بسمه تعالی

نکات مهم ریاضیات گسسته دبیر: «محمد شعرباف»۰۹۱۴۴۰۰۳۷۸۷

نکته ی۱: **گراف ساده** : گراف ساده G زوج مرتبی ما نند (V,E) می با شد که V مجموعه متنا هی و ناتهی است و E زیر مجموعه ای از تمام زیر مجموعه ای دو عضوی مجموعه V می با شد. اعضای مجموعه V را راس های گراف G می گویند ، که مجموعه ای از نقاط می با شد و اعضای مجموعه E را یالهای گراف G می گویندکه مجموعه از پاره خط ها بوده و ارتباط بین اعضای V را مشخص می کنند.

تست ۱: در مورد گراف ساده $G(V,E)$ کدام گزینه نادرست است؟

۱)مجموعه E متناهی است. ۲) مجموعه Vمتنا هی است. ۳) مجموعه Eناتهی است. ۴) مجموعه V ناتهی است

نکته ی ۲: دو یال را موازی گوئیم، هرگاه بین دو راس یکسان رسم شده با شد.

تست۲: در گراف با معلومات $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ که درآن $E=\{ab,be,bc,cd,dc,ef\}$است، چند یال موازی وجود دارد؟

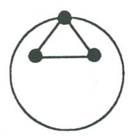
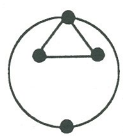
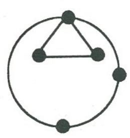
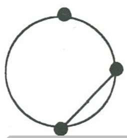
۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

نکته ی ۳: **طوقه یاحلقه (لوپ)**: یالی است که یک راس را به خودش وصل می کند.

نکته ی۴: گراف ساده

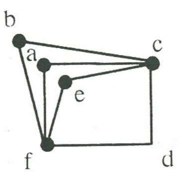
الف) طوقه ندارد. ب) یال موازی ندارد. ج) بین هر دو راسش حداکثر یک یال وجود دارد.

تست۳: کدام گراف زیر ساده است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

نکته ی۵: دو راس a و b را در گراف G مجاور گوئیم هرگاه دو سر یک یال با شد، یعنی در مجموعه E یال ab وجود داشته باشد.

تست۴: در گراف مقا بل چند راس با راس a مجاور هستند؟



۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۰

نکته ی۶: **گراف جهت دار**: گرافی است که در آن هر یال را به صورت پاره خطی جهت دار نشان میدهندیعنی گراف جهت دار G زوج مرتبی چون (V,E) است که در آن V مجموعه‌های متناهی و ناتهی است و E زیر مجموعه ای از مجموعه تمام زوج های مرتب متشکل از اعضای V است و دارای دو ویژگی مهم است:

۱) بین هر دو راس آن حداکثر ۲یال وجود دارد.

۲) هر راس آن حداکثر می تواند یک طوقه داشته با شد.

نکته ی ۷: تعداد گراف های جهتدار p راسی برابر است به : 2^{p^2}

تست۵: چند گراف جهت دار با مجموعه رئوس $V=\{a,b,c,d\}$ می توان رسم کرد؟

۱) 2^6 ۲) 2^{16} ۳) 2^{12} ۴) 2^{10}

نکته ی ۸: تعداد گراف های جهتدار p راسی بدون حلقه برابر ا ست با: 2^{p^2-p}

تست۶: چند گراف جهت دار با مجموعه رئوس $V=\{a,b,c,d,e\}$ می توان رسم کرد که فاقد طوقه با شند؟

۱) 2^5 ۲) 2^{10} ۳) 2^{20} ۴) 2^{25}

نکته ی ۹: تعداد گراف های جهتدار p راسی که n حلقه داشته با شند برابر است با: $2^{p^2-p}\binom{p}{n}$

تست۷ : چند گراف جهت دار با مجموعه رئوس $V=\{a,b,c,d,e\}$ می توان رسم کرد که دارای ۲ طوقه با شند؟

۱) $2^{21}\times 5$ ۲) 2^{25} ۳) 2^{23} ۴) $2^{23}\times 5$

نکته ی۱۰: **گراف چندگانه**: گرافی که حلقه یا یال موازی دا شته با شد گراف چند گا نه نامیده می شود.(بین هر دو راس آن هر تعداد یالی می تواند وجود داشته باشد.)

تست۸: گراف متنا ظر با کدام مولکول شیمیایی زیرگراف چندگا نه است؟

۱) آب ۲) اُزن ۳) پروپان ۴) هیدرو کلریک اسید

نکته ی ۱۱: درجه ی راس V از گراف G برابر با تعداد یالهایی از G است که از راس V مـی گذرنـد.ایـن عـدد را بـا $\deg V$ نمایش می دهیم. اگر $\deg V$ یک عدد فرد با شد V را یک **راس فرد** و اگر یک عدد زوج با شد V را یک **راس زوج** از گراف G می نامیم .

نکته ی۱۲: بزرگترین عدد در بین درجه راس های گراف G را **ماکزیمم درجه** G می نـامیم و آن را بـا $\Delta(G)$ نمایش می د هیم و کوچکترین عدد در بین درجه راس های گراف G را **می نیمم درجه** G می نامیم وآن را بـا $\delta(G)$ نمایش می دهیم.

نکته ی ۱۳: در گراف $G(V,E)$:

۱) $V=\{V_1,V_2,\cdots,V_p\}$: تعداد اعضای V را تعداد رئوس یا **مرتبه گراف** گفته و با p نشان می دهیم.

۲) $E=\{E_1,E_2,\cdots,E_q\}$: تعداد اعضای E را تعداد یال یا **اندازه گراف** گفته و با q نشان می د هیم .

نکته ی ۱۴: انواع راس:

۱) **راس ایزوله** (منزوی، تنها،منفرد) : راسی که درجه آن صفر باشد.

۲) **راس آویزان:** راسی که درجه آن یک است.

۳) **راس فول:** راسی که بیشترین درجه ممکن $(p-1)$ را دارد.

۴) **راس فرد:** راسی که درجه آن فرد با شد

۵) **راس زوج:** راسی که درجه آن زوج با شد.

