درس اول: معرفی گراف

گراف از واژه‌ی Graph (به معنای نمودار) گرفته شده است. ریاضیدانان سرآغاز بحث گراف را به سئوالی که مردم شهر کونیگسبرگ (در روسیه) بوده و اویلر آن را حل کرد، دانسته‌اند. البته ریاضیدانان برجسته دیگری از جمله شیخ بهایی، برای حل مسائل از مدل‌سازی با گراف بهره گرفته‌اند.

تعریف: گراف از مجموعه‌ای از نقاط (که به هر کدام **راس** می‌گوییم) و مجموعه‌ای از خطوط (که به هر کدام **یال** می‌گوییم) تشکیل شده است. هر یال بین دو راس قرار دارد. در گراف G مجموعه‌ی راس‌ها را با $V(G)$ (Vertex) و مجموعه‌ی یال‌ها را با $E(G)$ (Edge) نشان می‌دهیم.

❋❋ گراف یک روش مدل‌سازی برای نشان دادن رابطه بین اعضای یک مجموعه است.

مثال ۱: ۵ نفر به نام‌های a، b، c، d و e هنگام ملاقات با یکدیگر، به صورت زیر با یکدیگر دست داده‌اند.

a با c و d دست داده است.

b با c و e دست داده است.

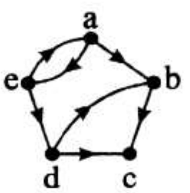
c با e دست داده است.

d با e دست داده است.

گرافی رسم کنید که نشان‌دهنده‌ی این وضعیت باشد.

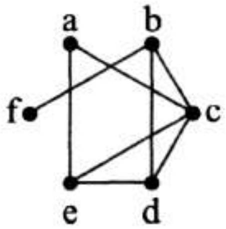
تعریف: به گرافی که یال‌های آن جهت داشته باشند، **«گراف جهت‌دار»** می‌گوییم. در نمایش گراف جهت دار با استفاده از نمادهای ریاضی، یال‌ها را با زوج مرتب نشان می‌دهیم.

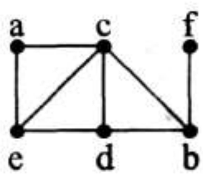
برای مثال مجموعه‌ی راس‌ها و یال‌های گراف روبرو به صورت زیر است:



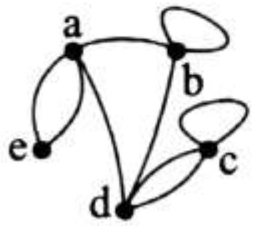
$$V=\{a,b,c,d,e\},\qquad E=\{(a,b),(b,c),(d,c),(d,b),(e,d),(e,a),(a,e)\}$$

برای رسم نمودار یک گراف روش یکتایی وجود ندارد و شکل گراف صرفاً باید مشخص کند که کدام راس‌ها به هم متصل‌اند. مثلاً دو نمودار زیر، هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند.





بین هر دو راس گراف ممکن است بیش از یک یال موجود باشد و همچنین یک یال ممکن است یک راس را به خودِ آن راس وصل کند که در این صورت به این یال **«طوقه»** گفته می‌شود.

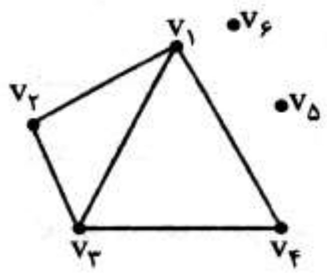


به گرافی که طوقه نداشته باشد و بین هر دو راس آن حداکثر یک یال وجود داشته باشد، **«گراف ساده»** می‌گوییم. در این فصل با گراف‌های ساده سر و کار خواهیم داشت و هرجا از گراف نام ببریم، منظور گراف ساده است.

تعریف مرتبه و اندازه‌ی گراف: به تعداد راس‌های گراف G، مرتبه‌ی گراف گفته و آن را با P نشان می‌دهیم. به تعداد یال‌های گراف G، اندازه‌ی گراف گفته و آن را با q نشان می‌دهیم.

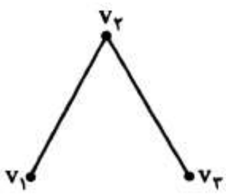
تعریف درجه راس گراف: به تعداد یال‌های متصل به گراف G که به راس v متصل‌اند، درجه‌ی آن راس گفته و آن را با $deg_G(v)$ یا $\deg(v)$ نشان می‌دهیم. اگر درجه یک راس عددی فرد باشد، به آن راسِ فرد و اگر درجه زوج باشد، به آن راس زوج می‌گوییم. در صورتی که $\deg(v) = ۰$ باشد (یعنی راس موردنظر به راس دیگری متصل نباشد) به v **راس تنها** یا **ایزوله** می‌گوییم.

