x-13 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 13$$

$$\Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 13-7 \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 6 \xrightarrow[(3,7)=1]{\div 3} x \overset{7}{\equiv} 2$$

$$\Rightarrow x = 7k+2 \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

قضیه: معادلهٔ همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است،
اگر و فقط اگر $(a,m) \mid b$.

نتیجه: اگر $(a,m)=1$ بدیهی است که معادله همواره دارای جواب است.

مثال: معادلات زیر را در صورت امکان حل کنید.

الف) $6x \overset{9}{\equiv} 11$

$$(6,9)=3 \ , \ 3 \nmid 11 \Rightarrow$$ معادله جواب ندارد

ب) $4x \overset{6}{\equiv} 18$

$$(4,6)=2 \ , \ 2 \mid 18 \Rightarrow$$ معادله دارای جواب است

$$4x \overset{6}{\equiv} 18-6 \Rightarrow 4x \overset{6}{\equiv} 12 \xrightarrow[(4,6)=2]{\div 4} x \overset{\frac{6}{2}}{\equiv} 3$$

$$\Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 3 \Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 3-3 \Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow x = 3k$$

مثال: اعداد صحیح x را پیدا کنید که در تقسیم بر اعداد ۸ و ۱۲ به ترتیب باقیمانده‌های ۲ و ۱۰ داشته باشند.

$$x \overset{8}{\equiv} 2 \Rightarrow x = 8k+2 \xrightarrow{x \overset{12}{\equiv} 10} 8k+2 \overset{12}{\equiv} 10$$

$$\Rightarrow 8k \overset{12}{\equiv} 8 \xrightarrow[(8,12)=4]{\div 8} k \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow k = 3n+1$$

$$\xrightarrow{x=8k+2} x = 24n+10 \ , \ n \in \mathbb{Z}$$

حل معادلهٔ سیاله و کاربردهای آن:

اگر a ، b و c اعداد صحیح ثابت فرض شوند، معادلهٔ $ax+by=c$ را معادلهٔ سیاله گوییم به طوری که $x, y \in \mathbb{Z}$ باشند.

برای حل باید معادله را به یک معادلهٔ همنهشتی بر حسب x یا بر حسب y تبدیل کرد.

به طور مثال معادلهٔ سیالهٔ $4x+5y=9$ را در نظر بگیرید، ابتدا آن را به یک معادلهٔ همنهشتی بر حسب x تبدیل می‌کنیم:

$$4x=-5y+9$$

$$\Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 9 \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 9-5=4 \xrightarrow{\div 4} x \overset{5}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x=5k+1} \ , \ k\in \mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{4x+5y=9} 20k+4+5y=9 \Rightarrow \boxed{y=-4k+1} \ , \ k\in \mathbb{Z}$$

مثال: معادلهٔ سیالهٔ $4x+3y=19$ را بر حسب y به یک معادلهٔ همنهشتی تبدیل کرده و حل کنید.

$$3y=-4x+19$$

$$\Rightarrow 3y \overset{4}{\equiv} 19 \Rightarrow 3y \overset{4}{\equiv} 19-4=15 \xrightarrow{\div 3} y \overset{4}{\equiv} 5$$

$$\Rightarrow \boxed{y=4k+5} \ , \ k\in \mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{4x+3y=19} 4x+12k+15=19 \Rightarrow \boxed{x=-3k+1} \ , \ k\in \mathbb{Z}$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۷۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ تومانی و ۵۰۰۰ تومانی خرد کرد؟