نکته ی ۱۵: در محا سبه درجه رئوس یک گراف طوقه را ۲ درجه حساب می کنیم زیرا یک بار از راس خارج شـده و یک بار به آن وارد می شود.

نکته ی ۱۶: محدویت اندازه و مرتبه : $0\le q\le \frac{p(p-1)}{2}$

تست: گراف ساده ای دارای ۶ راس است این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۵

نکته ی۱۷: تعدادتمام گراف های ساده که می توان با p راس (با فرض نام گذاری رئوس) ساخت برابر است با: $2^{\binom{p}{2}}$

تست: با مجموعه رئوس $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_5\}$ چند گراف ساده با فرض نام گذاری رئوس می توان ساخت؟

۱) ۵۱۲ ۲) ۱۰۲۴ ۳) ۲۵۶ ۴) ۱۲۸

نکته ی ۱۸: تعداد گراف های ساده ۳راسی بدون نام گذاری رئوس ۴ تا ست.

تست: چند گراف سه راسی بدون نام گذاری رئوس می توان رسم کرد؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

نکته ی ۱۹: تعداد گراف های ساده ۴ راسی بدون نام گذاری رئوس ۱۱ تا ست.

تست : چند گراف چهار راسی بدون نام گذاری رئوس می توان رسم کرد؟

۱) ۶۴ ۲) ۳۲ ۳) ۱۱ ۴) ۶

نکته ی ۲۰: تعداد گراف های ساده مرتبه ی p و اندازه ی q یال (با فرض نام گذاری) برابر است با:

$$\binom{|S|}{|E|} = \binom{\binom{p}{2}}{q}$$

که در آن S مجموعه شامل کلیه زیر مجموعه های دو عضوی V می با شد.

تست: چند گراف ساده با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$ وجود دارد که اندازه آن ها ۳ با شد؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۴۵۵ ۴) ۹۱۰

نکته ی ۲۱: تعداد گراف های ساده p راسی در مجموعه $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ که q یالی بوده و شامل k_1 یال بخصوص با شد برابر است با:

$$\binom{\binom{p}{2} - k_1}{q - k_1}$$

تست) تعداد گراف های ساده ۴ راسی در مجموعه $V = \{a, b, c, d\}$ که ۲ یال داشته و یک یال آن ها ab با شد ، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

نکته ی ۲۲: تعداد گراف های ساده p راسی در مجموعه $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ که q یالی بوده و شامل k_1 یال بخصوص با شد و k_2 یال بخصوص را نداشته با شد برابر است با:

$$\binom{\binom{p}{2} - k_1 - k_2}{q - k_1}$$

تست: با ۵ راس a, b, c, d, e چند گراف ساده می توان رسم کرد که درآن $q = 5$ بوده وگراف شامل یال های ab, ac با شد، اما شامل ed نبا شد؟

۱) ۳۵ ۲) ۲۷ ۳) ۳۸ ۴) ۳۰

نکته ی ۲۳: تعداد گراف های ساده p راسی در مجموعه $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$ که شامل k_1 یال بخصوص با شد و m راس منفرد با شند برابر است با: $2^{\binom{p-m}{2}-k_1}$

تست: در یک گراف ساده $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_6\}$است، چند گراف $G=(V,E)$می توان رسم کرد که v_1و v_2 با هم مجاور با شند و به v_3 یالی وصل نشده با شد؟

۱) 2^5 ۲) 2^9 ۳) 2^{10} ۴) 2^{15}

نکته ی ۲۴: تعداد گراف های ساده با p راس با $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$که شامل k_1 یال بوده ولـی k_2 بخصـوص را نداشته با شد برابر است با: $2^{\binom{p}{2}-k_1-k_2}$

تست: تعداد گراف های ساده با ۴ راس a,b,c,d که شامل یال ab بوده ولی یال cd را نداشته باشد، چند تا ست؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

نکته ی ۲۵: تعداد گراف ساده مرتبه p شامل:

الف) دویال برابر است با: $\binom{\binom{p}{2}}{2}$

ب) دو یال با راس مشترک برابر است با: $3\times\binom{p}{3}$

ج) دو یال بدون راس مشترک برابر است با: $3\times\binom{p}{4}$

تست: چند گراف ساده با ۲ یال و ۶ راس $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ می توان رسم کرد به طوری که هر دو یال در یک راس مشترک با شند؟

۱) ۱۲ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۲

نکته ی ۲۶: الف) تعداد گراف های ساده مرتبه ی p با رئوس $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$ که در آن راس v_1 از درجه ی m با شد برابر است با: $\binom{p-1}{m}\times 2^{\binom{p-1}{2}}$

تست: چه تعداد گراف ساده مرتبه ۵ با رئوس a,b,c,d,e وجود دارد که راس a در آن از درجه ۲ با شد؟

۱) 3×2^6 ۲) 3×2^7 ۳) 3×2^5 ۴) 3×2^8

ب) تعداد گراف های ساده از مرتبه p با اندازه q با رئوس $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$ که درجه راس v_1 در آن m با شد برابر است با: $\binom{p-1}{m}\times\binom{\binom{p-1}{2}}{q-m}$

تست: تعداد گراف های ساده مرتبه ۶ با اندازه ۴ با رئوس a,b,c,d,e,f که درجه راس a در آن ۲ با شد کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۴۵۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۳۱۵

نکته ی ۲۷: **گراف بازه ای:** گرافی است که رئوس آن متنا ظر با بازه های باز از اعداد حقیقی است و رئوسی به هم وصل می شوند که بازه های متنا ظر با آن ها اشتراک داشته با شند.