مثال ۲: در گراف مقابل، مجموعه‌ی راس‌ها، مجموعه‌ی یال‌ها، مرتبه ، اندازه و درجه‌ی راس‌ها را مشخص کنید.



چند تعریف مقدماتی در گراف

دو راس مجاور: دو راس که تو سط یالی به هم مت صل شده با شند را مجاور (یا هم سایه) می‌نامیم. مثلاً در گراف زیر راس‌های مجاور و غیر مجاور عبارتند از:

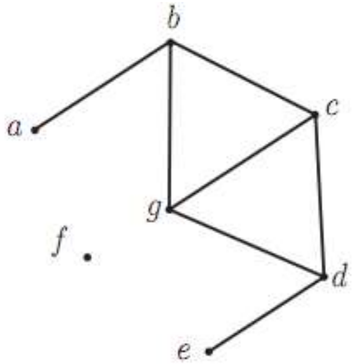


مجموعه‌های همسایه‌های یک راس: فرض کنیم $v \in V(G)$ ، به مجموعه‌ی راس‌هایی از گراف G که به راس v متصل هستند، «همسایگی باز راس v» می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. اضافه کردنِ خودِ راسِ v به $N_G(v)$ «همسایگی بسته‌ی راس v » را به دست می‌دهد که آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. می‌توان این دو مجموعه را به صورت زیر نشان داد:

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$$

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

مثال ۲: در گراف مقابل داریم:



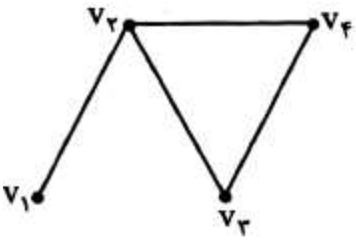
$N_G(a) = \{b\}$		$N_G[a] = \{a, b\}$

$N_G(c) = \{b, d, g\}$		$N_G[c] = \{b, c, d, g\}$

$N_G(f) = \varnothing$		$N_G[f] = \{f\}$

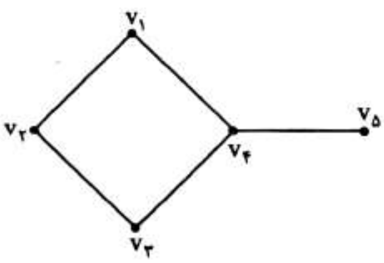
نکته: در صورتی که $N_G[v] = \emptyset$ باشد، راس v ایزوله است.

دو یال مجاور: دو یال را مجاور می‌نامیم هرگاه راسی وجود داشته باشد که هر دو یال به آن وصل باشند. مثلاً در گراف زیر یال‌های v_1v_2 و v_2v_3 مجاورند. ولی یال‌های v_1v_2 و v_3v_4 مجاور نیستند.



بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجه گراف: بزرگ‌ترین درجه در بین راس‌های یک گراف را ماکسیمم درجه نامیده و آن را با نماد $\Delta(G)$ نمایش می‌دهیم. به صورت مشابه، کوچک‌ترین درجه را می‌نیمم درجه نامیده و با نماد $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

برای مثال در گراف مقابل $\Delta = ۳$ و $\delta = ۱$



حواستان باشد ممکن است چند راس از درجه ماکسیمم یا می‌نیمم وجود داشته باشد.

نکته: همواره داریم $\Delta \leq p-1$. (چرا؟)

** در گراف از مرتبه p، راسی که با همه‌ی رئوس دیگر مجاور باشد، را راس فول (پُر) می‌نامیم. در واقع راسِ فول دارای درجه p-۱ است.

نکته: اگر گرافی از مرتبه p، دارای k راسِ فول باشد آن‌گاه $\delta \geq k$.

مثال ۳: نشان دهید گرافی وجود ندارد که درجه راس‌های آن ۲ , ۲ , ۳ , ۴ ,۵ باشد.

مثال ۴: نشان دهید گرافی وجود ندارد که درجه راس‌های آن ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ ,۶ ,۶ باشد.

نکته(ارتباط درجه راس‌ها با تعداد یال‌ها): فرض کنید گراف G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q باشد، در این صورت:

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = \underbrace{\deg(v_1) + \deg(v_2) + \cdots + \deg(v_p)}_{\text{مجموع درجه‌ها}} = 2q$$

نتیجه مهم: تعداد راس‌های فرد هر گراف عددی زوج است.

