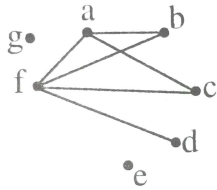


فصل ۱: گراف‌ها و کاربرد آن

* **گراف ساده:** زوج مرتبی مثل $G(V, E)$ است که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است و E زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های دو عضوی V است. مجموعه‌ی رئوس را با V و مجموعه‌ی یال‌ها را با E نشان می‌دهیم. مثال: مجموعه‌ی رئوس و مجموعه‌ی یال‌های گراف زیر را بنویسید.



* **مرتبه‌ی گراف (p) :** تعداد راس‌های گراف G را مرتبه‌ی گراف G می‌گوییم.

* **اندازه‌ی گراف (q) :** تعداد یال‌های گراف G را اندازه‌ی گراف G می‌گوییم. $0 \leq q \leq \binom{p}{2}$

* **درجه‌ی یک راس:** به تعداد یال‌های گذرنده از یک راس، درجه‌ی آن راس می‌گوییم.

* **راس ایزوله (منفرد - منزوی):** راسی است که درجه‌ی آن صفر باشد. (هیچ یالی از آن نگذرد)

* **دو راس مجاور:** دو راس a و b را مجاور گوئیم هرگاه آن دو راس توسط یک یال به هم متصل شده باشند.

* **گراف کامل:** گراف G را کامل گوئیم هرگاه هر دو راس دلخواه آن مجاور باشند؛ به عبارت دیگر همه‌ی یال‌های ممکن در آن رسم شده باشند. گراف کامل از مرتبه‌ی p را به صورت k_p نشان می‌دهیم.

نکته: درجه‌ی هریک از رئوس گراف k_p برابر است با $p - 1$.

نکته: تعداد کل یال‌های گراف کامل k_p برابر است با $\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$.

مثال: تعداد یال‌های گراف k_8 را به دست آورید.

مثال: اگر گراف G دارای ۳۸ یال باشد، این گراف حداقل چند راس دارد؟

* **گراف تهی:** گراف G را تهی گوئیم هرگاه هیچ یالی در آن یافت نشود. به عبارت دیگر درجه‌ی هر یک از رئوس آن صفر باشد. گراف تهی از مرتبه‌ی p را به صورت \bar{k}_p نشان می‌دهیم.

* **نکته:** تعداد گراف‌های ساده که با p راس مشخص (نامگذاری شده) می‌توان تعریف کرد برابر است با $2^{\binom{p}{2}}$.

مثال: با چهار راس a, b, c, d چند گراف ساده می‌توان ساخت؟

مثال: با پنج راس a, b, c, d, e چند گراف ساده می‌توان ساخت به شرطی که هر یک از آن‌ها شامل سه یال باشند؟

مثال: با ۷ راس a, b, c, d, e, f, g چند گراف ساده می‌توان ساخت به شرطی که هر یک از آن گراف‌ها هر دو یال ac و ef را شامل بوده و هیچ یک از آن گراف‌ها یال ag را نداشته باشند.

* **گراف‌های هم‌نوع (یکریخت):** دو گراف را یکریخت گوئیم هرگاه بتوان با اعمالی مثل تغییر محل رئوس و اندازه‌ی یال‌ها و یا چرخش گراف‌ها، آن را بر روی هم منطبق کرد.

مثال: کدام یک از گراف‌های زیر با گراف مقابل هم‌نوع است؟



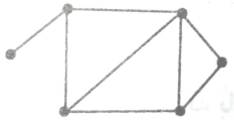
مثال: چند نوع گراف ساده از مرتبه‌ی ۴ وجود دارد که هر یک از آن‌ها فقط شامل ۳ یال باشند؟

مثال: چند نوع گراف ساده از مرتبه‌ی ۶ می‌توان ساخت به طوری که هر یک از آن‌ها فقط دارای سه یال باشند؟

* **ماکزیمم درجه‌ی یک گراف $\Delta(G)$:** در هر گراف، بزرگترین درجه‌ی رئوس گراف را ماکزیمم درجه‌ی گراف می‌گوییم.

* **مینیمم درجه‌ی یک گراف $\delta(G)$:** در هر گراف، کوچکترین درجه‌ی رئوس گراف را مینیمم درجه‌ی گراف می‌گوییم.

مثال: در گراف زیر، Δ و δ را بنویسید.



* **قضیه:** در هر گراف از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q ، مجموع درجات رئوس، دو برابر تعداد یال‌های آن گراف می‌باشد.

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$$

به عبارتی $\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$.

مثال: فرض کنید G گرافی است از مرتبه‌ی ۷ و اندازه‌ی ۹ به طوری که درجه‌ی هر راس آن ۲ یا ۳ می‌باشد.

تعیین کنید این گراف چند راس از درجه‌ی ۲ و چند راس از درجه‌ی ۳ دارد؟

* **نکته:** در هر گراف، تعداد راس‌های فرد، عددی زوج است.

* **نکته:** در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q ، رابطه‌ی مقابل برقرار است.

$$\delta \leq \deg v_i \leq \Delta$$

* **نکته:** با گرفتن زیگما از طرفین نامساوی بالا، رابطه‌ی مقابل نتیجه می‌شود. $\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$ یا $p\delta \leq 2q \leq p\Delta$

مثال: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۷ چنان است که در آن $\Delta = 7$. حداکثر تعداد یال‌های آن کدام است؟

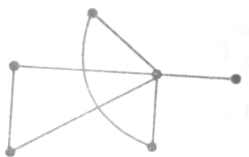
مثال: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۷ چنان است که در آن $\delta = 7$. حداقل تعداد یال‌های آن کدام است؟

مثال: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۷ چنان است که در آن $\delta = 7$. حداکثر تعداد یال‌های آن کدام است؟

* **دنباله‌ی درجات رئوس یک گراف ساده:** اگر درجات رئوس یک گراف را به صورت یک دنباله‌ی نزولی بنویسیم،

آن را دنباله‌ی درجات رئوس گراف می‌نامیم.

مثال: دنباله‌ی درجات رئوس گراف زیر را بنویسید.



مثال: تعداد یال‌های گراف G با دنباله‌ی درجات رئوس ۳, ۱, ۱, ۱ چقدر است؟

نکته: از روی دنباله‌ی درجات رئوس می‌توان p و q و δ و Δ را به دست آورد.

*** ویژگی‌های دنباله‌ی درجات رئوس یک گراف ساده از مرتبه‌ی p :**

۱. تعداد اعضای فرد دنباله، زوج است.
۲. در یک دنباله‌ی p راسی حداکثر درجه‌ی هر راس مساوی $p-1$ است. $\Delta \leq p-1$ (اگر دنباله شامل صفر بود، ابتدا صفرها را کنار می‌گذریم)
۳. حداقل دو عدد در دنباله برابرند. (با استفاده از اصل لانه کبوتری ثابت می‌شود)
۴. در هر دنباله با p راس، اگر k راس از درجه‌ی $p-1$ داشته باشیم باید $k \leq \delta$ باشد.
۵. اگر در دنباله‌ی درجه رئوس یک گراف ساده‌ی غیر تهی از مرتبه‌ی p ، عضو $p-1$ موجود باشد، عضو صفر موجود نخواهد بود و اگر عضو صفر موجود باشد، عضو $p-1$ موجود نخواهد بود.
۶. اگر دنباله‌ی درجات رئوس یک گراف ساده تشکیل تصاعد حسابی یا هندسی بدهند، آنگاه تمام اعضای آن دنباله باهم برابر خواهند بود. (به عبارتی دیگر گراف مربوطه، منتظم خواهد بود)

مثال: گرافیکال بودن دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

- | | | |
|------------------------|---------------------|------------------------|
| ۱. ۶, ۶, ۵, ۵, ۵, ۴, ۲ | ۲. ۶, ۵, ۵, ۴, ۳, ۳ | ۳. ۶, ۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۰ |
| ۴. ۶, ۶, ۶, ۵, ۴, ۳, ۲ | ۵. ۵, ۴, ۳, ۳, ۲, ۱ | |

*** الگوریتم هاول – حکیمی برای تشخیص گرافیکال بودن یک دنباله:**

۱. دنباله را به صورت نزولی مرتب کرده و اولین (بزرگترین) عضو آن را k می‌نامیم.
۲. k را از دنباله حذف کرده و از هر یک از k عضو بعدی یک واحد کم می‌کنیم و مرحله‌ی قبل را تکرار می‌کنیم.
۳. اگر در نهایت به دنباله‌ای شامل فقط تعدادی صفر برسیم، دنباله‌ی اصلی گرافیکال خواهد بود.

*** گراف منتظم:** اگر $r \geq 0$ باشد، آنگاه گراف G را r -منتظم گوییم هرگاه درجه‌ی هر راس G برابر r باشد.

*** نکته:** مجموع درجات رئوس هر گراف r -منتظم از مرتبه‌ی p برابر است با rp . به عبارت دیگر $q = \frac{pr}{2}$.

مثال: چند نوع گراف ۲-منتظم از مرتبه‌ی ۹ وجود دارد؟

*** نکته:** گراف فرد منتظم از درجه‌ی فرد وجود ندارد.

مثال: چند نوع گراف ۳-منتظم از مرتبه‌ی ۱۱ وجود دارد؟

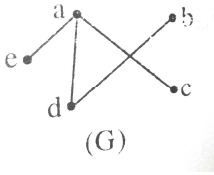
*** نکته:** در گراف r -منتظم، $\delta = \Delta = r$.

مثال: اگر به گراف ۴-منتظم، ۱۲ یال اضافه شود، گراف کامل می‌شود. مرتبه و اندازه‌ی گراف را مشخص کنید.

مثال: در گراف ۵-منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q ، داریم $2q - 3p = 16$. گراف را مشخص کنید.

*** مکمل یک گراف:** گراف G' را مکمل گراف G گوییم هرگاه رئوس آن همان رئوس G بوده و مجموعه‌ی مجموعه‌ی یال‌های آن‌ها مکمل یک‌دیگر باشند، به عبارتی اگر یالی در گراف G موجود نباشد، آن یال در گراف G' موجود باشد.

مثال: مکمل گراف زیر را رسم کنید.



* نکته: $q(G) + q(G') = q(k_p) = \frac{p(p-1)}{2}$

* نکته: اگر a راس دلخواهی از گراف ساده G از مرتبه p باشد، آن گاه: $\deg(a_G) + \deg(a_{G'}) = p - 1$.

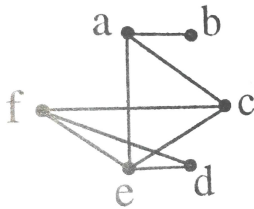
* نکته: تعداد گراف‌های G از مرتبه p با تعداد گراف‌های G' از مرتبه p برابرند.

مثال: چند نوع گراف ۶- منتظم از مرتبه ۹ وجود دارد؟

* مسیر: در گراف ساده G ، یک مسیر به طول m از راس u به راس v ، عبارت است از دنباله‌ای شامل

$(m+1)$ راس دو به دو متمایز که با u شروع و به v ختم می‌شود. (در مسیر راس تکراری وجود ندارد)

مثال: تمام مسیرهای موجود از راس a به راس e را در گراف زیر بنویسید.



* نکته: در گراف ساده G از مرتبه p ، طول یک مسیر حداکثر می‌تواند برابر با $p-1$ باشد.

* نکته: در هر گراف، دنباله‌ای متشکل از فقط یک راس مثل u ، مسیری به طول صفر از u به u تعریف می‌شود.

* نکته: در گراف k_p ، تعداد مسیرهای به طول i از راس u به راس v برابر است با $\binom{p-2}{i-1} (i-1)!$.

مثال: u و v ، دو راس متمایز از گراف k_6 می‌باشند، تعداد مسیرهای به طول ۴ از u به v چقدر است؟

مثال: u و v ، دو راس متمایز از گراف k_6 می‌باشند، تعداد کل مسیرها از u به v چقدر است؟

* نکته: در گراف k_p ، تعداد مسیرهای به طول i برابر است با $\binom{p}{2} \binom{p-2}{i-1} (i-1)!$.

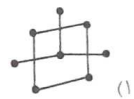
مثال: در گراف k_7 تعداد کل مسیرهای به طول ۵ چقدر است؟

مثال: در گراف k_4 تعداد کل مسیرها چقدر است؟

* گراف همبند: گراف ساده G را همبند گوئیم هرگاه بین هر دو راس متمایز آن حداقل یک مسیر وجود داشته

باشد. در غیر این صورت گراف را ناهمبند می‌گوئیم.