$x =$ تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ تومانی و $y =$ تعداد اسکناس های ۵۰۰۰ تومانی

$$2000x+5000y=17000 \xrightarrow{\div 1000} 2x+5y=17$$

$$\Rightarrow 2x=17-5y$$

$$\Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 17 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 17-5=12 \xrightarrow{\div 2} x \overset{5}{\equiv} 6$$

$$\Rightarrow x=5k+6 \ , \ k\in \mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{2x+5y=17} 10k+12+5y=17 \Rightarrow y=-2k+1 \ , \ k\in \mathbb{Z}$$

k	-1	0	1
x	1	6	~~11~~
y	3	1	~~-1~~

$\Rightarrow$ به دو حالت می‌توان خرد کرد

حالت اول: یک دوهزار تومانی و ۳ پنج هزار تومانی

حالت دوم: ۶ دوهزار تومانی و ۱ " "

مثال : در یک رستوران فقط دو نوع غذای قورمه سبزی و قیمه وجود دارد اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می توانند سفارش غذا بدهند. (هر نفر فقط یک پرس غذا میل کند.)

$$x + y = 5 \Rightarrow x = -y + 5$$

$$x \overset{1}{\equiv} 5 \Rightarrow x = k + 5$$

$$\xrightarrow{x+y=5} k + 5 + y = 5 \Rightarrow y = -k$$

k	۰	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵
قورمه سبزی = x	۵	۴	۳	۲	۱	۰
قیمه = y	۰	۱	۲	۳	۴	۵

پس به ۶ طریق می توانند سفارش غذا دهند

مثال : تیرانداز به سمت یک هدف شامل دو دایرهٔ هم مرکز تیراندازی می کند، اگر به دایرهٔ با شعاع کوچک تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایرهٔ بزرگتر بزند ۳ امتیاز می گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر، تیراندازی کرده باشد و همهٔ تیرها داخل دایرهٔ بزرگ تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیراندازی می تواند ثبت شود؟

x = تعداد تیرهای ۵ امتیازی و y = تعداد تیرهای ۳ امتیازی

$$5x + 3y = 42 \Rightarrow 5x = -3y + 42$$

$$5x \overset{3}{\equiv} 42 \Rightarrow 5x \overset{3}{\equiv} 42 + 3 = 45 \xrightarrow{\div 5} x \overset{3}{\equiv} 9$$

$$\Rightarrow x = 3k + 9$$

$$\xrightarrow{5x+3y=42} 15k + 45 + 3y = 42 \Rightarrow y = -5k - 1$$

k	-۱	-۲	-۳
تیر ۵ = x	۶	۳	۰
تیر ۳ = y	۴	۹	۱۴

مشاهده می شود که سه حالت وجود دارد و مجموع تیراندازی ها در هر حالت کمتر از ۱۵ است.

تست: معادله سیاله $15x+14y=1050$ در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟ ۱۳۹۵

۲ ۳ ۴ ۵

$15x=-14y+1050$

$\Rightarrow 15x \overset{14}{\equiv} 1050 \xrightarrow{\div 15} x \overset{14}{\equiv} 70 \Rightarrow x=14k+70$

$15x+14y=1050 \rightarrow 210k+1050+14y=1050 \Rightarrow y=-15k$

$\Rightarrow \begin{cases} 14k+70>0 \Rightarrow k>-5 \\ -15k>0 \Rightarrow k<0 \end{cases} \Rightarrow -5<k<0 \Rightarrow k=-4,-3,-2,-1$

۴ جواب طبیعی دارد.

تست: کمترین تعداد تمبر لازم برای بسته‌ای که نیاز به ۸۵۰ ریال تمبر دارد، با توجه به تمبرهای ۹۰ و ۵۰ ریالی کدام است؟

۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴

$50x+90y=850 \xrightarrow{\div 10} 5x+9y=85 \Rightarrow 5x=-9y+85$

$\Rightarrow 5x \overset{9}{\equiv} 85 \xrightarrow{\div 5} x \overset{9}{\equiv} 17 \Rightarrow x=9k+17$

$5x+9y=85 \rightarrow 45k+85+9y=85 \Rightarrow y=-5k$

k	0	-1	-2
x	17	8	~~-1~~
y	0	5	~~10~~

$\Rightarrow \min(x+y)=8+5=13$

تست: مجموع ارقام بزرگترین عدد سه رقمی y که در رابطه $14x+18y=10$ صدق می‌کند کدام است؟