اثبات:

مثلاً یک گراف نمی‌تواند یک راس درجه ۱ یا ۳ راس درجه ۵ داشته باشد. برای مثالی دیگر گرافی با درجه‌های ۱، ۲، ۳، ۳ و ۴ وجود ندارد.

مثال ۵: هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آن‌ها با یکدیگر دست می‌دهند. ۶ نفر از آن‌ها هرکدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده‌اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

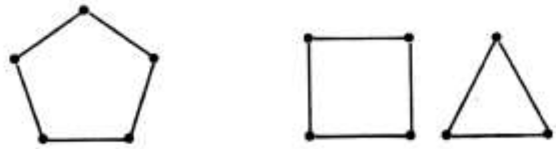
مثال ۶: در یک گراف از مرتبه ۱۰ و اندازه‌ی ۳۳، $\Delta =$ ۷ و $\delta =$ ۶ است. تعدا راس‌های درجه ۶ و ۷ را به دست آورید.

مثال ۷: حاصلضرب درجه‌های گرافی از مرتبه ۵ برابر ۷۲ است. دو گراف با این شرایط رسم کنید.

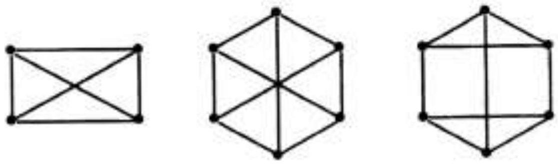
مثال ۸: گرافی از مرتبه‌ی ۸ و اندازه‌ی ۱۴ ، دو راس از درجه‌ی $\Delta =$ ۵ ، یک راس از درجه ۲ و یک راس از درجه $\delta =$ ۱ دارد. این گراف چند راس درجه ۳ دارد؟

گراف‌های منتظم

تعریف: گرافی که درجه‌ی همه راس‌های آن r باشـد، گراف r-منتظم (از مرتبه‌ی p) نامیده می‌شـود. برای نمونه گراف‌های زیر ۲- منتظم و ۳- منتظم هستند:



۲ـ منتظم مرتبهٔ ۵   ۲ـ منتظم مرتبهٔ ۷



۳ـ منتظم مرتبهٔ ۴   ۳ـ منتظم مرتبهٔ ۶

نکته: گفتیم در هر گراف، مجموع درجه‌ها برابرِ $۲q$ می‌شود. حال در گراف r-منتظم p راسی داریم:

$$\text{مجموع درجه‌ها} = \underbrace{r+r+\cdots+r}_{p\ \text{تا}} = ۲q \Rightarrow pr = ۲q$$

یعنی در گراف‌های منتظم ضرب مرتبه در درجه راس‌ها، دو برابر تعداد یال‌ها می‌شود.

نتیجه: pr همواره عددی زوج است؛ پس p و r نمی‌توانند هر دو فرد باشد (یعنی گراف فرد-منتظم از مرتبه فرد نداریم).

مثال ۹: در یک گراف ۴-منتظم داریم $q = ۳p - ۸$. مرتبه و اندازه‌ی گراف را به دست آورده و گراف را رسم کنید.

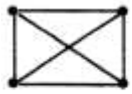
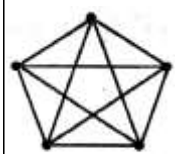
مثال ۱۰: یک گراف ۳-منتظم مرتبه ۸ رسم کنید.

گراف‌های کامل

تعریف: گرافی از مرتبه‌ی p که هر دو راس آن مجاور باشند را گراف کامل نامیده و با K_p نشان می‌دهیم.

❋❋ در واقع گراف‌های کامل حداکثر تعداد یال‌ها را در مرتبه‌ی خود دارند و دیگر نمی‌توانیم به آن‌ها یال اضافه کنیم.

در زیر گراف‌های کامل تا مرتبه ۵ را مشاهده کنید:

p	۱	۲	۳	۴	۵
نمودار					
q	۰	۱	۳	۶	۱۰

نکته: درجه‌ی هر راس در گراف کامل p راسی $p-۱$ است. یعنی گراف کامل K_p، یک گراف $p-۱$ منتظم است.