مثال: کدام یک از گراف‌های زیر همبند است؟



* نکته: در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p ، حداکثر مقدار q برای آن که گراف بتواند ناهمبند باشد برابر است با

$$\binom{p-1}{2}$$

مثال: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی 7 و اندازه‌ی q مفروض است. حداکثر مقدار q باید چقدر باشد تا گراف G بتواند ناهمبند باشد؟

* نکته: اگر $q \geq \binom{p-1}{2} + 1$ باشد، آنگاه گراف همبند است. (یک راس را ایزوله در نظر گرفته و بقیه را گراف کامل

می‌کنیم و سپس راس ایزوله را با یک یال به گراف کامل وصل می‌کنیم)

مثال: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی 8 و اندازه‌ی q مفروض است. حداقل مقدار q باید چقدر باشد تا مطمئن شویم گراف G همبند است؟

* نکته: گراف k که فقط از یک راس ایزوله تشکیل شده است، همبند است.

* نکته: اگر $q \leq p-2$ باشد، آنگاه گراف همبند نیست.

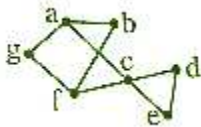
* فاصله‌ی بین دو راس: در گراف همبند G فاصله‌ی دو راس u و v که با نماد $d(u, v)$ نشان داده می‌شود برابر است با کوتاه‌ترین مسیر از u به v .

* دور: یک دور به طول m روی راسی چون a ، دنباله‌ای است شامل m راس دو به دو متمایز که با a شروع و به a ختم می‌شود. (دنباله شامل $m+1$ عضو است)

* نکته: دنباله‌ی متناظر با هر دور باید حداقل ۴ عضو داشته باشد. (دور به طول صفر نداریم)

* نکته: اگر جهت چرخش را در نوشتن دنباله‌ی متناظر به یک دور یا نقطه‌ی شروع دور را عوض کنیم، دور جدیدی ایجاد نمی‌شود.

مثال: تمام دورهای موجود در گراف زیر را بنویسید.

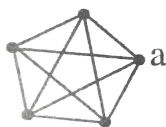


* نکته: تعداد دورهای به طول i در گراف k_p برابر است با $\binom{p}{i} \times \frac{(i-1)!}{2}$

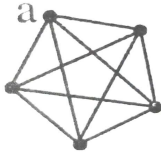
مثال: در گراف k_6 چه تعداد دور به طول ۴ موجود است؟

مثال: در گراف k_8 چه تعداد دور وجود دارد؟

مثال: چه تعداد از دورهای گراف زیر شامل راس a نمی‌باشند؟



مثال: چه تعداد از دورهای به طول ۴ از گراف مقابل شامل راس a می‌باشند؟



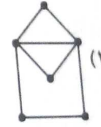
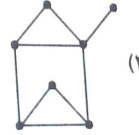
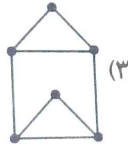
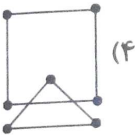
* **گراف همیلتنی:** گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی $p \geq 3$ را همیلتنی گوئیم هرگاه دوری از مرتبه‌ی p داشته باشد.

* **نکته:** در نوشتن دور همیلتنی مربوط به گراف، تمام رئوس آن به کار می‌روند.

* **نکته:** گرافی که دارای راسی از درجه‌ی صفر یا یک باشد، نمی‌تواند همیلتنی باشد.

* **نکته:** یک گراف ناهمبند نمی‌تواند همیلتنی باشد.

مثال: کدام یک از گراف‌های زیر همیلتنی است؟



* **گراف اویلری:** گراف G (نه لزوماً ساده) را یک گراف اویلری گوئیم هرگاه بتوان آن را بدون برداشتن قلم از روی

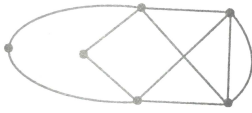
کاغذ و با شروع از یک راس چنان رسم کنیم که:

اولاً: از هر یال، یک و فقط یک بار عبور کنیم.

ثانیاً: از تمام رئوس بگذریم.

ثالثاً: نقطه‌ی پایان همان نقطه‌ی شروع باشد.

مثال: گراف زیر، اویلری است.



* **نکته:** گراف همبند G اویلری است اگر و تنها اگر درجه‌ی تمام رئوس آن زوج باشد.

مثال: کدام یک از گراف‌های زیر اویلری است؟

k_{18} (۴)

k_{16} (۳)

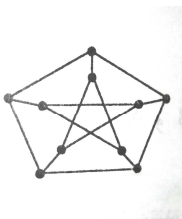
k_{13} (۲)

k_1 (۱)

مثال: گراف‌های زیر را از نظر همیلتنی و اویلری بودن بررسی کنید.



* **گراف پترسن:** گراف زیر به گراف پترسن معروف است.



* نکته: گراف پترسن، ۳- منتظم از مرتبه 10 و اندازه 15 است.

* نکته: گراف پترسن اویلری و همیلتنی نیست.

* **گراف بازه‌ای:** اگر به ازای بازه‌های (a_1, b_1) و (a_2, b_2) ... و (a_p, b_p) راس‌های v_1 و v_2 ... و v_p را متناظر کرده و دو راس v_i و v_j را مجاور تعریف کنیم هرگاه بازه‌های متناظر آن‌ها اشتراک داشته باشند، در این صورت گراف به دست آمده، گراف بازه‌ای خواهد بود.

مثال: گراف بازه‌ای زیر را رسم کنید. $(2, 9)$, $(9, 8)$, $(8, 9)$, $(4, 7)$, $(2, 3)$

* نکته: هر گراف که در آن n ضلعی ($n \geq 4$) بدون قطر یافت شود، گراف بازه‌ای نیست.

* نکته: گراف k_p به ازای تمام مقادیر طبیعی p بازه‌ای است.

* نکته: گراف پترسن بازه‌ای نیست.

* **درخت:** گراف همبندی است که دور نداشته باشد.

مثال: تمام درخت‌های از مرتبه $1, 2, 3, 4, 5, 6$ را رسم کنید.

* قضیه: در هر درخت با p راس و q یال، رابطه‌ی زیر برقرار است. $p = q + 1$

مثال: اگر از یک گراف ۳- منتظم از مرتبه p ، ۴ یال کم کنیم یک درخت پدید می‌آید، مقدار p چقدر است؟

مثال: دنباله‌ی نزولی $1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, \dots, k$ ، دنباله‌ی درجه‌های راس‌های یک درخت است.

الف) تعداد راس‌های درجه‌ی یک این درخت را حساب کنید.

ب) نموداری از این درخت رسم کنید.

مثال: درخت T ، فقط شامل رئوسی از درجه‌ی 3 و 1 می‌باشد، اگر تعداد رئوس درجه‌ی 3 برابر 27 باشد، تعداد رئوس از درجه‌ی 1 چقدر است؟

* قضیه: بین هر دو راس هر درخت مفروض، دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

* قضیه: هر درختی که بیش از یک راس داشته باشد، حداقل دو راس از درجه یک دارد.

* نکته: در هر درخت، مجموع مرتبه و اندازه، همواره عددی فرد است.

* نکته: تعداد مسیرهای با طول یک و بیشتر، بین رئوس متمایز درخت برابر است با $\binom{p}{2}$.

* نکته: تعداد کل مسیرها در یک درخت، برابر است با $\binom{p+1}{2} + p = \binom{p}{2} + p$ مسیر به طول صفر از هر راس به

خودش)

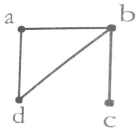
مثال: تعداد کل مسیرهای به طول 1 یا بیشتر در درخت از مرتبه‌ی 14 را بیابید.

مثال: در درخت از مرتبه‌ی 10 ، چند مسیر با طول 2 یا بیشتر وجود دارد؟

مثال: در درخت از مرتبه‌ی 13 در کل چند مسیر وجود دارد؟

* **ماتریس مجاورت گراف‌ها:** اگر G یک گراف ساده از مرتبه‌ی p باشد، می‌توان یک ماتریس مربعی مثل M از مرتبه‌ی p به آن نسبت داد به طوری که اگر دو راس در گراف مجاور باشند، درایه‌ی متناظر با آن‌ها برابر با 1 و در غیر این صورت برابر با صفر است.

مثال: ماتریس مجاورت گراف زیر را بنویسید.



*** ویژگی‌های ماتریس مجاورت یک گراف ساده (M):**

۱. M ماتریسی متقارن است.
۲. تمام درایه‌های روی قطر اصلی برابر با صفر است.
۳. تعداد یک‌های موجود روی هر سطر (یا ستون) با درجه‌ی راس متناظر با آن سطر (یا ستون) برابر است.
۴. تعداد کل یک‌های موجود در M برابر است با مجموع درجات رئوس گراف و برابر است با $2q$.
۵. اگر گراف G یک راس ایزوله داشته باشد، تمام درایه‌های واقع بر سطر و ستون متناظر آن صفر خواهد بود.
۶. اگر ماتریس M متناظر با گراف کامل K_p باشد، تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی M یک خواهد بود.
۷. تعداد یک‌های واقع بر M برابر با $2q$ و تعداد صفرهای آن برابر با $(p^2 - 2q)$ است.
۸. اگر G یک درخت باشد، در این صورت تعداد صفرها برابر با $q + 1$ می‌باشد.

مثال: ماتریس مجاورت درخت از مرتبه‌ی ۶ چند درایه‌ی صفر دارد؟

مثال: اگر ماتریس M دارای ۶ سطر و ۱۰ درایه‌ی صفر باشد، در این صورت مقدار Δ چقدر است؟

*** ویژگی‌های مربع ماتریس مجاورت گراف ساده (M^2):**

۱. M^2 ماتریسی متقارن است.
۲. هر درایه‌ی واقع بر قطر اصلی M^2 با درجه‌ی راس متناظر با سطر (یا ستون) متناظر با آن درایه برابر است.
۳. مجموع درایه‌های روی قطر اصلی M^2 همان مجموع درجات رئوس گراف G بوده و برابر است با $2q$.
۴. اگر G گراف کامل K_p باشد، در این صورت هر درایه‌ی روی قطر اصلی M^2 برابر با $(p-1)$ و هر درایه‌ی واقع بر غیر قطر اصلی M^2 برابر با $(p-2)$ خواهد بود.
۵. اگر G گراف کامل K_p باشد، در این صورت مجموع درایه‌های یک سطر یا ستون M^2 مساوی $(p-1)^2$ و مجموع کل درایه‌های ماتریس M^2 برابر است با $p(p-1)^2$.
۶. درایه‌ی a_{ij} ($i \neq j$) از مربع ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G ، با تعداد مسیرهای به طول ۲ از i به j در آن گراف برابر است.
۷. مجموع درایه‌های واقع در مربع ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G با مجموع مربعات درجات رئوس آن گراف برابر است.

مثال: اگر M ماتریس مجاورت درخت T بوده و مجموع درایه‌های روی قطر اصلی M^2 برابر ۱۸ باشد، ماتریس M چند درایه‌ی صفر دارد؟

مثال: اگر M ماتریس مجاورت متناظر گراف K_p باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی M^2 چقدر است؟

مثال: اگر M ماتریس مجاورت گراف G باشد، M^2 کدام می‌تواند باشد؟

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (4) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (3) \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} (1)$$

نمونه سوال امتحانی گرافها و کاربرد آن

۱. اصطلاحات زیر را تعریف کنید:

- | | | | |
|------------------|-----------------|--------------------|---------------------|
| الف) گراف ساده | ب) گراف جهت دار | پ) مرتبه‌ی یک گراف | ت) اندازه‌ی یک گراف |
| ج) درجه‌ی یک راس | چ) گراف منتظم | ح) گراف کامل | خ) مسیر گراف |
| د) گراف همبند | ذ) دور | ر) گراف همیلتنی | ز) گراف اولیری |
- س) درخت

۲. ثابت کنید تعداد راس‌های فرد هر گراف، زوج است.

۳. گراف با مجموعه‌ی رئوس $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$

و مجموعه‌یال‌های $E = \{V_1V_2, V_1V_4, V_1V_5, V_2V_5, V_2V_3, V_2V_4, V_3V_4, V_3V_5\}$ مفروض است:

الف) نمودار گراف را رسم کنید.

ب) ۴ مسیر از V_1 به V_3 بنویسید.