۱۹ ۲۱ ۲۵ ۲۳

$\xrightarrow{\div 2} 7x+9y=5 \Rightarrow 9y=-7x+5$

$\Rightarrow 9y \overset{7}{\equiv} 5 \Rightarrow 9y \overset{7}{\equiv} 5-14=-9 \overset{\div 9}{\Rightarrow} y \overset{7}{\equiv} -1$

$\Rightarrow y=7k-1 \xrightarrow{\text{y سه رقمی}} 7k-1<1000 \Rightarrow 7k<1001$

$\Rightarrow k<\frac{1001}{7} \Rightarrow k<143 \xrightarrow{k=142} \max(y)=7\times 142-1=993$

مجموع ارقام y = $9+9+3=21$

حل تمرین های صفحات ۲۹ و ۳۰ کتاب درسی

۲- اگر $k\in \mathbb{Z}$ ثابت کنید، فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است:

$k \overset{3}{\equiv} 0$ یا $k \overset{3}{\equiv} 1$ یا $k \overset{3}{\equiv} 2$

(به عبارت دیگر $k\in[0]_3$ یا $k\in[1]_3$ یا $k\in[2]_3$)

باقیمانده تقسیم هر عدد صحیح همچون k بر ۳ یکی از اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ می‌باشد، پس $3|k-0$ یا $3|k-1$ یا $3|k-2$ و طبق تعریف همنهشتی $k \overset{3}{\equiv} 0$ یا $k \overset{3}{\equiv} 1$ یا $k \overset{3}{\equiv} 2$

۳- اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ ، $n|m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$.

$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \xrightarrow{n|m} n|a-b \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$

۴- فرض کنید $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ ، $(m,n)=d$ در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow[\text{طبق تمرین ۳}]{d|m} a \overset{d}{\equiv} b \\ b \overset{n}{\equiv} c \xrightarrow{d|n} b \overset{d}{\equiv} c \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} a \overset{d}{\equiv} c$$

۵- ثابت کنید: اگر باقیمانده‌ی تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشد آنگاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

بگیریم باقیمانده‌ی تقسیم r باشد بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} r \\ b \overset{m}{\equiv} r \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

روش دوم:

$$\left.\begin{array}{l} a = mq + r \\ b = mq' + r \end{array}\right\} \Rightarrow a-b = m(q-q') \Rightarrow m \mid a-b$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف همنهشتی}} a \overset{m}{\equiv} b$$

۶- عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آنگاه باقیمانده‌ی تقسیم دو عدد a و b بر m یکسان است.

اثبات:

بگیریم باقیمانده‌ی تقسیم a بر m برابر r_1 ، و باقیمانده‌ی تقسیم b بر m برابر r_2 باشد پس:

$$\left.\begin{array}{l} a = mq + r_1 \\ b = mq' + r_2 \end{array}\right\} \rightarrow a-b = m(q-q') + (r_1 - r_2)$$

از طرفی: $a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow a-b = mq''$

$$mq'' = m(q-q') + (r_1 - r_2) \xrightarrow{0 \leq r_1, r_2 < m} r_1 - r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$$

۷- با استفاده از بسط دوجمله‌ای خیام یعنی:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}\times a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\dots+\binom{n}{n}b^n$$

ثابت کنید برای هر $a,b\in\mathbb{Z}$ و $n\in\mathbb{N}$ همواره $(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$

$$\left.\begin{array}{l}\binom{n}{0}a^n=a^n\overset{ab}{\equiv}a^n\\ \binom{n}{1}a^{n-1}b\overset{ab}{\equiv}0\\ \binom{n}{2}a^{n-2}b^2\overset{ab}{\equiv}0\\ \vdots\\ \binom{n}{n-1}ab^{n-1}\overset{ab}{\equiv}0\\ \binom{n}{n}b^n=b^n\overset{ab}{\equiv}b^n\end{array}\right\}\xrightarrow{+}(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$$

۸- با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $23^{51}-11^{51}-12^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

$$23^{51}=(11+12)^{51}\overset{11\times12}{\equiv}11^{51}+12^{51}$$

$$\xrightarrow{-11^{51}-12^{51}}23^{51}-11^{51}-12^{51}\overset{132}{\equiv}0$$

پس حکم برقرار است.