نکته: تعداد یال‌ها در گراف کامل p راسی برابر است با:

$$\text{مجموع درجه‌ها} = \underbrace{(p-۱)+(p-۱)+\cdots+(p-۱)}_{p\ \text{تا}} = ۲q \Rightarrow \boxed{q=\frac{p(p-۱)}{۲}}$$

مثال ۱۱: حاصلضرب مرتبه در اندازه‌ی یک گراف کامل ۹۰ است. این گراف چند منتظم است؟

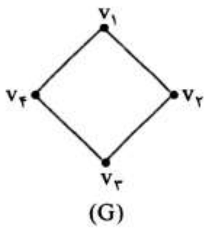
مثال ۱۲(سراسری ۹۳): مجموع مرتبه و اندازه‌ی گراف کاملی برابر ۴۵ است. اندازه‌ی این گراف کدام است؟

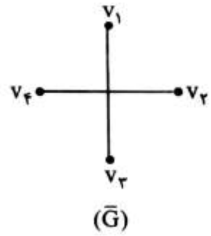
۱) ۲۸ ۲) ۳۶ ۳) ۳۰ ۴) ۲۱

مثال ۱۳: در یک گراف کامل رابطه‌ی $q=۴\Delta+\delta$ برقرار است. مرتبه‌ی گراف را بدست آورید.

مکمل گراف

تعریف: مکمل گراف G که آن را با G^c یا $\bar{G}$ نشان می‌دهیم، گرافی است که مجموعه‌ی راس‌های آن همان مجموعه‌ی راس‌های G است و دو راس در $\bar{G}$ مجاورند اگر در G مجاور نباشند. برای مثال در شکل زیر یک گراف و مکمل آن را می‌بینید:



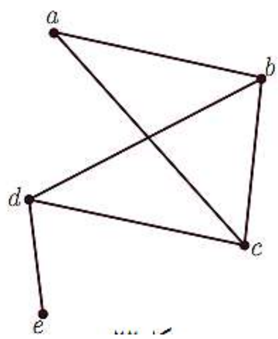


نکته۱: اگر تعداد یال‌های G و $\bar{G}$ را با هم جمع کنیم، برابرِ تعداد یال‌های گراف کامل می‌شود؛ یعنی

$$q(G)+q(\bar{G})=\frac{p(p-۱)}{۲}$$

نکته۲: مکمل گرافی r-منتظم گرافی $\bar{r}$-منتظم بوده و $r+\bar{r}=p-۱$.

مثال ۱۴: گراف G به شکل مقابل است. مجموع درجه‌های راس‌های گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس a و c در گراف $\bar{G}$ را تعیین کنید.



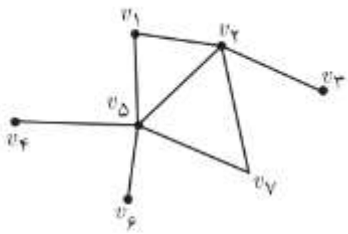
مثال ۱۵: مکمل گرافی از مرتبه‌ی p که $(۲p-۷)$- منتظم است، گرافی ۲- منتظم است. p را به دست آورید.

مثال ۱۶: تعداد یال‌های گراف G با تعداد یال‌های $\bar{G}$ برابر است. مرتبه‌ی این گراف در تقسیم بر ۴ چه باقی‌مانده‌ای دارد؟

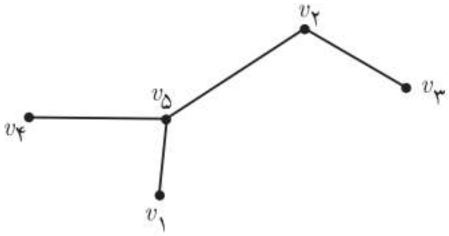
زیرگراف

تعریف: گراف H را یک زیرگراف از G می‌گوییم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$.

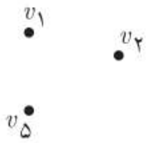
برای مثال گراف G و سه زیرگراف از آن را در زیر مشاهده می‌کنید:



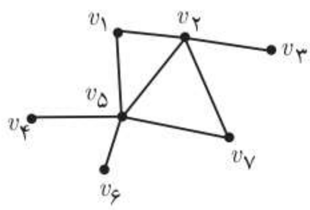
G



G_1



G_2



G_3

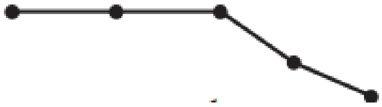
مثال ۱۷: گراف k_6 چند زیرگراف کامل دارد؟

مسیر در گراف

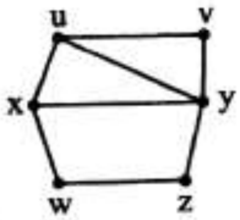
تعریف مسیر: فرض کنیم u و v دو راس از گراف G باشند. یک مسیر از u به v در G دنباله‌ای متشکل از راس‌های دو به دو متمایز است که از u شروع و به v ختم می‌شود به طوری که هر دو راس متوالی در این مسیر، مجاور هستند. طول مسیر همان تعداد یال-های طی شده است که یکی کمتر از تعداد راس‌ها است.