۴. ثابت کنید در هر گراف کامل k_p تعداد یال‌های گراف برابر $\frac{p(p-1)}{2}$ است.

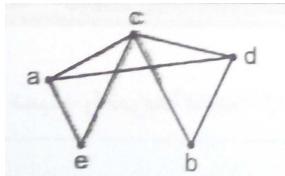
۵. گراف ساده‌ی $G = (V, E)$ گرافی ۳-منتظم است. با افزودن ۶ یال به یال‌های این گراف، گراف کاملی به دست می‌آید.

الف) ویژگی‌های گراف G را مشخص کنید. (مرتبه و اندازه)

ب) این گراف را رسم کنید.

۶. الف) مسیر در گراف را تعریف کنید.

ب) در گراف زیر تمام مسیرهای به طول ۳ از a به b را بنویسید.



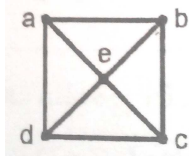
۷. فرض کنید G گراف ساده‌ی از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی $q = 12$ باشد، اگر G یک گراف r -منتظم باشد و داشته باشیم: $2r - p = 2$ ، مقادیر r و p را به دست آورید.

۸. گراف ساده‌ی G ، چهار منتظم از مرتبه p و اندازه‌ی q می‌باشد به طوری که $p + q = 21$ است.

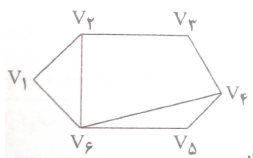
الف) p و q را محاسبه کنید.

ب) نمودار گراف را رسم کنید.

۹. در گراف زیر، چهار دور متفاوت به طول ۵ و ماتریس مجاورت آن را بنویسید.



۱۰. نمودار زیر مربوط به گراف $G(V, E)$ می‌باشد.



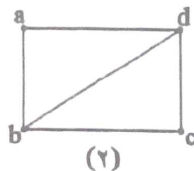
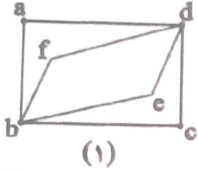
الف) مجموعه رئوس و مجموعه یال‌های گراف را مشخص کنید.

ب) دو دور به طول ۵ در این گراف بنویسید.

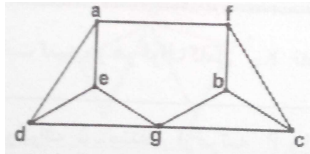
ج) دنبله‌ی درجه‌های راس‌های این گراف را به صورت یک دنباله‌ی نزولی بنویسید.

۱۱. در یک گراف کامل، تعداد راس‌ها، $\frac{1}{3}$ تعداد یال‌هاست. مرتبه و اندازه‌ی این گراف را محاسبه کنید.

۱۲. گراف اوپلری و همیلتنی را تعریف کنید. کدام گراف زیر، اوپلری و کدام یک همیلتنی است؟



۱۳. گراف G به صورت زیر رسم شده است.



الف) دو مسیر از a به b بنویسید.

ب) آیا این گراف همیلتنی است؟

۱۴. ثابت کنید در هر درخت با p راس و q یال داریم: $p = q + 1$

۱۵. الف) گراف کامل را تعریف کنید.

ب) تعداد یال‌های گراف کامل مرتبه‌ی p از تعداد یال‌های درخت مرتبه‌ی p، 10^p واحد بیشتر است، p را پیدا کنید.

۱۶. اگر به تعداد یال‌های یک درخت از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، تعداد ۱۵ یال اضافه می‌کنیم گراف k_p حاصل می‌شود. درخت را مشخص کنید و یکی از انواع آن را که بیشترین درجه‌ی رئوسش ۶ باشد، رسم کنید.

۱۷. تمام درخت‌های از مرتبه‌ی ۶ را رسم کنید.

۱۸. دنباله‌ی نزولی $1, 1, \dots, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots, k$ ، دنباله‌ی درجه‌های راس‌های یک درخت است.

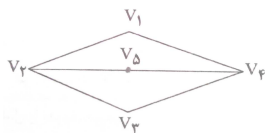
الف) تعداد راس‌های درجه‌ی یک این درخت را حساب کنید.

ب) نموداری از این درخت رسم کنید.

۱۹. الف) درخت را تعریف کنید.

ب) ثابت کنید بین هر دو راس هر درخت مفروض، دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

۲۰. شکل زیر نمودار گراف G می‌باشد:



الف) آیا G گراف بازه است؟

ب) طولانی‌ترین مسیر از V_1 به V_3 را بنویسید.

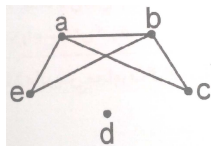
ج) کلیه‌ی دورهای به طول ۴ در این گراف را بنویسید.

۲۱. الف) سه ویژگی از ماتریس مجاورت یک گراف را بنویسید.

(ب) اگر M ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G باشد و داشته باشیم:

$$G^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مرتبه، اندازه، Δ و δ را نوشته و گراف را رسم کنید.
 ۲۲. ماتریس مجاورت متناظر با گراف ساده‌ی زیر را بنویسید.



۲۲. الف) درخت را تعریف کنید.

ب) در ماتریس مجاورت یک درخت از مرتبه‌ی ۸، چند درایه با مقدار صفر وجود دارد؟

فصل ۲: نظریه اعداد

بخش پذیری و تقسیم

* عضو ابتدای یک مجموعه: اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ در این صورت عدد x را عضو ابتدای A می‌گوییم و می‌نویسیم $\min A = x$ هرگاه:

۱. x عضو A باشد.
۲. x از تمام اعضای A کوچک‌تر یا مساوی باشد.

* عضو انتهای یک مجموعه: اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ در این صورت عدد x را عضو انتهای A می‌گوییم و می‌نویسیم $\max A = x$ هرگاه:

۱. x عضو A باشد.
۲. x از تمام اعضای A بزرگ‌تر یا مساوی باشد.

* نکته: ممکن است یک مجموعه عضو ابتدا و یا انتها نداشته باشد.

مثال: وجود عضو ابتدا و انتها را در مجموعه‌های زیر بررسی کنید.

$$۱) A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 9\} \quad ۲) B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 9\} \quad ۳) C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 9\}$$

* اصل خوش‌ترتیبی: هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای عضو ابتدا (کوچک‌ترین عضو) است.

* اصل استقرای ریاضی: اگر زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی هر دو ویژگی زیر را داشته باشد، آن‌گاه با خود مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر است.

۱. عدد ۱ متعلق به آن زیر مجموعه باشد.
۲. در صورت موجود بودن عدد طبیعی مانند t در آن زیر مجموعه، عدد طبیعی $t+1$ نیز در آن زیرمجموعه باشد.

* اصل استقرای قوی ریاضی: اگر زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی هر دو ویژگی زیر را داشته باشد، آن‌گاه با خود مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر است.

۱. عدد ۱ متعلق به آن زیر مجموعه باشد.
۲. در صورت موجود بودن همه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از t در آن زیر مجموعه، عدد طبیعی t نیز در آن زیرمجموعه باشد.

* بخش‌پذیری: عدد صحیح a را بر عدد صحیح غیر صفر b بخش‌پذیر می‌گوییم هرگاه عدد صحیحی مانند q چنان یافت شود که $a = b \times q$. بخش‌پذیری a بر b را به صورت $b \mid a$ نشان می‌دهیم و بخش‌پذیر نبودن a بر b را به صورت $b \nmid a$ نشان می‌دهیم.

$$b \mid a \Leftrightarrow a = bq \quad (q \in \mathbb{Z})$$

* **قرار داد:** چون بی شمار عدد صحیح مانند q یافت می شود که در تساوی $0 = 0 \times q$ صدق می کند، قرارداد می کنیم که صفر بر خودش بخش پذیر است یعنی $0 | 0$.

*** ویژگی های بخش پذیری:**

(در تمام فرمول های زیر، پایه ها، اعداد صحیح و توان ها، اعداد طبیعی اند.)

۱) $\pm 1 | a$

۲) $a | 1 \Rightarrow a = 1 \text{ or } a = -1$

۳) $\pm a | a$

۴) $a | 0$

$$5) a | b \Rightarrow \begin{cases} a | -b \\ -a | b \\ -a | -b \end{cases}$$

۶) $a | b \xrightarrow{b \neq 0} |a| \leq |b|$

۷) $a | b \Rightarrow a | mb$

۸) $a | b \Rightarrow ma | mb$

۹) $a | b \Rightarrow a | b^n$

۱۰) $a | b \Rightarrow a^n | b^n$

۱۱) $a | b \xrightarrow{m < n} a^m | b^n$

۱۲) $a^m | b^n \xrightarrow{m > n} a | b$

$$13) a | b, a | c \Rightarrow \begin{cases} a | b \pm c \\ a | b \times c \\ a | mb \pm nc \end{cases}$$

۱۴) $a | b, c | d \Rightarrow ac | bd$

۱۵) $a | b, b | a \Rightarrow a = \pm b$

۱۶) $a | b \Rightarrow a | ma \pm nb$

۱۷) $ab | c \Rightarrow a | c, b | c$

۱۸) $(a - b) | (a^n - b^n)$

۱۹) $\frac{n}{m} \in \mathbb{N} \Rightarrow (a^m - b^m) | (a^n - b^n)$

۲۰) $\frac{n}{m} = 2k + 1 \Rightarrow (a^m + b^m) | (a^n + b^n) \Rightarrow n = 2k + 1 \Rightarrow (a + b) | (a^n + b^n)$

۲۱) $\frac{n}{m} = 2k \Rightarrow (a^m + b^m) | (a^n - b^n) \Rightarrow n = 2k \Rightarrow (a + b) | (a^n - b^n)$

۲۲) حاصل ضرب n عدد صحیح متوالی بر $n!$ بخش پذیر است.

مثال: باقی مانده ی تقسیم عدد $3^{36} - 2^{36}$ را بر ۳۵ بیابید.

مثال: درستی یا نادرستی گزاره های زیر را بررسی کنید.

۱) $a | b \Rightarrow a^r | b^r$

$$2) a^r | b^r \Rightarrow a | b$$

مثال: تمام مقادیر صحیح n را چنان بیابید که حاصل $\frac{4n-2}{n+1}$ یک عدد صحیح باشد.

مثال: اگر $\frac{n^2+4}{n+1}$ یک عدد صحیح باشد آن گاه برای n چند جواب صحیح وجود دارد؟

مثال: چند عدد صحیح مانند a می توان یافت به طوری که در هر دو رابطه‌ی $a | 240$ و $12 | a$ صدق کنند.

مثال: چند عدد طبیعی مانند d وجود دارد که $d | 450$ و $15 | d$.

* **قضیه‌ی تقسیم:** اگر a عدد صحیح و b یک عدد طبیعی دلخواه باشند، آن گاه دو عدد صحیح منحصر به فردی مانند r و q چنان یافت می شوند که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$. در این حالت q را خارج قسمت، r را باقی مانده، a را مقسوم و b را مقسوم علیه می گوئیم.

مثال: عدد $487 -$ را بر 23 تقسیم کرده و باقی مانده و خارج قسمت را تعیین کنید.

* **نکته:** هر عدد صحیح را می توان به یکی از دو صورت $2k$ و $2k+1$ و یا به یکی از سه صورت $3k$ و $3k+1$ و $3k+2$ نمایش داد.

* **نکته:** مربع هر عدد زوج، مضرب 4 می باشد.

* **نکته:** باقیمانده‌ی یک عدد در تقسیم بر 8 ، باقیمانده‌ی عدد حاصل از سه رقم سمت راست آن عدد در تقسیم بر 8 می باشد.

* **نکته:** مربع هر عدد فرد در تقسیم بر 8 باقیمانده‌ی یک می آورد. به عبارت دیگر $a^2 = 8q + 1 \Rightarrow a = 2k + 1$.

مثال: کدام یک از اعداد زیر مربع کامل است؟

$$(1) 74519 \quad (2) 74529 \quad (3) 74539 \quad (4) 74549$$

مثال: از بین اعداد 1 و 11 و 111 و 1111 و ... چه تعدادی مربع کامل هستند؟

* **نکته:** هیچ مربع کاملی نمی تواند به یکی از ارقام 2 و 3 و 7 و 8 ختم شود.

* **نکته:** اگر مربع کاملی به 5 ختم شود، لازم است رقم دهگان آن مربع کامل برابر 2 باشد.