۹- باقیمانده تقسیم عدد $A=(2^{11}+7)\times9$ را بر ۲۳ بیابید.

$$2^5\overset{23}{\equiv}9\xrightarrow{\text{توان ۲}}2^{10}\overset{23}{\equiv}81\quad 81\overset{23}{\equiv}12\longrightarrow 2^{10}\overset{23}{\equiv}12$$

$$\xrightarrow{\times2}2^{11}\overset{23}{\equiv}24\quad 24\overset{23}{\equiv}1\longrightarrow 2^{11}\overset{23}{\equiv}1\xrightarrow{+7}2^{11}+7\overset{23}{\equiv}8$$

$$\xrightarrow{\times9}(2^{11}+7)\times9\overset{23}{\equiv}72\quad 72\overset{23}{\equiv}3\longrightarrow A\overset{23}{\equiv}3\Rightarrow r=3$$

۱۰- اگر دو عدد $4a-7$ و $3a-5$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $9a+6$ را بدست آورید.

$$4a-7\overset{10}{\equiv}3a-5$$

$$\Rightarrow 4a-3a\overset{10}{\equiv}7-5\Rightarrow a\overset{10}{\equiv}2\overset{\times9}{\Longrightarrow}9a\overset{10}{\equiv}18$$

$$\overset{+6}{\Longrightarrow}9a+6\overset{10}{\equiv}24\quad\overset{24\overset{10}{\equiv}4}{\Longrightarrow}9a+6\overset{10}{\equiv}4\Rightarrow$$ رقم یکان ۴ است

۱۱- باقیمانده تقسیم عدد $A=1!+2!+3!+\dots+50!$ را بر ۱۰ بدست آورید.

$$\left.\begin{array}{l}1!\overset{10}{\equiv}1\\ 2!\overset{10}{\equiv}2\\ 3!\overset{10}{\equiv}6\\ 4!=24\overset{10}{\equiv}4\\ 5!\overset{10}{\equiv}0\\ \vdots\\ 50!\overset{10}{\equiv}0\end{array}\right\}\xrightarrow{+}A\overset{10}{\equiv}1+2+6+4+0+\dots+0=13$$

$$\overset{13\overset{10}{\equiv}3}{\Longrightarrow}A\overset{10}{\equiv}3\Rightarrow$$ رقم یکان ۳ است

۱۲- جوابهای عمومی معادله سیاله خطی $7x+5y=11$ را بدست آورید.

$7x=-5y+11$

$\Rightarrow 7x \overset{5}{\equiv} 11 \Rightarrow 7x \overset{5}{\equiv} 21 \xrightarrow{\div 7} x \overset{5}{\equiv} 3$

$\Rightarrow x=5k+3 \ , k\in \mathbb{Z}$

$7x+5y=11 \xrightarrow{\quad} 35k+21+5y=11 \Rightarrow y=-7k-2 \ , k\in \mathbb{Z}$

۱۳- به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را توسط اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی خُرد کرد؟

$2000x+5000y=29000 \xrightarrow{\div 1000} 2x+5y=29$

$\Rightarrow 2x=-5y+29$

$\Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 29 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 4 \xrightarrow{\div 2} x \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow x=5k+2 \ , k\in \mathbb{Z}$

$2x+5y=29 \rightarrow 10k+4+5y=29 \Rightarrow y=-2k+5 \ , k\in \mathbb{Z}$

k	0	1	2
تعداد ۲۰۰۰ تومانی ها $= x$	2	7	12
تعداد ۵۰۰۰ تومانی ها $= y$	5	3	1

به سه طریق می‌توان خرد کرد.