قرارداد: هر راس به تنهایی، یک مسیر به طول صفر از خودش به خودش است.

※ گرافی که تنها از یک مسیر n راسی تشکیل شده باشد با P_n نمایش می‌دهیم.

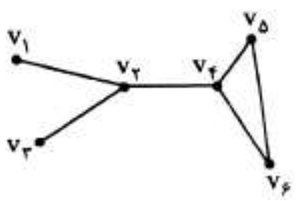


مثال ۱۸: در گراف مقابل تمام مسیرهای از u به v را نوشته و طول هر کدام را مشخص کنید.

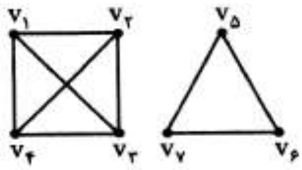


گراف‌های همبند

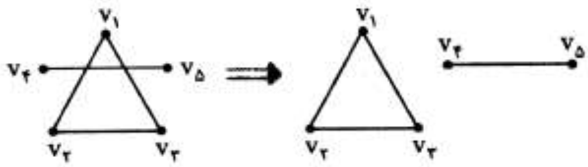
تعریف: گراف G را همبند گوییم، هرگاه بین هر دو راس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. مانند گراف زیر:



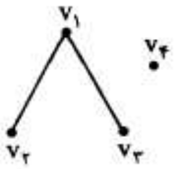
گرافی که همبند نباشد را ناهمبند می‌نامیم. مانند گراف‌های زیر:



کل این گراف از مرتبهٔ ۷ است. بین مثلاً v_2 و v_5 مسیر نداریم؛ پس این هم ناهمبند است.



ناهمبند است؛ چون اگر آن یال را بیرون بیاوریم معلوم می‌شود بین v_1 و v_4 مسیر نداریم.



(G_1)

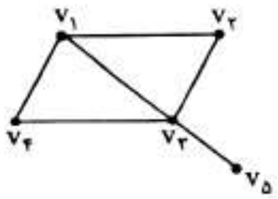
ناهمبند است؛ چون بین v_1 و v_4 مسیری نداریم.

نکته۱: اگر $q < p - ۱$ باشد، گراف قطعا ناهمبند است.

نکته۲: اگر $q > \binom{p-۱}{۲}$ باشد، گراف قطعا همبند است. همچنین اگر در گرافی $\Delta = p - ۱$ باشد (یعنی یک راس به همه وصل باشد) گراف قطعا همبند است.

دور در گراف

تعریف: یک دور به طول m در گراف G دنباله‌ای از $m + ۱$ راس، که راس‌های متوالی مجاور بوده و m راسِ اول آن دو به دو متمایز بوده و راس آخر همان راس اول باشد. در شکل زیر دور $v_۱ v_۲ v_۳ v_۴ v_۱$ را ببینید. این دور به طولِ ۴ است.



** حداقل طول دور، ۳ می‌تواند باشد.

** طول دور همان تعداد یال‌های طی شده است.

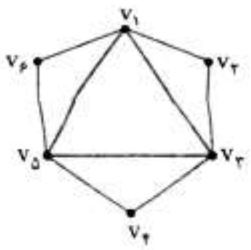
تعریف: گرافی را که تنها از یک دور n راسی تشکیل شده باشد با C_n نمایش می‌دهیم.

برای مثال $C_۵$ را در شکل مقابل می‌بینید.

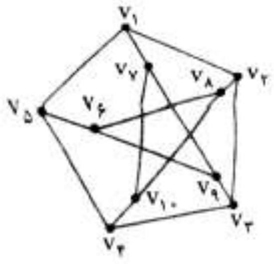
مثال ۱۹: گراف $K_۵$ چند زیرگراف به صورت $C_۳$ دارد؟

مثال ۲۰: گراف کامل از مرتبه ۷ چند دور به طول ۳ دارد؟

مثال ۲۱: گراف‌های مقابل چند دور به طول ۵ دارند؟



(الف)



(ب)

مثال ۲۲: یک گراف ۹ راسی رسم کنید به طوری که:

الف) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

ب) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.