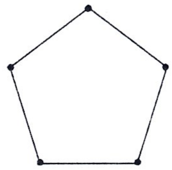
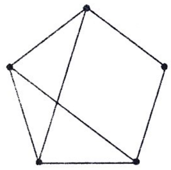
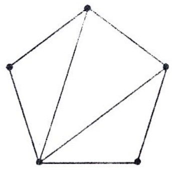
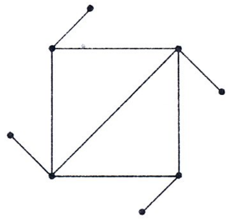
تست: گراف نظیر بازه های $\begin{cases} A_i=(i,i+6) \\ i\in\{1,2,\cdots,6\}\end{cases}$ چند یال دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۵

نکته ی ۲۸: **حفره:** هر چهار ضلعی بدون قطر را یک حفره گویند. هر گرافی که دارای حفره با شد بازه ای ***نیست.***

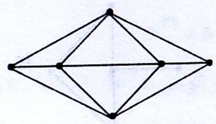
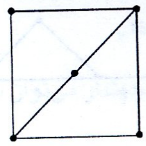
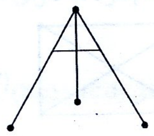
خطر: رابطه فوق برگشت پذیر ***نیست*** یعنی ممکن است قطر هایش رسم شده با شد ولی بازه ای نبا شد.

تست: کدام یک از گراف های زیر متنا ظر با بازه های باز ازاعداد حقیقی است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

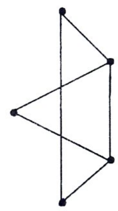
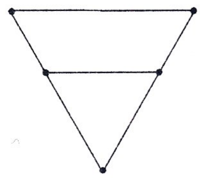
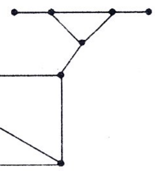
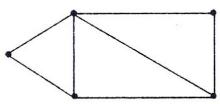
نکته ی ۲۹: مثلث با یک شاخه و مثلث با دو شاخه بازه ای است ولی مثلث با سه شاخه و مختصات R^3 با سه شاخه بازه ای نیست.

تست: کدام گراف بازه ای نمی باشد؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) هر سه مورد

نکته ی ۳۰: اگر قسمتی از گراف بازه ای نبا شد کل آن گراف بازه ای نیست.

تست: کدام گراف بازه ای است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

نکته ی ۳۱: گراف چند بخشی:در بعضی از گرافها بین قسمت های از گراف هیچ ارتبا طی از طریق یالها برقرار نیست. در این حالت می گوئیم گراف شامل بخش ها ی جدا از هم است.

تست: در گراف ساده G از مرتبه ۸ سه بخش جدا از هم وجود دارد . دست کم این گراف چند یال دارد؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

نکته ی ۳۲: اگر گراف ساده G دارای k بخش جدا از هم با شد در این صورت : $p-k \le q \le \binom{p-k+1}{2}$

تست: در گراف ساده G از مرتبه ۸ سه بخش جدا از هم وجود دارد . این گراف حداکثرچند یال دارد؟

۱) ۱۵   ۲) ۲۱   ۳) ۶   ۴) ۲۸

نکته ی ۳۳:مجموع درجات رئوس یک کراف ساده برابر با $2q$ است.

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$$

تست: در یک گراف ساده با اندازه ۲۵ و از مرتبه ۱۴ فقط رئوس درجه ۳ و ۵ داریم . چند راس درجه ۳ وجود دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۸

نکته ی ۳۴: تعداد رئوس فرد هر گراف زوج است. و تعداد رئوس زوج بستگی به مرتبه گراف دارد یعنی:

تعداد رئوس زوج فرد ا ست $\rightarrow$ فرد $= p$

تعداد رئوس زوج ، زوج ا ست $\rightarrow$ زوج $= p$

تست: اگر m تعداد رئوس زوج در یک گراف ساده با شدو تعداد کل رئوس این گراف فرد با شد، باقیمانده تقسیم عدد m^2 بر عدد ۸ کدام ا ست؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۷ ۴) ۳

نکته ی ۳۵:

$$0 \le \delta \le \deg v_i \le \Delta \le p-1$$

تست: در یک گراف ساده ماکزیمم درجه رئوس ۶ ا ست مرتبه گراف کدام گزینه نمی توا ند با شد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

نکته ۳۶ : میانگین درجات رئوس گراف:

$$\overline{V} = \frac{2q}{p}$$

تست: در یک گراف از مرتبه ۱۰ میانگین درجات رئوس برابر ۳ بوده و دارای ۳ راس منفرد است. اگر بقیه رئــوس آن از درجه ۴و۵ با شند، این گراف چند راس زوج دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

نکته ی ۳۷: **محدویت درجه** : چون میانگین درجه درجه رئوس یک گراف بین کمترین درجه و بیشترین درجه می با شد خواهیم داشت: $\delta \le \frac{2q}{p} \le \Delta$

تست: گراف ساده G با مرتبه ۱۱ و اندازه ۵۰ بیش ترین مقداری که δ می تواند داشته با شد کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۷

نکته ی ۳۸: اگر در یک سوال δ و Δ با هم داده شده با شند دیگر نمی توان از رابطه $\delta \le \frac{2q}{p} \le \Delta$ برای به دست آوردن بیشترین یا کمترین مقدار q استفاده کرد بلکه باید درجه رئوس گراف را در بالاترین و پائین ترین حالت نوشت.

تست: در گراف ساده G از مرتبه ۱۰، $\Delta(G) = 7$ و $\delta(G) = 2$ می با شد، حداکثر اندازه گراف کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۴ ۳) ۳۲ ۴) ۱۲

نکته ی ۳۹: در هر گراف ساده مرتبه p اگر بزرگترین درجه رئوس Δ با شد آنگاه حداکثر تعداد یال های موجود در گراف برابر است با: $q_{\max} = \left[\frac{p\Delta}{2}\right]$. ([ ] نماد جز صحیح است.)

تست: دریک گراف ساده از مرتبه ۳۵ بزرگترین درجه رئوس آن ۷ است حداکثر تعداد یال ها برابر است با:

۱) ۲۴۵ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۵۲ ۴) ۱۲۲

نکته ی ۴۰: **دنباله گرافی**:دنباله ای است که درآن درجات رئوس گراف ساده به ترتیب نزولی مرتب شده اند.