۱۴- معادله های همنهشتی زیر را درصورت امکان حل کرده وجواب های عمومی آنها را بدست آورید.

الف) $423x \overset{11}{\equiv} 79$

$423x \overset{11}{\equiv} 79+11 \Rightarrow 423x \overset{11}{\equiv} 90 \xrightarrow{\div 9} 47x \overset{11}{\equiv} 10 \rightarrow 47x \overset{11}{\equiv} 10+29\times 11$

$\Rightarrow 47x \overset{11}{\equiv} 329 \xrightarrow{\div 47} x \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow x=11k+7 \ , k\in \mathbb{Z}$

ب) $8x \overset{12}{\equiv} 20 \xrightarrow{\div 4} 2x \overset{3}{\equiv} 5 \longrightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 5-3$

$\Rightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 2 \xrightarrow{\div 2} x \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow x=3k+1 \ , k\in \mathbb{Z}$

پ) $51x \overset{6}{\equiv} 11 \quad (51,6)=3 \ , \ 3 \nmid 11 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

۱۵- اگر اول مهرماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

مهر + آبان + آذر + دی + بهمن + اسفند $=(30-1)+4\times 30+7 \overset{7}{\equiv} 2$

ی	د	س	چ	پ	ج	ش
0	1	2	3	4	5	6

سه شنبه است

۱۷- همهٔ اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به علاوهٔ ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

$$5a+9 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} -9 \Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} -9+4\times 11$$

$$\Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} 35 \xrightarrow{\div 5} a \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow a=11k+7 \quad , k\in \mathbb{Z}$$

۱۸- به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

$$3x+5y=23 \Rightarrow 3x=-5y+23 \Rightarrow 3x \overset{5}{\equiv} 23 \Rightarrow 3x \overset{5}{\equiv} 23-4\times 5$$

$$\Rightarrow 3x \overset{5}{\equiv} 3 \xrightarrow{\div 3} x \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow x=5k+1$$

$$\xrightarrow{3x+5y=23} 15k+3+5y=23 \Rightarrow y=-3k+4$$

k	۰	۱
وزنه ۳ کیلویی x	۱	۶
وزنه ۵ کیلویی y	۴	۱

به دو طریق می‌توان وزن کرد.

۱۹- به چند طریق می‌توان از بین دو گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه گل به دلخواه انتخاب کرد؟

$$x+y=9 \Rightarrow x=-y+9$$

$$\Rightarrow x \overset{1}{\equiv} 9 \Rightarrow x=k+9$$

$$\xrightarrow{x+y=9} k+9+y=9 \Rightarrow y=-k$$

k	۰	۱-	۲-	۳-	۴-	۵-	۶-	۷-	۸-	۹-
x	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
y	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

به ده طریق می‌توان انتخاب کرد.

۲۰- شخصی در یک مسابقهٔ علمی شرکت کرده و به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده است و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد) در این صورت این شخص به چه صورت‌هایی می‌توانسته این امتیاز را به دست آورده باشد؟

$$7x+9y=73$$

$$\Rightarrow 7x=-9y+73 \Rightarrow 7x \overset{9}{\equiv} 73$$

$$\Rightarrow 7x \overset{9}{\equiv} 73-5\times 9 \Rightarrow 7x \overset{9}{\equiv} 28 \xrightarrow{\div 7} x \overset{9}{\equiv} 4$$

$$\Rightarrow x=9k+4$$

$$\xrightarrow{7x+9y=73} 63k+28+9y=73 \Rightarrow y=-7k+5$$

k	۰
x	۴
y	۵

← فقط به یک صورت می‌توان ۷۳ امتیاز کسب کرد.