* **نکته:** تعداد مضارب طبیعی عدد طبیعی b در بین اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ برابر $\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$ می باشد.

مثال: چند عدد طبیعی مضرب 3 کوچکتر یا مساوی 100 وجود دارد؟

* **نکته:** تعداد مضارب طبیعی عدد طبیعی b در بین اعداد $k+1, k+2, \dots, k+n$ برابر $\left\lfloor \frac{k+n}{b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{b} \right\rfloor$ می باشد.

مثال: تعداد اعداد سه رقمی که بر 34 بخش پذیر باشند چقدر است؟

مثال: معادله‌ی $x^2 + y^2 = 1383$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح چند دسته جواب دارد؟

مثال: در یک تقسیم، باقی مانده برابر 29 و خارج قسمت برابر 7 می باشد. حداکثر چند واحد می توان به مقسوم علیه اضافه کرد بدون این که مقسوم و خارج قسمت تغییر نمایند؟

مثال: در یک تقسیم، اگر 200 واحد به مقسوم و 3 واحد به مقسوم علیه اضافه کنیم، خارج قسمت تغییر نکرده ولی از باقی مانده 22 واحد کم می شود. خارج قسمت را بیابید.

مثال: در یک تقسیم، مقسوم ۵۴۲ و خارج قسمت ۱۲ می‌باشد. تعیین کنید مقسوم علیه چه مقادیری می‌تواند داشته باشد.

مثال: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر اعداد ۶ و ۷ به ترتیب برابر ۵ و ۶ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۴۲ کدام است؟

*** عدد اول:**

یک عدد طبیعی را اول گوییم هرگاه در مجموعه‌ی اعداد طبیعی، دو و فقط دو مقسوم علیه مثبت داشته باشد که یکی از آن دو مقسوم‌علیه عدد ۱ و دیگری خود آن عدد است. عددی که اول نباشد، مرکب خوانده می‌شود.

*** نکته:** هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به یکی از دو شکل $6k+1$ و $6k-1$ (یا $5q+6$) می‌باشد. (به عبارتی اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۶، عددی بجز ۱ و ۵ باشد، آن عدد اول نیست). در عین حال، ممکن است عددی به شکل $6k+1$ و $6k-1$ باشد ولی اول نباشد؛ مثل $25 = 6 \times 4 + 1$.

*** نکته:** تنها عدد اولی که زوج است عدد ۲ می‌باشد. (اعداد اول: ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ...)

مثال: مجموع دو عدد اول برابر ۹۱ شده است. مجموع ارقام حاصل ضرب آن دو عدد را بیابید.

مثال: دو عدد طبیعی a و b چنانند که $a^2 = b^2 + 41$ ، مجموع ارقام عدد $a+2b$ را بیابید.

*** قضیه:** بی‌نهایت عدد اول وجود دارد. (مجموعه‌ی اعداد اول مجموعه‌ای نامتناهی است)

*** قضیه:** عدد n اول است هرگاه به هیچ یک از اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی \sqrt{n} بخش پذیر نباشد.

*** تجزیه‌ی یک عدد به حاصل ضرب عوامل اول:**

*** هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ را می‌توان به صورت حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کرد.**

*** نکته:** اگر پس از تجزیه‌ی یک عدد، توان تمام عامل‌های اول عددی زوج باشند، آن عدد، مربع کامل است و اگر مضرب سه باشند، مکعب کامل است.

مثال: با توجه به تجزیه‌ی عدد 1380 ، مربع کامل بودن آن را بررسی کنید.

*** نکته:** اگر عدد n به صورت $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ به حاصل ضرب اعداد اول تجزیه شده باشد، آن‌گاه تعداد تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد n برابر $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ خواهد بود.

مثال: تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد 50 را بیابید.

مثال: کدام یک از اعداد زیر دارای ۲۷ مقسوم‌علیه مثبت می‌باشد؟

- (۱) ۱۹۶۳ (۲) ۱۷۶۴ (۳) ۱۸۶۲ (۴) ۲۱۷۸

*** نکته:** تعداد عوامل اول p موجود در $n!$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$$



مثال: در تجزیه‌ی عدد $50!$ ، توان عدد ۳ چند است؟

مثال: تعداد صفرهای واقع در انتهای عدد $n!$ با تعداد عوامل ۵ موجود در $n!$ یعنی مقدار زیر برابر است.

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \dots$$

مثال: تعداد صفرهای موجود در انتهای $79!$ چقدر است؟

مثال: بیش‌ترین مقدار k برای آن‌که $194!$ بر 21^k بخش‌پذیر باشد، چقدر است؟

* بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد

برای به دست آوردن بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک چند عدد، هر یک از آن‌ها را به حاصل‌ضرب عوامل‌های اول تجزیه کرده و سپس عامل‌های مشترک با توان کم‌تر را در یکدیگر ضرب می‌کنیم.

ب.م.م دو عدد a و b را با نماد (a, b) نمایش می‌دهیم.

مثال: بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد 450 و 1008 را بیابید.

* نکته: $(a, b) = d \Rightarrow d | a, d | b$.

* نکته: مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد a و b با مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ب.م.م آن دو عدد برابر است؛ یعنی اگر $x | a$ و $x | b$ آن‌گاه $x | (a, b)$.

مثال: بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b برابر با 72 می‌باشد. آن دو عدد چند مقسوم علیه مشترک دارند؟

* ترکیب خطی دو عدد: به ازای هر $m, n \in \mathbb{Z}$ ، $ma + nb$ را یک ترکیب خطی a و b می‌گوییم.

* نکته: $(a, b) = d \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}, ma + nb = d$.

* دو عدد متباین (نسبت به هم اول): دو عدد a و b را نسبت به هم اول گوییم هرگاه $(a, b) = 1$.

* نکته: اگر برای اعداد صحیح a و b ، اعداد صحیحی مانند r و s چنان یافت شوند که $ra + sb = 1$ ، آن‌گاه $(a, b) = 1$.

مثال: اگر $(b, d) = 1$ و $(a - 2b, 3a - b) = d$ ، آن‌گاه مقدار d را بیابید.

* نکته: اگر a در تقسیم بر b باقیمانده‌ی r داشته باشد، آن‌گاه $(a, b) = (b, r)$.

مثال: اگر $(a, b) = d$ ، آن‌گاه $(a, 5a + d)$ چقدر است؟

* نکته: اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع (تفاضل) آن دو عدد نیز نسبت به هم اولند، یعنی: $(a, b) = 1 \Rightarrow (a \pm b, ab) = 1$.

* نکته: هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اولند و نیز هر دو عدد صحیح فرد متوالی نسبت به هم اولند.

$$\left. \begin{aligned} (a, b) = 1 \\ (a, c) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (a, bc) = 1 \quad * \text{ نکته:}$$

* نکته (لم اقلیدس): اگر $a | bc$ و $(a, b) = 1$ ، آن گاه $a | c$.

* نکته: اگر p عددی اول باشد و $p | ab$ و $p \nmid a$ آن گاه $p | b$.

* نکته: اگر $(a, b) = d$ ، آن گاه روابط زیر برقرارند.

$$1) (ka, kb) = |k|d \quad k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

$$2) \left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) = \frac{d}{|k|} \quad k | d$$

$$3) (a^n, b^n) = d^n \quad n \in \mathbb{N}$$

* قضیه ی بزو: بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آن ها صفر نیست، برابر

$$S = \{ma + nb > 0 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

مثال: عضو ابتدای مجموعه ی $A = \{42r + 12s > 0 \mid r, s \in \mathbb{Z}\}$ را بیابید.

* کوچک ترین مضرب مشترک دو عدد

برای به دست آوردن کوچک ترین مضرب مشترک چند عدد، هر یک از آن ها را به حاصل ضرب عامل های اول تجزیه کرده و سپس عامل های مشترک با توان بیشتر و همچنین عامل های غیر مشترک را در یکدیگر ضرب می کنیم.

مثال: کوچکترین مضرب مشترک دو عدد 450 و 1008 را بیابید.

$$\left\{ \begin{aligned} a = a'd, b = b'd, (a', b') = 1 \\ [a, b] = a'b'd \end{aligned} \right. \quad * \text{ نکته: اگر } (a, b) = d, \text{ آن گاه می توان نوشت:}$$

* نکته: اگر a و b دو عدد صحیح دلخواه باشند، آن گاه $(a, b) \cdot [a, b] = |ab|$.

مثال: کوچک ترین مضرب مشترک دو عدد طبیعی 13 برابر بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک آن دو عدد می باشد،

اگر مجموع این دو عدد برابر 126 باشد، آن گاه ب.م.م. آن دو عدد را بیابید.

مثال: مجموع دو عدد طبیعی، برابر 504 و ب.م.م. آن دو عدد برابر 36 است. کمترین مقدار طبیعی برای تفاضل آن دو عدد را بیابید.

* همنهشتی

اگر دو عدد صحیح a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m ($m \geq 2$) باقی مانده ی یکسانی مانند r داشته باشند،

آن گاه دو عدد a و b را همنهشت با یکدیگر به پیمانه ی m میگوییم و آن را به صورت $a \equiv b \pmod{m}$ یا (پیمانه m) $a \equiv b$ نشان می دهیم.

* نکته: اگر $a \equiv b \pmod{m}$ آن گاه عدد صحیحی مثل q وجود دارد به طوری که: $a - b = mq$.

* خواص همنهشتی:

در تمام روابط زیر a, b, c, d اعداد صحیح و m عددی طبیعی بزرگ تر از 1 می باشد.

$$1) a \equiv b \pmod{m}$$

$$۲) a \equiv b \Rightarrow b \equiv a$$

$$۳) (a \equiv b, b \equiv c) \Rightarrow a \equiv c$$

$$۴) (a \equiv b, c \equiv d) \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d$$

$$۵) (a \equiv b, c \equiv d) \Rightarrow ac \equiv bd$$

$$۶) (a \equiv b) \Rightarrow (a \pm c \equiv b \pm c, ac \equiv bc)$$

$$۷) a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n$$

$$۸) (a \equiv b, a \equiv b) \Leftrightarrow a \equiv b$$

$$۹) (a \equiv b, n | m) \Rightarrow a^n \equiv b^n$$

$$۱۰) (ac \equiv bc, d = (m, c)) \Rightarrow a \equiv b$$

مثال: باقی مانده‌ی تقسیم $۳۵^{۴۰}$ بر ۹ را بیابید.

مثال: باقی مانده‌ی تقسیم عدد $۲^{۶۱}$ بر ۱۷ را بیابید.

مثال: باقی مانده‌ی تقسیم $۳^{۱۶} + ۵$ بر عدد ۷ را بیابید.

مثال: باقی مانده‌ی تقسیم $۵^n + ۲۳ + ۱۸^n + ۴۲$ بر ۱۳ را بیابید.

مثال: عدد $۲^{۱۳۸۴}$ در تقسیم بر ۱۳ چه باقی مانده‌ای دارد؟

مثال: کوچک‌ترین عدد طبیعی a که به ازای آن، $a + ۲^{۶۴}$ بر ۵ بخش پذیر باشد چقدر است؟

مثال: اگر $a \equiv ۲$ و $a \equiv ۴$ ، آنگاه a در تقسیم بر ۲۴ چه باقی مانده‌ای دارد؟

مثال: کوچک‌ترین عدد طبیعی را بیابید که با ازای آن رابطه‌ی $۴x \equiv ۳$ برقرار باشد.

* کلاس هم‌ارزی (دسته‌ی هم‌ارزی): کلاس هم‌ارزی a مجموعه‌ای از اعداد صحیح است که هر یک از آن‌ها به

$$[a]_m = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, x \equiv a \pmod{m} \right\}$$

پیمانه‌ی m با a هم‌نهشت باشند.

مثال: عدد $۲۰۷ -$ به کدام دسته‌ی هم‌ارزی به پیمانه‌ی ۸ قرار دارد؟

(۱) $[۱]$ (۲) $[۳]$ (۳) $[۵]$ (۴) $[۷]$

مثال: کدام دو عدد زیر متعلق به یک دسته‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۷ هستند؟

(۱) $۹۶ و ۲۷$ (۲) $۹۶ و ۲۸$ (۳) $۹۶ و ۲۶$ (۴) $۹۶ و ۲۵$

مثال: اگر $۲a - ۱$ عضوی از دسته‌ی هم‌نهشتی $۳ - ۳a$ به پیمانه‌ی ۶ باشد، آن‌گاه a کدام می‌تواند باشد؟

(۱) ۱۳۸۱ (۲) ۱۳۸۲ (۳) ۱۳۸۳ (۴) ۱۳۸۴

* قضیه‌ی فرما: اگر p عددی اول بوده و عدد صحیح a چنان باشد که $(a, p) = ۱$ ، آن‌گاه: $a^{p-1} \equiv ۱ \pmod{p}$.