تست: دنباله درجات رئوس گراف G به صورت $6, x, y, 2,2,2,2$ می با شد،اگر این گراف دارای ۹ یال با شد آن گاه مقدار $2x + y$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۶

نکته ی ۴۱: ویژگی های دنباله گرافی: (ابتدا صفر ها را نا دیده می گیریم)

۱) تعداد اعداد دنباله برابر مرتبه گراف (p) است.

۲) جمع اعداد دنباله برابر مجموع درجات یعنی $2q$ است.

۳) تعداد اعداد فرد دنباله زوج است.(لِم دست دادن)

۴) اگر تعداد رئوس فول برابر k با شد: $\delta \geq k$.

۵) درجه رئوس از تعداد رئوس کوچکتر است.

۶) حداقل یکی از اعداد در دنباله تکرار شده با شد.

تست: دنباله درجه راس های گراف ساده G به کدام صورت می تواند با شد؟

۱) $3,2,1,0$ ۲) $4,4,4,4,4$ ۳) $3,2,1,1$ ۴) $3,3,3,3,3$

نکته ی ۴۲: هر دنباله به صورت : $S: k, k, k-1, k-1, \cdots, 1, 1$ یک دنباله گرافی است.

تست: دنباله درجه راس های گراف ساده G به کدام صورت می تواند با شد؟

۱) $6,6,6,6,5,3$ ۲) $\underbrace{9,9,\cdots,9}_{8ta}$ ۳) $5,5,4,4,3,3,2,2,1,1$ ۴) $5,4,3,2,1,0,0$

نکته ی ۴۳: الگوریتم هاول – حکیمی: شرط لازم و کافی بـرای آنکـه دنبالـه نزولـی $\Delta, d_1, d_2, \cdots, d_{\Delta+1}$ گرافی با شدآنست که دنباله $d_1-1, d_2-1, \cdots$ گرافی با شد .

به زبان ساده یعنی اینکه عدد دنباله (Δ) را حذف کرده واز Δ جمله بعدی یک واحد کم کنیم واین کار را ادامه می دهیم تا به عبارت منطقی برسیم.

تذکر مهم: برای کشیدن شکل گراف ابتدا الگوریتم هاول- حکیمی را عمل کرده سپس دنباله منطقی بـه دسـت آمده را رسم نموده و با بازگشت مرحله به مرحله ، راس هایی را که در هر مرحله حذف نمودهـایم بـه شـکل قبلـی اضافه می کنیم تا به گراف اولیه برسیم.

تست: کدام یک از دنباله های زیر مربوط به گراف ساده می با شد؟

۱) $5,4,3,2,1,0$ ۲) $5,4,3,2,1,1$ ۳) $6,4,4,4,2,2,2$ ۴) $6,6,5,4,3,3,1$

نکته ی ۴۴: گراف منتظم: گرافی است که درجه تمام رئوس آن با هم برابر با شد. پس گراف r - منتظم گرافی است که درجه ی تمام رئوس آن برابر r باشد و دارای ویژگیها ی زیر است:

۱) $q=\frac{1}{2}pr \quad r<p \quad (r,p,q)\in W$

۲) طبق لم دست دادن حداقل یکی از دو عدد p و r زوج است و اگر یکی از آنها فرد باشد q بر آن بخش پذیر است.

۳) تعداد گراف های فرد – منتظم از مرتبه ی فرد صفر است، زیرا تعداد رئوس فرد زوج می با شد.

۴) اگر درجه راسهای یک گراف تشکیل تصاعد عددی یا هندسی دهند گراف منتظم است.

۵) اگر در یک گراف $\delta=\Delta$ با شند ، آنگاه گراف منتظم است.

تست: گرافی با درجه رئوس $\{4,4,4,4,4\}$ دارای چند یال است؟ (آزاد -۸۲)

۱) ۸ ۲) ۲۰ ۳) ۱۶ ۴) ۱۰

تست: گرافی دارای ۸ راس و درج هر راس ۱ می با شد. تعداد یال ها کدام است؟(آزاد – ۸۱)

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۲۸

تست: دنباله درجه راس های گراف ساده G که تشکیل یک تصاعد هندسی داده اند شامل ۵ جمله است $\Delta(G)$ کدام می تواند با شد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

نکته ی ۴۵)(مهم) تعداد گراف های ۲- منتظم یا $(p-3)$- منتظم از مرتبه p برابر است با تعداد حالت های که می توان عدد p را به صورت مجموع چند عدد بزرگتر از ۲ نوشت. هم چنین تمام p ضلعی ها ، ۲- منتظم است.

تست: چند گراف ۲ – منتظم مرتبه ۹ وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

تست: چند گراف ۷ – منتظم از مرتبه ۱۰ وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

نکته ی ۴۶ : **گراف کامل** : گرافی است $(p-1)$- منتظم از مرتبه ی p که آنرا با نماد k_p نمایش می دهند و دارای ویژگیهای زیر است:

۱) $q=\binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2}$

۲) $\delta=\Delta=p-1$

۳) $1+8q$ باید مربع کامل با شد.

۴) در یک گراف کامل p راس می توان 2^p-1 گراف کامل یافت.

تست: اگر تعداد یالها ی گراف k_p از k_{p+4} به اندازه ۲۶ واحد کمتر با شد p کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

نکته ی ۴۷: برای حل تست های درجه ماکزیمم ، گراف داده شده را با گراف کامل هم مرتبه آن مقایسه می کنیم.

به زبان ساده:هر گاه در یک سوال با راس کم ، یال زیاد دیدید به یاد گراف کامل هم مرتبه با آن بیافتید.

تست: مرتبه گراف G ، ۸ و اندازه ۲۰ است درجه چند راس آن ماکزیمم است؟(سراسری – ۷۶)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

نکته ی ۴۸: برای تعیین حداکثر تعداد رئوس از درجه $p-1$ در گراف مرتبه p با اندازه q از رابطه ی $\binom{p}{2}-q\le\binom{n}{2}$ مقدار $n_{\min}$ را بدست می آوریم سپس در رابطه $x=p-n_{\min}$ قرار داده و مقدار x (حداکثر تعداد رئوس از درجه $p-1$) را محا سبه می کنیم. به بیا ن دیگر :

اختلاف$=q_{k_p}-q_G \Rightarrow x=p-($اختلاف$+1)$

تذکر:اگر $q=\frac{p(p-1)}{2}-1$ در این صورت ۲ راس آن درجه $p-2$ بوده و $p-2$ راس آن از درجه $p-1$ هستند.