* نکته: برای محاسبه‌ی رقم یکان اعداد توان‌دار، به جای پایه، رقم یکان و به جای توان، اگر توان مضرب ۴ باشد، به

جای توان عدد ۴ و در غیر این صورت باقی مانده‌ی تقسیم آن بر ۴ را در نظر می‌گیریم.

مثال: رقم یکان عدد $۱۳۹۲^{۱۳۹۳}$ را بیابید.

مثال: رقم یکان عدد ۲×۱۳۸۳^{۱۳۸۴} را بیابید.

مثال: رقم یکان عدد $۲۷^{۲۳} + ۴۳^{۱۷}$ را بیابید.

مثال: رقم یکان عدد $(۴۹! + ۷۳! + ۸۲)^{۴۲!}$ را بیابید.

* نمایش اعداد در مبناهای مختلف

می‌دانیم عدد ۴۹۲ که در مبنای ۱۰ نوشته شده است، به صورت $۴ \times ۱۰^۲ + ۹ \times ۱۰^۱ + ۲ \times ۱۰^۰$ نیز قابل نمایش است و نیز عدد $(۵۷۲۶)_۸$ که در مبنای هشت نوشته شده است، به صورت $۵ \times ۸^۳ + ۷ \times ۸^۲ + ۲ \times ۸^۱ + ۶ \times ۸^۰$ نیز قابل نمایش است. بنابر این هر عددی در یک مبنای خاص، قابل تبدیل به مبنای دیگر می‌باشد.

* نکته: برای تبدیل هر عددی از مبنای ۱۰ به مبنایی غیر از ۱۰ ، از تقسیم‌های متوالی و برای تبدیل عددی از مبنای غیر ۱۰ به مبنای ۱۰ از ضرب‌های متوالی استفاده می‌کنیم.

* نکته: برای تبدیل عددی از مبنای غیر ۱۰ به مبنای غیر ۱۰ می‌توان ابتدا آن را به مبنای ۱۰ برد و سپس به مبنای غیر ۱۰ خواسته شده تبدیل کرد.

* نکته: اگر یک عدد در مبنای n نوشته شود، حتما هر یک از ارقام آن کمتر از n خواهند بود.

مثال: عدد $(۲۱۰۳)_۴$ را به مبنای ۱۰ ببرید.

مثال: عدد ۳۵۷ را که در مبنای ۱۰ نوشته شده است به مبنای ۲ ببرید.

مثال: عدد $۱۱ + ۶۹ \times ۸^۳ + ۱۳ \times ۸^۲$ را به مبنای ۸ ببرید.

مثال: عدد $(۱۰۱۱۱۰۱۱)_۲$ را به مبنای ۸ ببرید. (چون $۸ = ۲^۳$ لذا اعداد را از سمت راست، ۳ تا ۳ تا جدا کرده و هر کدام از این اعداد سه تایی را به مبنای ۸ تبدیل می‌کنیم و برای تبدیل از مبنای ۸ به ۲ برعکس عمل می‌کنیم، یعنی هر عدد از مبنای ۸، ۳ رقم از آن عدد را در مبنای ۲ تشکیل می‌دهد)

مثال: حاصل عدد $(۳۷۵۴)_۸$ را در مبنای ۲ بنویسید.

مثال: اگر $(۱۳۴)_{x+۱} = (۲۱۳)_x$ ، در این صورت $(۱۱۱)_x$ را بیابید.

مثال: اگر عدد دو رقمی $(ab)_۷$ با عدد $(ba)_۹$ برابر باشد، مقادیر a و b را بیابید.

مثال: عدد $۶۵!$ در مبنای ۶ به چند صفر ختم می‌شود؟

* قوانین یافتن بخش پذیری اعداد طبیعی بر اعداد ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ...

(۱) بخش‌پذیری بر ۲^k (۲ و ۴ و ۸ و ...): عددی بر ۲^k بخش‌پذیر است که مجموع k رقم سمت راست آن بر ۲^k بخش‌پذیر باشد.

(۲) بخش‌پذیری بر ۳ و ۹: عددی بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر است که مجموع تمام ارقامش بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر باشد.

(۳) بخش‌پذیری بر ۵: عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم سمت راست آن ۰ یا ۵ باشد.

(۴) بخش‌پذیری بر ۱۱: عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که اگر ارقام آن را به ترتیب از راست به چپ با علامت مثبت و منفی جمع جبری کنیم حاصل آن بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

*** معادله‌ی سیاله**

* هر معادله به صورت $ax + by = c$ که در آن $a, b, c \in \mathbb{Z}$ و برای هر x و y ، به دنبال مقادیری در \mathbb{Z} باشیم، یک معادله‌ی سیاله‌ی خطی دو مجهولی نامیده می‌شود.

* **قضیه:** شرط لازم و کافی برای آن که معادله‌ی سیاله‌ی $ax + by = c$ دارای جواب باشد آن است که $(a, b) | c$.

مثال: اگر معادله‌ی $۸۴x + ۶۶y = ۵n + ۱۱$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح جواب داشته باشد، آن گاه n چه مقادیری را می‌تواند اختیار کند؟

* **نکته:** اگر $(a, b) = ۱$ ، آن گاه معادله‌ی $ax + by = c$ همواره جواب دارد.

* **نکته:** اگر x_0 و y_0 جواب‌هایی از معادله‌ی $ax + by = c$ باشند، و $(a, b) = d$ ، آن گاه جواب‌های کلی آن معادله

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \end{cases} \quad \text{به شکل زیر است.}$$

مثال: جواب‌های عمومی معادله‌ی $۹x + ۵y = -۴$ را بیابید.

مثال: اگر x و y جواب‌هایی از معادله‌ی $۵۴x + ۲۱y = ۱۵$ باشند، آن گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد x بر ۷ را بیابید.

مثال: معادله‌ی سیاله‌ی $۲۶x + ۳۸y = ۲۰۴$ را در \mathbb{Z} حل کنید.

مثال: پستخانه‌ای فقط تمبرهای ۲۱۰ ریالی و ۱۴۰ ریالی برای فروش دارد. بسته‌ای نیاز به ۱۴۷۰ ریال تمبر دارد.

چند تمبر ۲۱۰ ریالی و چند تمبر ۱۴۰ ریالی باید بخرد.

نمونه سوال امتحانی نظریه‌ی اعداد

۱. اگر $a|b$ و $b \neq 0$ ، ثابت کنید $|a| \leq |b|$.
۲. درستی یا نادرستی احکام زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $ab^2 c \Rightarrow b a$	ب) $a b \Rightarrow ac b$
ج) $a^2 b^3 \Rightarrow a^3 b^5$	د) $a^2 - b^2 a \Rightarrow a^2 - b^2 b^2$
۳. اگر $a|b$ و $a|c$ ، ثابت کنید: $a|3b+2c$.
۴. ثابت کنید اگر p یک عدد اول باشد و $p|ab$ ، آن‌گاه $p|a$ یا $p|b$.
۵. اگر a و b دو عدد طبیعی فرد باشند، ثابت کنید $2|a^2+b^2$ و $4|a^2+b^2$.
۶. الف) ثابت کنید اگر $a|b$ ، آن‌گاه $a|bc$.
ب) برای مقادیر صحیح a, b, c ، مثالی بیاورید که $a|bc$ برقرار باشد ولی دو حکم $a|b$ و $a|c$ برقرار نباشد.
۷. اگر عدد سه رقمی $\overline{3ab}$ مضرب ۱۵ باشد و $b \neq 0$ ، این عدد را مشخص کنید. مساله چند جواب دارد؟
۸. عدد ${}_p(10211)$ را به مبنای ۵ ببرید.
۹. با استفاده از نمایش یک عدد در مبنای ۱۰، قاعده‌ی پیدا کردن باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۱۱ را به دست آورید.
۱۰. ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.
۱۱. a و b دو عدد صحیح‌اند که حداقل یکی از این دو مخالف صفر است. اگر برای هر m و n صحیح، $ma+nb=1$ باشد، ثابت کنید: $(a,b)=1$.
۱۲. ثابت کنید اگر $(m, c) = 1$ و $ac \equiv bc \pmod{m}$ (پیمانه m)، آن‌گاه $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$ (پیمانه $\frac{m}{d}$).
۱۳. اگر $a|b$ و $c|b$ و $(a,c)=1$ باشد، ثابت کنید: $ac|b$.
۱۴. ثابت کنید اگر $(a,b)=1$ و $(a,c)=1$ ، آن‌گاه $(a,bc)=1$.
۱۵. ثابت کنید اگر $(a,b)=1$ و $a|bc$ ، آن‌گاه $a|c$.
۱۶. ثابت کنید اگر $b|c$ آن‌گاه $(a,b)=(a+c,b)$.
۱۷. نشان دهید اگر a عددی زوج باشد و $(a,b)=1$ ، آن‌گاه $(a-b, a+b)=1$.
۱۸. اگر $d = (a-5, a^2 - 6a + 3)$ و $a \in \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه d را محاسبه کنید.
۱۹. ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد زوج طبیعی متوالی بر ۲۴ بخش‌پذیر است.
۲۰. الف) ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.
ب) ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی بر ۸ بخش‌پذیر است.
۲۱. الف) ثابت کنید مربع هر عدد فرد به صورت $8q+1$ است.
ب) نشان دهید حاصل ضرب هر دو عدد به صورت $6a+5$ به صورت $6a+1$ است.
۲۲. اگر عدد صحیح a مضرب ۳ و باقیمانده‌ی آن بر ۱۹ برابر ۵ باشد، باقیمانده‌ی $\frac{a}{3}$ بر ۱۹ کدام است؟
۲۳. اگر در یک تقسیم ۹۰ واحد به مقسوم و ۴ واحد به مقسوم علیه اضافه کنیم، خارج قسمت ثابت مانده و از باقی‌مانده ۲ واحد کم می‌شود. خارج قسمت را به دست آورید.
۲۴. بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد، ۲ و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها ۲۲۲ است. آن دو عدد را به بیابید.

۲۵. اگر مجموع دو عدد، 102 و کوچکترین مضرب مشترک آنها 432 باشد، بزرگترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد را بیابید.

۲۶. هرگاه $3a \equiv 2 \pmod{5}$ و $2a \equiv 1 \pmod{3}$ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم a بر 15 کدام است؟

۲۷. باقیمانده‌ی تقسیم عدد 2^{21} را بر عدد 31 پیدا کنید.

۲۸. رقم یکان 7^{327} را محاسبه کنید.

۲۹. رقم یکان $7^{73} + 3^{25}$ را محاسبه کنید.

۳۰. آخرین رقم سمت راست عدد 27^{1386} را به دست آورید.

۳۱. باقیمانده‌ی تقسیم 2^{21} را بر عدد 31 به دست آورید.

۳۲. ثابت کنید $8 - 2^{23}$ بر 31 بخش پذیر است.

۳۳. اگر باقیمانده‌ی تقسیم اعداد A و B بر 39 به ترتیب 17 و 23 باشد، باقیمانده‌ی $A - B$ بر 39 را محاسبه کنید.

۳۴. به ازای چه مقادیری از m ، معادله‌ی $20x + 14y = m$ جواب صحیح دارد؟

۳۵. معادله‌ی سیاه‌ی $13x + 17y = 100$ را در Z حل کنید.

۳۶. جواب‌های کلی معادله‌ی $7x + 11y = 69$ را بنویسید.

۳۷. معادله‌ی سیاه‌ی $38x + 34y = 120$ را در Z حل کنید.

فصل ۳: مباحثی دیگر از ترکیبیات

رابطه‌ها و گراف‌ها

* **رابطه:** هر زیرمجموعه از $A \times B$ را یک رابطه از A به روی B می‌گوییم. اگر رابطه‌ای زیرمجموعه‌ای از $A \times A$ باشد، آنگاه می‌گوییم آن رابطه بر روی مجموعه‌ی A تعریف شده است.