تذکر:اگر $q=\frac{p(p-1)}{2}-2$ در این صورت اگر ۲ یال مجاور از k_p حذف شوندآنگاه $p-3$ راس از درجه $p-1$ هستندو اگر ۲ یال غیر مجاور از گراف k_p حذف شوندآنگاه $p-4$ راس آن از درجه $p-1$ هستند.

تست: گراف G از مرتبه ۷ و اندازه ۲۰است این گراف چند راس از درجه ۵ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

نکته ی۴۹: الف) اگر از گراف کامل k_p ، m یال $(1 \le m \le p-2)$ حذف کنیم، حداکثر مقدار $\Delta - \delta$ در گراف به دست آمده برابر m ا ست .

ب) در یک گراف ساده:

۱) اگر $q \le \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ با شد ، حداکثر $\Delta - \delta$ برابر $p-1$ است.

۲) اگر $q > \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ با شد، حداکثر $\Delta - \delta$ برابر $\binom{p}{2}\binom{p-1}{2}$ است.

تست: گرافی دارای ۸ راس و ۲۳ یال می با شد ، بیشترین مقدار $\Delta(G) - \delta(G)$ کدام است؟(آزاد – ۸۱)

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۶

تست: چند گراف ساده با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$ و اندازه ی $q = 3$ می توان رسم کرد، به طوری که $\Delta - \delta = 3$ با شد؟

۱) ۱ ۲) ۱۵ ۳) ۶۰ ۴) ۴۵

نکته ی ۵۰: گراف تهی: گراف $G(V,E)$ را تهی گویند وآن را با $\bar{k}$ نشان می دهند هر گاه : $E = \varnothing$.

تست: گراف $G(V,E)$ یک گراف تهی است اگر:

۱) $V = \varnothing = E$ ۲) $V \ne \varnothing = E$ ۳) $V = \varnothing \ne E$ ۴) هیچکدام

نکته ی ۵۱: گراف مکمل:مکمل گراف G را با نماد $\overline{G}$ نشان می دهند .و گرافی است که از وصل کردن رئوسی که در گراف G به هم وصل *<u>نشده اند</u>* حاصل می شودو داریم : $G \cup \overline{G} = k_p$

تست: اگر $\overline{G} = (V, \overline{E})$ مکمل گراف k_p با شدآن گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\overline{E} = 0$ ۲) $\overline{E} = \varnothing$ ۳) $\overline{E} = \{\varnothing\}$ ۴) $\overline{E} = V - E$

نکته ی۵۲: تعداد یال های گراف $\overline{G}$ برابر است با : $\binom{p}{2} - q(G)$ یعنی: $q + q' = \frac{p(p-1)}{2}$

تست: اندازه گراف ساده G ، ۵۰ و اندازه مکمل آن ۵۵ می با شد p کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

نکته ی ۵۳: $$\deg_G^{V_i} + \deg_{\overline{G}}^{V_i} = p - 1$$

تست: اگر درجه رئوس گراف G به صورت $S: 4,4,3,3,2$ با شد گراف $\overline{G}$ چند راس ایزوله دارد؟

۱) ۰ ‏ ‏ ‏ ۲) ۱ ‏ ‏ ‏ ۳) ۲ ‏ ‏ ‏ ۴) ۳

نکته ی ۵۴: اگر دو راس در گراف G مجاور با شند در $\overline{G}$ مجاور نیستند.

تست: گراف مکمل شکل مقا بل ازچه اندازه ای است؟

۱) ۱۲ ‏ ‏ ‏ ۲)۱۳ ‏ ‏ ‏ ۳) ۱۴ ‏ ‏ ‏ ۴) ۱۵

نکته ی ۵۵: اگر گراف G ، r - منتظم از مرتبه ی p با شد مکمل آن $(p-r-1)$ - منتظم از مرتبه p است.

تست: مکمل گرافی ساده و ۴ – منتظم از مرتبه ۱۰ چگونه است؟

۱) ۶ – منتظم ‏ ‏ ‏ ۲) ۵ – منتظم ‏ ‏ ‏ ۳) ۴ – منتظم ‏ ‏ ‏ ۴) لزوماً منتظم نیست.

نکته ی۵۶ : اگر دنباله درجات یک گراف از مرتبه p به صورت $d_1, \cdots, d_p$ با شد، دنباله درجات گراف مکمل آن به صورت $p-1-d_p, \cdots, p-1-d_1$ خواهد بود.

تست: اگر $d_1, \cdots, d_p$ دنباله ناصعودی درجات راس های گراف G با شد، دنباله ناصعودی درجات راس های مکمل G کدام است؟

۱) $p-d_1, p-d_2, \cdots, p-d_p$ ‏ ‏ ‏ ۲) $p-d_p, \cdots, p-d_2, p-d_1$

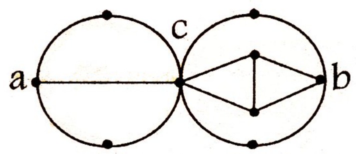
۳) $p-d_1-1, p-d_2-1, \cdots, p-d_p-1$ ‏ ‏ ‏ ۴) $p-d_p-1, \cdots, p-d_2-1, p-d_1-1$

نکته ی ۵۷: مسیر: نحوه اتصال بین دو راس را مسیر و تعداد یالهای این اتصال را طول مسیر مـی گوینـدو دنبالـه متشکل از تنها یک راس یک مسیر به طول صفر می با شد. بنا براین مسیر به طول m شـامل $m+1$ راس مختلـف است.