مثال‌هایی از رابطه، به صورت‌های زیر است:

$$(۱) \quad aRb \text{ یا } (a,b) \in R, \text{ هرگاه } a \leq b.$$

$$\text{طبق تعریف بالا } (۲,۵) \in R \text{ ولی } (۴,۱) \notin R.$$

(۲) برای هر دو عضو $x, y \in Z$ تعریف می‌کنیم: $(x, y) \in R$ یا xRy هرگاه $x - y$ مضربی از ۷ باشد.

$$\text{طبق تعریف بالا } ۹R۲ \text{ ولی } ۱۲ \not R ۶.$$

مثال: رابطه‌ی R در مجموعه‌ی اعداد حقیقی به صورت $xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2xy$ تعریف شده است. عدد ۱۳۹۳ با چه عددی رابطه دارد؟

* ویژگی‌های چهارگانه‌ی یک رابطه

اگر رابطه‌ی R بر روی مجموعه‌ی A تعریف شده باشد، آنگاه آن رابطه:

(۱) دارای خاصیت بازتابی (انعکاسی) است اگر و تنها اگر به ازای هر عضوی مانند x متعلق به A ، زوج مرتب (x, x) در R باشد.

(۲) دارای خاصیت تقارنی است اگر و تنها اگر به ازای هر x و y متعلق به A در صورت موجود بودن زوج مرتب (x, y) در R ، زوج مرتب (y, x) نیز در R موجود باشد.

(۳) دارای خاصیت پادتقارنی است اگر و تنها اگر به ازای هر x و y متمایز متعلق به A از دو زوج مرتب (x, y) و (y, x) حداکثر یکی از آن دو در R باشد. (به عبارتی اگر $(x, y) \in R$ و $(y, x) \in R$ آنگاه $x = y$)

(۴) دارای خاصیت تعدی (تراگذری یا ترایی) است اگر و تنها اگر به ازای هر x و y و z متعلق به A ، در صورت موجود بودن هر دو زوج مرتب (y, z) و (x, y) در R ، زوج مرتب (x, z) نیز در R موجود باشد.

* **هم‌ارزی:** رابطه‌ای که هر سه ویژگی بازتابی، تقارنی و تعدی را داشته باشد، رابطه‌ی هم‌ارزی است.

* **نکته:** رابطه‌ی تهی، هر سه ویژگی تقارنی، پادتقارنی و تعدی را دارد.

* **نکته:** رابطه‌ای که فقط دارای یک زوج مرتب باشد، هر دو ویژگی پادتقارنی و تعدی را داراست. اگر مولفه‌های اول و دوم آن زوج مرتب یکسان باشد، آن رابطه ویژگی تقارنی را نیز خواهد داشت.

* **نکته:** تنها رابطه‌ای که می‌توان بر روی $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ تعریف کرد تا هر چهار ویژگی بازتابی، تقارنی، پادتقارنی و تعدی را داشته باشد رابطه‌ی $\{(a_1, a_1), (a_2, a_2), \dots, (a_n, a_n)\}$ می‌باشد.

مثال: مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ داده شده است. رابطه‌ای روی A تعریف کنید که:

(۱) بازتابی باشد.

(۲) متقارن باشد.

(۳) تعدی باشد

(۴) پادتقارن باشد

(۵) بازتابی و تراپایی باشد ولی متقارن نباشد.

(۶) فقط خاصیت پادتقارنی داشته باشد.

(۷) نه متقارن باشد و نه پادمتقارن.

(۸) هم متقارن باشد و هم پادمتقارن.

(۹) متقارن و بازتابی باشد ولی تراگذر نباشد.

مثال: کدام یک از روابط زیر، خاصیت هم‌ارزی دارند؟

(۱) رابطه‌ی تساوی در مجموعه‌ی اعداد حقیقی.

(۲) رابطه‌ی توازی در مجموعه‌ی خطوط یک صفحه.

(۳) رابطه‌ی عمود بودن در مجموعه‌ی خطوط یک صفحه.

(۴) رابطه‌ی کوچک‌تر یا مساوی در مجموعه‌ی اعداد حقیقی.

(۵) رابطه‌ی R با ضابطه‌ی $xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2xy$ در مجموعه‌ی اعداد حقیقی.

* گراف جهت‌دار متناظر به یک رابطه

اگر R یک رابطه روی مجموعه‌ی A باشد، می‌توان به آن رابطه یک گراف جهت‌دار نسبت داد به طوری که مجموعه‌ی رئوس این گراف همان مجموعه‌ی A باشد و یال جهت‌دار \overline{ab} در گراف موجو باشد اگر و تنها اگر زوج مرتب (a, b) در R باشد.

مثال: گراف جهت‌دار متناظر با رابطه‌ی زیر را رسم کنید. $R = \{(a, b), (b, b), (b, d), (c, e), (e, c), (e, d)\}$

* بررسی ویژگی‌های چهارگانه‌ی یک رابطه از روی گراف متناظر با آن

اگر رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی A تعریف شده باشد، آنگاه رابطه‌ی R :

(۱) یک رابطه بازتابی است اگر و تنها اگر گراف جهت‌دار متناظر با آن در هر راس، دارای یک طوقه باشد.

(۲) یک رابطه متقارن است اگر و تنها اگر، به ازای هر i و j متعلق به A ، در صورت موجود بودن یال جهت‌دار \overline{ij} ، یال جهت‌دار \overline{ji} نیز موجود باشد.

(۳) یک رابطه پادمتقارن است اگر و تنها اگر، به ازای هر i و j متعلق به A ، اگر یال \overline{ij} موجود بود آن‌گاه یال \overline{ji} موجود نباشد.

(۴) یک رابطه تعدی است اگر و تنها اگر، به ازای هر i و j و k متعلق به A ، اگر یال‌های \overline{ij} و \overline{jk} موجود بودند، آن‌گاه یال \overline{ik} نیز موجود باشد.

مثال: رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A = \{۳, ۶, ۷, ۱۱\}$ ، به صورت $R = \{(x, y) \mid x \mid y\}$ تعریف شده است.

(الف) رابطه‌ی R را مشخص کنید.

(ب) گراف جهت‌دار متناظر با R را رسم کنید.

(ج) آیا R یک رابطه هم‌ارزی است؟ چرا؟

مثال: رابطه‌ی متناظر به گراف جهت‌دار زیر چه تعداد از ویژگی‌های چهارگانه را داراست؟

* **نکته:** اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد، در این صورت می‌توان 2^{n^2} رابطه روی A تعریف کرد.

* نکته: هر رابطه یک و فقط یک گراف جهت دار دارد.

* نکته: با p راس مشخص، 2^p گراف جهت دار می توان ساخت.

مثال: با ۵ راس a, b, c, d, e چند گراف جهت دار می توان ساخت؟

* ماتریس متناظر به یک رابطه

* اگر R رابطه ای روی مجموعه n عضوی A باشد، می توان به آن رابطه یک ماتریس مربعی مثل M از مرتبه n نسبت داد به طوری که اگر iRj آن گاه درایه m_{ij} ماتریس، برابر با ۱ و در غیر این صورت برابر با صفر خواهد بود.

مثال: اگر رابطه R روی مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ به صورت زیر تعریف شده باشد، ماتریس متناظر با رابطه R را بنویسید.

$$R = \{(c, d), (a, b), (b, b), (b, c), (d, a)\}$$

اعمال بولی

اعمال جمع و ضرب بولی روی مجموعه $\{0, 1\}$ به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\begin{array}{cccc} 0 \oplus 0 = 0 & 0 \oplus 1 = 1 & 1 \oplus 0 = 1 & 1 \oplus 1 = 1 \\ 0 \odot 0 = 0 & 0 \odot 1 = 0 & 1 \odot 0 = 0 & 1 \odot 1 = 1 \end{array}$$

توان دوم یک ماتریس

اگر $M(R)$ ماتریس متناظر یک رابطه باشد، در این صورت ماتریس $[M(R)]^2$ از ضرب بولی ماتریس M در خودش به دست خواهد آمد با این تفاوت که هنگام ضرب هر درایه که مقدار آن غیر صفر باشد، ۱ منظور خواهد شد و در غیر این صورت مقدار آن درایه صفر خواهد بود.

مثال: اگر $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس M^2 را بیابید.

* ترکیب یک رابطه با خودش

اگر رابطه R روی مجموعه A تعریف شده باشد، آن گاه ترکیب رابطه R با خودش که آن را به صورت ROR نمایش می دهیم عبارت است از رابطه ای که آن رابطه شامل زوج مرتب (i, j) باشد اگر و تنها اگر عضوی مانند k در A یافت شد که (i, k) و (k, j) هر دو در R باشند.

مثال: رابطه R روی $\{1, 2, 3, 4\}$ به صورت زیر تعریف شده است. رابطه ROR را به دست آورید.

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

* نکته: اگر $M(R)$ ماتریس متناظر به رابطه R باشد، آن گاه $M^2(R) = M(ROR)$.

مثال: رابطه R روی مجموعه $A = \{-1, 0, 2, 3\}$ به صورت مقابل تعریف شده است: $aRb \Leftrightarrow |b| \leq a$

الف) گراف جهت دار R را رسم کنید و تحقیق کنید که پادمتقارن است یا خیر؟

ب) ماتریس $M(R)$ را نوشته و رابطه ROR را با عضوهایش نشان دهید.

*** مقایسه‌ی دو ماتریس**

اگر دو ماتریس هم‌مرتبه‌ی E و F هر دو دارای درایه‌های صفر و یک باشند، آن‌گاه ماتریس E را کوچک‌تر یا مساوی F گوئیم هرگاه به ازای هر i و j ، درایه‌ی سطر i ام و ستون j ام ماتریس E از درایه‌ی متناظرش در F کوچک‌تر یا مساوی باشد و آن را به صورت $E \ll F$ نشان می‌دهیم.

مثال: اگر $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ آن‌گاه چند ماتریس مانند F وجود دارد به طوری که $F \ll E$ ؟

مثال: تعداد ماتریس‌های صفر و یک مانند F با شرط $E \ll F$ و $E \neq F$ را برای ماتریس زیر بنویسید.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*** نکته:** ماتریس $M \wedge M^T$ با عمل روی درایه‌های M و M^T نظیر به نظیر با ضرب مولفه به مولفه تشکیل می‌شود.

بررسی ویژگی‌های چهارگانه‌ی یک رابطه از روی ماتریس متناظر به آن گراف

اگر رابطه‌ی R بر روی مجموعه‌ی n عضوی A تعریف شده باشد، آن‌گاه آن رابطه:

(۱) دارای خاصیت بازتابی است اگر و تنها اگر تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ باشد. (پس روی یک

مجموعه‌ی n عضوی به تعداد 2^{n-1} رابطه‌ی بازتابی می‌توان تعریف کرد)

(۲) دارای خاصیت تقارنی است اگر و تنها اگر ماتریس M متقارن باشد. (پس روی یک مجموعه‌ی n عضوی به

تعداد $2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$ رابطه‌ی تقارنی می‌توان تعریف کرد)

(۳) دارای خاصیت پادتقارنی است اگر و تنها اگر به ازای هر i و j متممیز، از دو درایه‌ی m_{ij} و m_{ji} حداکثر یکی از

آن دو برابر ۱ باشد؛ به عبارتی $M \wedge M^T \ll I_n$. (پس روی یک مجموعه‌ی n عضوی به تعداد $2^n \times 2^{\frac{n^2-n}{2}}$

رابطه‌ی پادتقارنی می‌توان تعریف کرد)

(۴) دارای خاصیت تعدی است اگر و تنها $M^2 \ll M$.

اصل شمول و عدم شمول

در جبر مجموعه‌ها به رابطه‌ی زیر، اصل شمول و عدم شمول می‌گوئیم.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

مثال: چند عضو مجموعه‌ی $A = \{x \in N \mid 1 \leq x \leq 100\}$ نه بر 7 بخش‌پذیر هستند و نه بر 11 .

مثال: چند عدد طبیعی کمتر از 1000 وجود دارد که بر 7 و 5 تقسیم پذیر نیستند؟

*** نکته:** تعداد جواب‌های صحیح نامنفی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$

*** نکته:** تعداد جواب‌های صحیح مثبت (طبیعی) $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$

مثال: معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

مثال: معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

مثال: معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$ با شرط $x_4 \geq 1, x_5 \geq 2$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

مثال: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ را با شرایط $x_1 > 1, x_2 > 2, x_3 > 3$ تعیین کنید.

مثال: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ را با شرط $x_i > 2$ برای $i = 1, 2, 3$ بیابید.