تست: درگراف با معلومات $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و $E = \{ab, af, fb, bc, cd, de, ef, be\}$ کدام مسیر ی از a به d نمی با شد؟

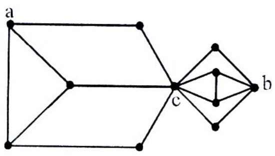
۱) $abed$ ۲) $abfed$ ۳) $acbed$ ۴) $afed$

تست: بین دو راس a و b در گراف مقا بل چند مسیر وجود دارد؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

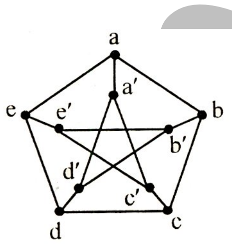
تست: در گراف شکل مقا بل چند مسیر بین دو راس a و b وجود دارد؟



۱) ۱۱ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

نکته ی ۵۸: **تعریف فاصله بین دو راس :** فاصله بین دو راس u و v در گراف ساده که با نماد $d(u,v)$ نشان داده می شود برابر است با طول کوتا هترین مسیر بین دو راس u و v.

تست: فرض کنید دو راس u و v از گراف پترسن در شکل مقا بل انتخاب می شوند. بیش ترین مقدار ممکن بـرای $d(u,v)$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

نکته ی ۵۹: **نکات فاصله بین دو راس :**

۱) $u,v \in V : u = v \Leftrightarrow d(u,v) = 0$

۲) $d(u,v) = d(v,u)$

۳) $u,v,w \in V : d(u,v) \le d(u,w) + d(w,v)$

نکته ی ۶۰: وجود مسیر بین دو راس رابطه ای هم ارزی ا ست پس رئوسی که بین آنهـا مسـیر وجـود دارد در یـک کلاس هم ارزی قرار می گیرند.

تست: گراف ساده ی $G(V,E)$ که $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_7\}$ و $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_4\}$ مفروض است رابطه R کـه به صورت مسیری بین v_i و v_j موجود با شد $\Leftrightarrow$ $v_i R v_j$ تعریف می شود. مجموعه راس های G را به چند کـلاس هم ارزی افراز می کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

نکته ی ۶۱: تعداد کل مسیر ها در گراف کامل از مرتبه p ، $(p \geq 3)$ برابر است با : $\binom{p}{2} \times [(p-2)!e]$ که در $e \approx 2/71$ است.

تست: در گراف کامل k_5 چند مسیر بین رئوس متمایز گراف وجود دارد؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۵۵ ۳) ۱۶۰ ۴) ۱۶۵

نکته ی ۶۲ : الف)تعداد مسیر در گراف k_p بین دو راس u و v برابر است با : $[(p-2)!e]$

تست: در گراف کامل k_5 مسیر بین دو راس u و v وجود دارد؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۱۵۰ ۴) ۱۶۰

ب) تعداد مسیر ها در گراف کامل k_p که به طول m بوده و شامل یال خاصی از آن باشند برابر است با : $\binom{p-2}{m-1} \times m!$

تست: در گراف کامل k_8 چند مسیر به طول ۴ وجود دارد که یال خاصی از گراف ، عضو آن ها با شد؟

۱) ۹۶۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۱۰۸۰

نکته ی ۶۳: تعداد مسیر ها به طول k بین دو راس u و v از گراف کامل k_p بدین ترتیب بدست می آید که به تعداد $k+1$ راس خط می کشیم در ابتدا راس u را قرار می دهیم و در انتها راس v را .از p دو واحد کم کرده بطور متوالی روی خطها قرار داده و آن ها را بنا به اصل شمارش در ضرب می کنیم.

تست: در گراف کامل k_7 چند مسیر به طول ۴بین دو راس ثا بت u و v وجود دارد ؟

۱) ۸۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۶۰ ۴) ۴۰

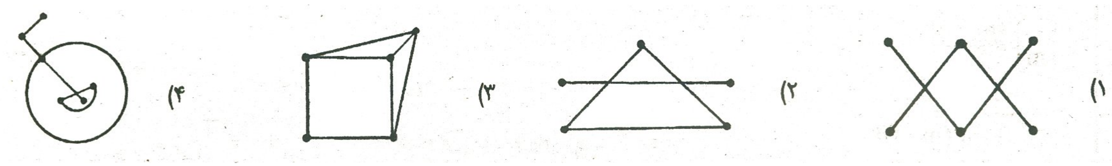
تست: در گراف کامل مرتبه ۷، شامل v_1 تا v_7 چند مسیر از v_1 تا v_7 به طول ۴ شامل راس v_5 وجود دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۴ ۳) ۷۲ ۴) ۶۳

نکته ی ۶۴: تعداد مسیر به طول m در k_p : $\binom{p}{2}\frac{(p-2)!}{(p-m-1)!}$
نکته ی ۶۵: دور: به مسیری که رئوس ابتدا و انتها ی آن یکسان با شد دور می گویند.
نکته ی ۶۶: الف) اگر در یک گراف همبند $p=q$ آنگاه گراف فقط ۱ دور دارد. **ب)گراف پترسن دارای دور های به طول ۵و۶و۸و۹دارد.**
گراف مشاغل:گرافی است که تعدادی متقاضی وتعدادی شغل وجود دارد. و هر کدام از متقاضی ها خواهان یک یا چند شغل می با شند. **گرافی می تواند بیان کننده یک گراف شغل و متقاضی با شد که بتوان به بعضی از راسها ی آن متقاضی نسبت داد و به بعضی از راس ها ی آن شغل نسبت داد(راس مربوط به متقاضی نباید به راس مربوط به متقاضی وصل با شدو همچنین راس مربوط به شغل نباید به راس مربوط به شغل وصل شود.)** **نکته ی ۶۷: درگراف مشاغل دور به طول فرد وجود ندارد.** **تست: کدام یک از گراف های زیر نمی تواند گراف شغل – متقاضی با شد؟**
نکته ی ۶۸: در گراف کامل k_p: **الف) تعداد دور به m :** $\binom{p}{m}\frac{(m-1)!}{2}$ **تست: در یک گراف کامل از مرتبه ی ۵ ، چند دور با طول ۴ وجود دارد؟** **۱) ۱ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰** **ب) تعداد دور های گراف:** $\sum_{m=3}^{p}\binom{p}{m}\frac{(m-1)!}{2}$ **تست: در گراف k_5 تعداد دور ها ی متفاوت گراف G کدام است؟** **۱) ۱۲ ۲) ۲۵ ۳) ۳۷ ۴) ۳۶**

نکته ی ۶۹: گراف همبند: گرافی است که بین هر دو راس آن حداقل ۱ مسیر وجود داشته با شد و در غیر این صورت گراف نا همبند ا ست.

تست: کدام گراف همبند است؟



نکته ۷۰: هر گراف ساده از مرتبه ی p و اندازه q اگر $q \leq p-2$ ، نا همبند است.

تست: گرافی که دنباله ی درجه ی راس های آن 3,2,2,1,1,1,1,1 می با شد، چگونه است؟(سراسری -۸۲)

۱) قطعاً دارای دور ۲) درخت ۳) همبند ۴) نا همبند

نکته ی ۷۱: الف) هر گراف از مرتبه p و اندازه ی $\frac{(p-1)(p-2)}{2}+1$ یا بیش تر ، الزاما همبند است.

تست: بیش ترین اندازه ی یک گراف نا همبند از مرتبه ی ۱۴ چقدر است؟

۱) ۷۵ ۲) ۷۸ ۳) ۸۲ ۴) ۹۱

ب)در گراف های r- منتظم از مرتبه p، هر گاه $r \geq \frac{p-1}{2}$ با شد، گراف همواره همبند است.

ج) اگر در گراف ساده ی G از مرتبه ی p داشته با شیم $\delta \geq \frac{p-1}{2}$، گراف همبند است.

د) در یک گراف ساده p راسی همبند، اگر $\delta = m$ با شد، آن گاه حداکثر اندازه ی گراف از فرمول زیر به دست می آید. $q_{\max} = (p-1)(p-2)+2m$.

هـ) در یک گراف ساده p راسی ناهمبند، اگر $\delta = m$ با شد، آن گاه حداکثر اندازه ی گراف از فرمول زیر به دست می آید. $q_{\max} = q_{k_m} + q_{k_{p-m}}$

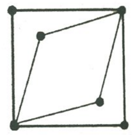
تست: چه تعداد از گراف های زیر همواره همبند است؟

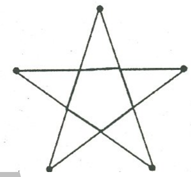
الف) ۲ – منتظم مرتبه ۵ ب) ۳ – منتظم مرتبه ۸ ج) ۱ – منتظم مرتبه ۴ د) ۲ – منتظم مرتبه ۷

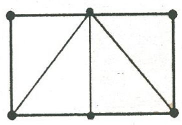
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

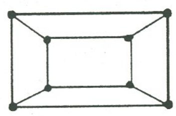
نکته ی ۷۲: گراف همیلتنی: اگر در گراف G از مرتبه p، $(p \geq 3)$ دوری به طول p داشته باشد، آنگاه G را گراف همیلتنی می نامیم. (به بیان دیگر اگر در گرافی از مرتبه $(p \geq 3)$ بتوان از راسی دلخواه شروع کرده و طی یک دور از تمام رئوس گراف عبور کرد، آن گراف را همیلتنی می نامیم.)

تست: کدام گراف زیر همیلتنی نیست؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

نکته ی ۷۳: نتایج حاصل از تعریف :

۱) اگر G همیلتنی با شد، آنگاه بازای هر $v \in V(G)$ داریم: $\deg v \geq 2$

۲) هر گراف k_p ، $(p \geq 3)$ همیلتنی است.

۳) هر گراف همیلتنی همبند است(حتی اگر یک یال دلخواه از هر گراف همیلتنی را حذف کنیم باز هم گراف حاصل همبند خواهد بود.)

۴) بین هر دو راس متمایز گراف همیلتنی حداقل دو مسیر وجود دارد.

۵) در هر گراف همیلتنی از مرتبه p و اندازه q همواره داریم: $3 \leq p \leq q$.

۶) تعداد دور های همیلتنی در یک گراف کامل برابر $\frac{(p-1)!}{2}$ است.

۷) اگر در گرافی $\delta \geq \frac{p}{2}$ آنگاه گراف حتماً همیلتنی ا ست.

تست: گرافی که دنباله درجه های رئوس آن به شکل 3,2,2,2,1,1,1,1,1, است گرافی:

۱) همبند و غیرهمیلتنی است.   ۲) ناهمبند و همیلتنی است.

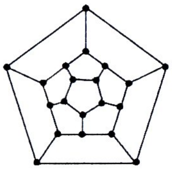
۳) ناهمبند و غیر همیلتنی است.   ۴) همیلتنی است.

نکته ی۷۴: گراف اویلری: گرافی است که بتوان از یکی از رئوس آن شروع کرد واز همه یالها یک بار گذشت و به راس اولیه بازگشت. به بیان دیگر: گراف G اویلری است هر گاه

۱) همبند با شد   ۲)درجه تمامی رئوس زوج با شد.   و برعکس

گراف پترسن گراف همیلتنی و اویلری نمی باشد.

تست: گراف شکل مقا بل چگونه است؟



۱) همیلتنی و اویلری ۲) نه اویلری و نه همیلتنی

۳)فقط اویلری ۴) فقط همیلتنی

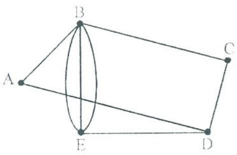
نکته ی ۷۵: **گراف نیمه اویلری:** گرافی است که بتوان از یکی از رئوس آن شروع کرد واز همه یالها یکبار گذشت و به راس دیگری رسید.

نکته ی ۷۶: گراف نیمه اویلری ا ست هر گاه

۱) دو راس فرد داشته با شد.

رئوس ابتدا و انتها مسیر نیمه اویلری همان دو راس فرد ا ست.

تست: شکل زیر ۵ منطقه ی A, B, C, D, E را با ۸ یال با هم راه داده است ، اگر مجاز با شیم از هر پل دقیقاً یک بار عبور کنیم با شروع از منطقه ی B منطقه ی پایان کدام است؟(سراسری – ۸۲)



۱) نشدنی ۲) B ۳) D ۴) E

نکته ی ۷۷: اگر گراف کامل از مرتبه $(p \geq 3)$ مرتبه اش فرد با شد هم اویلری هم بازه ای و همیلتنی است.