* نکته: تعداد جواب‌های صحیح مثبت (طبیعی) نامعادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k < n$ برابر است با تعداد جواب‌های

$$\text{صحیح مثبت معادله‌ی } x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = n \text{ یعنی برابر است با } \binom{n-1}{k}.$$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح و مثبت نامعادله‌ی $x + y + z < 7$ را بیابید.

* نکته: تعداد جواب‌های صحیح نامنفی نامعادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k < n$ با تعداد جواب‌های صحیح نامنفی

معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = n$ با شرط $x_{k+1} \geq 1$ یعنی با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = n - 1 \text{ برابر است. یعنی برابر است با } \binom{n+k-1}{k}.$$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 6$ را بیابید.

* نکته: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از n را که نسبت به آن اول باشند، با $\phi(n)$ نمایش می‌دهیم و در حالتی که

آن عدد به صورت $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ حاصل ضرب عوامل اول تجزی شده باشد، $\phi(n)$ از رابطه‌ی زیر به

$$\text{دست می‌آید. } \phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

مثال: تعداد اعداد صحیح مثبت کوچک‌تر از 500 را که نسبت به 500 اولند محاسبه کنید.

نمونه سوال امتحانی ترکیبیات

۱. رابطه‌ی $R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)\}$ روی مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3\}$ تعرف شده است: الف) گراف جهت‌دار متناظر با رابطه‌ی R را بنویسید.

ب) ماتریس $M(R)$ را مشخص کرده و به کمک آن رابطه‌ی مرکب RoR را مشخص کنید.

۲. رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A = \{-1, 0, 2, 3\}$ به صورت مقابل تعریف شده است: $aRb \Leftrightarrow |b| \leq a$

الف) گراف جهت‌دار R را رسم کنید و تحقیق کنید که پادمتقارن است یا خیر؟

ب) ماتریس RoR را نوشته و از آنجا رابطه‌ی RoR را با عضوهایش نشان دهید.

۳. مجموعه‌ی $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ و رابطه‌ی R روی A به صورت $R = \{(x, y) : |x| = |y|\}$ تعریف شده است. الف) گراف جهت‌دار متناظر با R را بنویسید.

ب) با استفاده از گراف جهت‌دار متناظر با R تحقیق کنید R پادمتقارن است یا خیر؟

۴. رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,3), (3,1), (4,2), (4,4)\}$$

الف) گراف جهت‌دار رابطه را رسم کنید

ب) از روی گراف رابطه مشخص کنید رابطه‌ی R بازتابی است؟

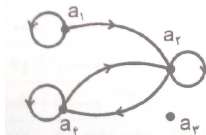
ج) ماتریس نظیر رابطه‌ی R را بنویسید. د) از روی ماتریس، خاصیت ترایایی R را بررسی کنید.

۵. تعداد ماتریس‌های صفر و یک مانند F با شرط $E \ll F$ و $E \neq F$ را برای ماتریس زیر بنویسید.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۶. رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ تعریف شده است. اگر گراف جهت‌دار متناظر R به صورت

زیر باشد:



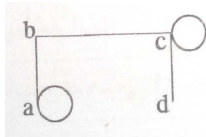
الف) رابطه‌ی R را به صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) ماتریس متناظر با رابطه‌ی R را بنویسید.

ج) با استفاده از ماتریس متناظر با R ، تحقیق کنید R متقارن است یا خیر؟

۷. رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d\}$ تعریف شده است. اگر گراف جهت‌دار متناظر با R به صورت زیر

باشد:



الف) رابطه‌ی R را به صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) با استفاده از گراف جهت‌دار متناظر با R تحقیق کنید R ترایایی است یا خیر؟

ج) ماتریس متناظر با رابطه‌ی R را بنویسید.

۸. چند عضو از مجموعه‌ی $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 1262\}$ نه بر ۵ و نه بر ۳ بخش پذیر است؟

۹. چند عدد سه رقمی وجود دارد که در آن هر یک از ارقام ۲ و ۳ حداقل یک بار به کار رفته باشد؟

۱۰. تعداد جوابهای معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ را به دست آورید.

۱۱. تعداد جوابهای صحیح و مثبت معادلهی مقابل را تعیین کنید. $x_1 + x_2 + 10x_3 = 23$

فصل ۴: احتمال

پدیده‌ی تصادفی

آزمایش یا پدیده‌ای است که قبل از وقوع، نتیجه‌ی آن به طور قطع معلوم نباشد.

فضای نمونه‌ای (S):

در یک پدیده‌ی تصادفی، به مجموعه‌ی تمام نتایج ممکن، فضای نمونه‌ای می‌گوییم.

مثال: یک سکه را ۴ بار پرتاب می‌کنیم؛ فضای نمونه‌ای حاصل چند عضو دارد؟

مثال: یک سکه و یک تاس را پرتاب می‌کنیم، فضای نمونه‌ای حاصل چند عضو دارد؟

مثال: یک ظرف شامل ۳ مهره‌ی متمایز آبی و ۴ مهره‌ی متمایز سفید است. از این ظرف ۲ مهره به طور تصادفی

خارج می‌کنیم، فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

پیشامدهای تصادفی:

به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای یک پیشامد تصادفی می‌گوییم.

نکته: در یک مجموعه‌ی n عضوی، تعداد پیشامدهای k عضوی برابر با $\binom{n}{k}$ و تعداد کل پیشامدها 2^n است.

مثال: در پرتاب دو تاس با یکدیگر، پیشامد آن را که مجموع دو عدد به دست آمده برابر ۸ باشد، بنویسید.

مثال: از میان ۷ نفر که X و Y نیز دو نفر از آن‌ها هستند، چهار نفر به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. تعداد اعضای

پیشامدی از آن فضا که X در آن‌ها باشد ولی Y نباشد، چند عضو دارد؟

متمم یک پیشامد:

متمم پیشامد A را با A' نشان می‌دهیم. A' وقتی رخ می‌دهد که A رخ ندهد.

مثال: چهار سکه را پرتاب می‌کنیم. پیشامد آن که حداقل یکی از سکه‌ها رو باشد، چند عضو دارد؟

مثال: از بین افراد a, b, c, d, e, f, g ، چهار نفر را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. اگر پیشامد A آن باشد که در

بین افراد منتخب از بین افراد a و b ، حداقل یکی موجود باشد، آن‌گاه A چند عضو دارد؟

پیشامدهای ناسازگار:

دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه اگر یکی رخ داد، دیگری رخ ندهد. به عبارتی: $A \cap B = \emptyset$.

فضای نمونه‌ای گسسته: اگر اعضای فضای نمونه‌ای قابل شمارش باشند، به آن فضای نمونه‌ای، گسسته می‌گوییم.

احتمال در فضای گسسته: احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه‌ای S برابر است با $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$.

مثال: در پرتاب دو تاس، احتمال آن که اعداد ظاهر شده باهم برابر باشند چقدر است؟

پیشامدهای مستقل: دو پیشامد A و B را مستقل می‌گوییم هرگاه وقوع هر یک از آن‌ها تاثیری بر وقوع دیگری

نداشته باشد.

نکته: شرط لازم و کافی برای آن که دو پیشامد A و B مستقل باشند آن است که: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند:

(۱) A' و B' نیز مستقل اند.

(۲) A' و B نیز مستقل اند.

قوانین احتمال:

(۱) اگر S فضای نمونه‌ای باشد، آن گاه $P(S) = 1$

(۲) اگر A یک پیشامد دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشد، آن گاه $0 \leq P(A) \leq 1$

(۳) اگر A و B دو پیشامد دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشند:

الف) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ب) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

ج) $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

د) $P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$

(۴) اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند، آن گاه $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(۵) $P(A') = 1 - P(A)$

(۶) اگر A_1, A_2, \dots, A_n دو به دو مستقل باشند، آن گاه:

$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

مثال: احتمال قبولی شخصی در امتحان شیمی $\frac{2}{3}$ و در درس ریاضی $\frac{1}{4}$ و در هر دو درس $\frac{1}{6}$ می‌باشد. احتمال آن

را حساب کنید که:

الف) فقط در درس ریاضی قبول شود.

ب) در هیچ یک از این دو درس قبول نشود.

مثال: در پرتاب یک تاس، هرگاه پیشامد A رو شدن عدد کمتر از ۳ و پیشامد B رو شدن عدد اول باشد، تعیین کنید:

الف) آیا A و B ناسازگارند؟ چرا؟

ب) آیا A و B مستقل‌اند؟ چرا؟

مثال: اگر A و B مستقل باشند و $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ ، آنگاه $P(B)$ را به دست آورید.

مثال: احتمال این که شخص A در کنکور قبول شود برابر با $\frac{3}{5}$ و احتمال این که شخص B در این کنکور قبول

شود برابر با $\frac{2}{3}$ است.

الف) احتمال این که هر دو در این آزمون قبول شوند چقدر است؟

ب) احتمال این که فقط B در این آزمون قبول شود چقدر است؟

ج) احتمال این که فقط یکی از این دو نفر در آزمون قبول شوند چقدر است؟

د) احتمال این که هیچ یک از آن‌ها در آزمون قبول نشوند چقدر است؟

مثال: یک عدد سه رقمی را انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عدد انتخاب شده دارای رقم ۲ باشد چقدر است؟



احتمال شرطی:

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند وقتی $P(B) \neq 0$ ، احتمال وقوع پیشامد A به شرط این که

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

پیشامد B رخ داده باشد از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن گاه $P(A|B) = P(A)$.

مثال: فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی به صورت $S = \{a, b, c, d\}$ است. اگر $p(\{a, b, c\}) = \frac{1}{4}$ و

$$p(\{a\}) = \frac{1}{4}$$

باشد، مطلوب است محاسبه‌ی $p(\{b, c, d\} | \{a, b, c\})$.

مثال: فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ و

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

الف) مقدار $P(A|B)$ و $P(B|A)$ را حساب کنید.

ب) مقدار $P(A \cup B)$ و $P(A'|B')$ را حساب کنید.

مثال: در پرتاب یک تاس، اگر بدانیم عدد رو شده زوج است، احتمال آن را بیابید که عدد ۲ ظاهر شده باشد.

مثال: در پرتاب یک تاس می‌دانیم عدد رو شده اول است؛ احتمال زوج بودن آن کدام است؟

مثال: ظرفی شامل ۴ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی قرمز می‌باشد، مهره‌های آن را یکی پس از دیگری بیرون می‌کشیم. احتمال آن که اولی سفید و دو تای دیگر قرمز باشند.

مثال: یک کیسه حاوی ۵ مهره‌ی سیاه و ۷ مهره‌ی سفید است. دو مهره به تصادف و متوالیا و بدون جایگذاری بیرون می‌کشیم. با فرض این که بدانیم اولین مهره سیاه است، احتمال آن را بیابید که دومین مهره نیز سیاه باشد.
مثال: در کیسه‌ی A ، ۵ مهره‌ی سفید و ۷ مهره‌ی سیاه و در کیسه‌ی دوم ۳ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سیاه وجود دارد. یکی از کیسه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره‌ای به تصادف از آن بیرون می‌کشیم؛ احتمال آنکه این مهره سیاه باشد چقدر است؟

مثال: ظرف A دارای ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه و ظرف B دارای ۲ مهره‌ی سفید و ۱ مهره‌ی سیاه است. یک مهره به تصادف از ظرف A بیرون آورده و بدون مشاهده‌ی رنگ آن، مهره را در ظرف B قرار می‌دهیم و سپس یک مهره از ظرف B بیرون می‌آوریم. احتمال این که این مهره سفید باشد چقدر است؟

قاعده‌ی بیز:

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(A) \neq 0$ و $P(B) \neq 0$ ، آن گاه

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

مثال: ظرف A شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی قرمز و ظرف B شامل ۱ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی قرمز است.

الف) مهره‌ای به تصادف از ظرف A خارج می‌کنیم، احتمال سفید بودن آن چقدر است؟

ب) ظرفی به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آن که آن ظرف، ظرف A باشد چقدر است؟

ج) ظرفی به تصادف انتخاب و مهره‌ای به تصادف از درون آن بیرون می‌کشیم، احتمال آن که آن مهره سفید باشد چقدر است؟

د) اگر بدانیم آن مهره سفید می‌باشد، احتمال آن را بیابید که ظرف مورد نظر A باشد.

متغیر تصادفی:

یک متغیر تصادفی مثل X ، تابعی از یک فضای نمونه‌ای به اعداد حقیقی است.
مثال: یک سکه‌ی سالم را دو بار پرتاب می‌کنیم، اگر متغیر تصادفی X را تعداد (رو)های ظاهر شده در نظر بگیریم، آن‌گاه X چه مقادیری می‌تواند اختیار کند؟
مثال: یک خانواده دارای سه فرزند است، اگر متغیر تصادفی X را تعداد پسرها در نظر بگیریم، آن‌گاه X چه مقادیری می‌تواند اختیار کند؟

تابع جرم احتمال:

اگر به هر یک از مقادیر یک متغیر تصادفی گسسته‌ی X ، احتمال مربوطه‌اش را متناظر کنیم، آن‌گاه تابع به دست آمده تابع جرم احتمال می‌گوییم.
 به عبارت دیگر، احتمال به صورت زیر بین مقادیر x_1, x_2, \dots, x_n توزیع می‌شود که به این جدول، جدول توزیع احتمال می‌گوییم.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$...	$P(X = x_n)$

نکته: هر کدام از احتمال‌های سطر دوم بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.
نکته: مجموع احتمال‌های سطر دوم همواره برابر با ۱ است.
مثال: جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است:

برد X	۰	۱	۲	۳
$p(X = x)$	a	$\frac{3a}{4}$	a	$\frac{1}{12}$

الف) a چقدر است؟

ب) $p(X \leq 2)$ چقدر است؟

مثال: یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را تعداد (رو)های ظاهر شده در این سه پرتاب تعریف می‌کنیم.

الف) X چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

ب) جدول توزیع احتمال X را رسم کنید.

ج) $P(X > 1)$ را محاسبه کنید.

مثال: نشان دهید تابع $x = -1, 0, 1, 3$ ، $f(x) = \frac{|x-2|}{7}$ ، تابع توزیع احتمال یک متغیر تصادفی X است.

مثال: به ازای چه مقادیر a ، جدول زیر، جدول توزیع احتمال یک متغیر تصادفی X است؟

x_i	-۷	۰	۱	۳
p_i	$\frac{2a-3}{10}$	$\frac{a+1}{10}$	$\frac{a-1}{10}$	$\frac{a-2}{10}$

مثال: توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است، مقدار a را به دست آورید.

$$\begin{cases} P(x=i) = \frac{i}{i^2+1}, & i=1,2,3 \\ P(x=j) = a, & j=4,5,6,7,8,9 \\ P(x=k) = 0, & k=10,11,12,\dots \end{cases}$$

مثال: توزیع احتمال متغیر تصادفی X به شکل زیر است، مقدار k کدام است؟

$$P(X=x) = \begin{cases} k^x, & x=1,2,3,4 \\ 0, & x=5,6,7,\dots \end{cases}$$

مثال: تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت $P(X=i) = \frac{\binom{5}{i}}{a}$, $i=1,2,3,4,5$ مقدار $P(X=4)$ را به دست آورید.

توزیع برنولی:

متغیر تصادفی X را که تنها دو مقدار 0 و 1 را می‌پذیرد، متغیر برنولی و توزیع احتمال آن را توزیع برنولی می‌گوییم.

در توزیع برنولی، احتمال پیروزی را با p و احتمال شکست را با q نمایش می‌دهیم که همواره $q=1-p$.
نکته: توزیع احتمال متغیر تصادفی برنولی به صورت زیر است.

$$P(X=i) = \begin{cases} p^i q^{1-i}, & i=0,1 \\ 0, & i \neq 0,1 \end{cases}$$

مثال: یک سکه‌ی سالم را آن قدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار (رو) بیاید.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

ب) احتمال آن را حساب کنید که سکه در پرتاب ششم (رو) بیاید.

مثال: یک تاس سالم را به طور متوالی پرتاب می‌کنیم؛ احتمال آن را حساب کنید که در پرتاب سوم برای اولین بار عددی مضرب ۳ ظاهر شود.

نمونه سوال امتحانی مبحث احتمال

۱. یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۴ برآمد d, c, b, a می‌باشد به طوری که $P(\{b, c, d\}) = \frac{2}{3}$ و $P(\{b\}) = \frac{1}{4}$.

مطلوب است:

الف) $P(\{a, c, d\} | \{b, c, d\})$

ب) $P(\{a\} | \{a, c, d\})$

۲. سکه‌ی سالمی پرتاب می‌شود. اگر شیر بیاید، به تصادف یکی از اعضای مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ و اگر خط ظاهر شود، عضوی از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ را انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی عدد انتخاب شده زوج است؟

۳. اگر A و B مستقل باشند و $P(A) = 0/3$ و $P(A \cup B) = 0/44$ ، آنگاه $P(B)$ را به دست آورید.

۴. اگر $P(A - B) = \frac{1}{4}$ و $P(A) = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $P(B | A)$ را محاسبه کنید.

۵. در یک دانشکده‌ی ۱۲۰۰ نفری، ۸۰۰ دانشجوی دختر وجود دارد و بقیه پسر هستند. اگر ۷۰ درصد دختران و ۴۰ درصد پسران در درس ریاضی قبول شده باشند، با چه احتمالی یک نفر که به تصادف از دانشکده انتخاب می‌شود، در درس ریاضی قبول نشده‌اند؟

۶. دو ظرف داریم به طوری که اولی شامل ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است و دومی شامل ۲ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه است. به تصادف یکی از ظرف‌ها را انتخاب و از آن مهره‌ای را خارج می‌کنیم. احتمال این که مهره سفید باشد چقدر است؟

۷. پیشامدهای مستقل و متغیر تصادفی را تعریف کنید.

۸. در پرتاب یک تاس، هرگاه پیشامد A رو شدن عدد کمتر از ۳ و پیشامد B رو شدن عدد اول باشد، تعیین کنید:

الف) آیا A و B ناسازگارند؟ چرا؟

ب) آیا A و B مستقل‌اند؟ چرا؟

۹. دو تاس مختلف را پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد آن باشد که حداقل یکی ۵ بیاید و B پیشامد آن باشد که شماره‌های رو شده برابر باشند، آن‌گاه:

الف) آیا A و B ناسازگارند؟

ب) آیا A و B مستقل‌اند؟

ج) اگر A اتفاق افتاده باشد، احتمال رخ دادن B کدام است؟

۱۰. در پرتاب دو تاس، اگر پیشامد A ، آمدن دو عدد اول و پیشامد B آمدن مجموع دو عدد کمتر از ۵ باشد:

الف) $P(A)$ و $P(B)$ را به دست آورید.

ب) آیا A و B مستقل‌اند؟

ج) اگر A رخ داده باشد با چه احتمالی B رخ می‌دهد؟

۱۱. در دو جعبه‌ی یکسان، مهره‌هایی به این شرح قرار دارند که در جعبه‌ی اول ۳ مهره‌ی سفید و ۷ مهره‌ی قرمز و در جعبه‌ی دوم ۱۰ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی قرمز موجود است. مهره‌ای را از جعبه‌ی اول خارج نموده و در جعبه‌ی دوم قرار می‌دهیم. حال مهره‌ای به تصادف از جعبه‌ی دوم انتخاب می‌کنیم، احتمال آن که این مهره قرمز باشد چقدر است؟

۱۲. احتمال قبولی شخصی در امتحان شیمی $\frac{2}{3}$ و در درس ریاضی $\frac{1}{4}$ و در هر دو درس $\frac{1}{6}$ می‌باشد. احتمال آن را حساب کنید که:

الف) فقط در درس ریاضی قبول شود.

ب) در هیچ یک از این دو درس قبول نشود.

۱۳. دو کیسه داریم که در کیسه‌ی اول ۵ مهره‌ی سفید و ۷ مهره‌ی سیاه و در کیسه‌ی دوم ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه وجود دارد. یکی از کیسه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره‌ای از آن بیرون می‌کشیم. اگر مهره‌ی انتخاب شده سفید باشد، احتمال این را که مهره متعلق به کیسه‌ی دوم باشد محاسبه کنید.

۱۴. جعبه‌ای محتوی ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است. یکی یکی دو مهره به تصادف و بدون جایگزاری از جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال این را که مهره‌ی دوم هم‌رنگ مهره‌ی اول باشد محاسبه کنید.

۱۵. ظرف A حاوی ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه و ظرف B حاوی ۲ مهره‌ی سفید و ۱ مهره‌ی سیاه است. یک مهره به تصادف از ظرف A بیرون آورده و بدون مشاهده در ظرف B قرار می‌دهیم و سپس یک مهره از ظرف B بیرون می‌آوریم. احتمال این که این مهره سفید باشد چقدر است؟

۱۶. دو ظرف همانند داریم که اولی شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی قرمز و دومی شامل ۵ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی قرمز است. از ظرف اول ۳ مهره و از ظرف دوم ۲ مهره به تصادف خارج کرده و در ظرف جدیدی قرار می‌دهیم. اگر از ظرف جدید مهره‌ای به تصادف خارج کنیم:

الف) احتمال این که این مهره سفید باشد چقدر است؟ جواب $\frac{71}{140}$

ب) اگر مهره‌ی خارج شده از ظرف جدید سفید باشد، احتمال این که از ظرف دوم باشد چقدر است؟ جواب $\frac{35}{71}$

۱۷. سکه‌ی همگنی را سه بار می‌اندازیم:

A : پیشامد رخ دادن پشت در پرتاب سوم B : پیشامد رخ دادن دقیقاً دو پشت در سه پرتاب باشد.

الف) $P(A)$ و $P(B)$ را محاسبه کنید.

ب) آیا A و B مستقل‌اند؟

ج) اگر در پرتاب سوم پشت ظاهر شود احتمال این که پیشامد B اتفاق افتاده باشد چقدر است؟

۱۸. سه ظرف همانند داریم به طوری که در ظرف اول ۲ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و ۴ مهره‌ی سبز موجود است. در ظرف دوم ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه موجود است و در ظرف سوم تعدادی مهره‌ی سفید موجود است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم.

الف) احتمال این که مهره‌ی خارج شده سفید باشد چقدر است؟

ب) اگر مهره‌ی خارج شده سفید باشد احتمال این که از ظرف اول باشد چقدر است؟

۱۹. نشان دهید تابع ro به ro یک تابع توزیع احتمال است:

$$p(X = x) = \frac{2x + 2}{n^2 + 3n} \quad (x = 1, 2, 3, \dots, n)$$

۲۰. جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی تعداد دختران یک خانواده با ۳ فرزند را رسم کنید.

۲۱. تاس سالمی را پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را صفر تعریف می‌کنیم. اگر عدد ظاهر شده روی تاس، اول باشد؛ در غیر این صورت مقدار X را برابر عدد ظاهر شده تعریف می‌کنیم.

الف) مقادیری را که متغیر تصادفی X می‌تواند اختیار کند تعیین کنید.

ب) جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X را تشکیل دهید.

ج) احتمال پیشامدی را که برای آن $X \leq 1$ می‌باشد به دست آورید.

۲۲. اگر تابع $P(X = x) = \frac{1}{a^x} [2(a-x) + 1]$ ، یک تابع جرم احتمال باشد: $x = 1, 2, 3, 4$

الف) مقدار a را مشخص کنید.

ب) برای $a = 4$ جدول توزیع احتمال را بنویسید.

۲۳. در پرتاب دو تاس اگر متغیر تصادفی X را قدر مطلق تفاضل دو شماره تعریف کنیم:

الف) جدول تابع توزیع احتمال این متغیر تصادفی را رسم کنید.

ب) احتمال پیشامدی را که برای آن $X \leq 2$ می‌باشد به دست آورید.

۲۴. در ظرفی ۱ مهره سفید و ۱ مهره سیاه وجود دارد. اگر از این ظرف ۳ مهره با جای گذاری خارج کنیم و

متغیر تصادفی X را تعداد مهره‌های سفید خارج شده تعریف کنیم:

الف) متغیر تصادفی X چه مقادیری می‌تواند اختیار کند؟

ب) تابع احتمال متغیر تصادفی X را به دست آورید.

بارم	پایانی دوم	بارم	پایانی اول
۲	فصل ۱: گراف و کاربردهای آن	۹	فصل ۱: گراف و کاربردهای آن
۳	فصل ۲: نظریه‌ی اعداد	۱۱	فصل ۲: نظریه‌ی اعداد
۷	فصل ۳: مباحثی دیگر در ترکیبیات		
۸	فصل ۴: احتمال		
۲۰	جمع	۲۰	جمع