تست: کدام گراف اویلری و بازه ای و همیلتنی است؟

۱) k_1 ۲) k_9 ۳) k_6 ۴) k_8

نکته ی ۷۸: **تعریف گراف کامل دو بخشی:** فرض رئوس گراف G را بتوان به دو مجموعه A و B افراز کرد به طوری که رئوس A مجاور نبا شند ا گرمجموع درجات رئوس A برابر مجموع درجات رئوس B با شد آنگاه G را یک گراف کامل دو بخشی می نامیم. اگر تعداد رئوس مجموعه A را با M و تعداد رئوس مجموعه B را N نشان دهیم در این صورت گراف کامل دو بخشی را با نماد $k_{M,N}$ نشان می دهیم.

نکته ی ۷۹: خواص گراف کامل دو بخشی $k_{m,n}$:

۱) از مرتبه $m+n$ است.

۲) اندازه آن mn است.

۳) دور به طول فرد ندارد.پس طول دور های آن اعداد زوج است و چون دور به ۳ نداریم ، بیش تر یا مساوی ۴ است.

۴) برای آنکه دور داشته باشد، $m,n \geq 2$.

۵) با شرط $m,n \geq 2$، کم ترین طول طول دور ۴ و بیش ترین دور آن ، برابر $2\times\min\{m,n\}$ است.

۶) تعداد دور های به طول $2k$ برابر $\binom{m}{k}\binom{n}{k}$ است. $(m,n \geq k)$

۷) اویلری است اگرو تنها اگر m و n زوج با شند.

۸) همیلتنی است اگر و تنها اگر $m=n$. $(m,n \geq 2)$

۹) نیمه اویلری است هرگاه دقیقا یکی از m و n، ۲ و دیگری فرد بزرگتر از ۱ با شد.

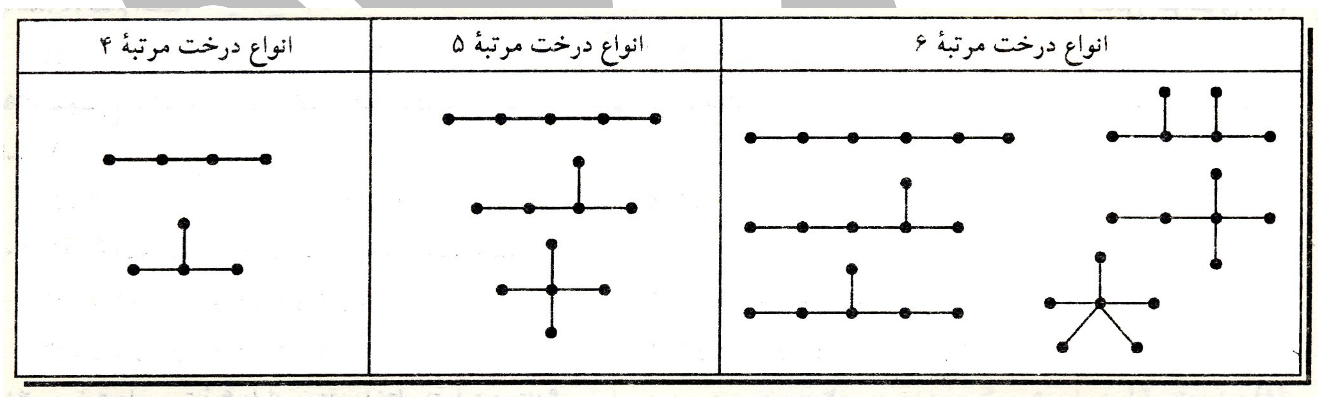
تست: دنباله درجه های گراف G به صورت $S: 3,3,2,2,2$ است اگر دو راس با ماکسیمم درجه مجاور نباشند تعداد دور های به طول ۳ یا ۵ کدام است؟ (سراسری – ۷۹)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

تست: در گراف G با درجه های راس های $3,3,2,2,2$ دو راس ماکسیمم درجه غیر مجاور ند. تعداد دورهای با طول ۴ کدام است؟(سراسری – ۸۱)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

نکته ی ۸۰: گراف همبند و بدون دور را درخت می نامیم. درخت از مرتبه p را با T_p نشان می دهیم.



نکته ی ۸۱: در هر درخت بین هر دو راس متمایز ، فقط یک مسیر منحصر بفرد وجود دارد.

تست: در یک گراف همبند و بدون دور با اندازه ۱۶ چند مسیر بین دو راس غیر مجاور وجود دارد؟

۱)۱ ۲) ۱۵ ۳) ۳ ۴) ۸

نکته ی۸۲: الف) هر درختی که بیش از یک راس داشته با شد، حداقل دو راس از درجه ۱ دارد.

ب) اگر در یک درخت $\Delta = m$ با شد درخت حداقل m راس درجه یک دارد.

تست: اگر $S;5,a,b,1,1,1$ دنباله درجه رئوس گرافی با شد که با حذف هر یال ناهمبند می شود $a+b$ کدامست؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

نکته ی ۸۳: در هر درخت از مرتبه p و اندازه q داریم: $p=q+1$

تست: در یک گراف همبند و بدون دور $2p=3q-3$ است.مجموع درجات این گراف کدامست؟

۱) ۱۲ ۲) ۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۰

نکته ی ۸۴: تعداد کل مسیر ها متفاوت موجود در یک درخت از مرتبه p برابر است با: $\binom{p}{2}$ که طول $p-1$ مسیر از آنها ،دقیقا ۱ و طول سایر مسیر ها که تعداد شان $\binom{p-1}{2}$ است اقلاً ۲ می با شد.به بیان دیگر:

در تمام درخت ها $(p\geq 2)$:

تعداد مسیرها ی به طول بزرگتر یا مساوی صفر $= p+\binom{p}{2}$

تعداد مسیرها ی به طول بزرگتر یا مساوی یک: $=\binom{p}{2}$

تعداد مسیرها ی به طول بزرگتر یا مساوی دو $=\binom{p-1}{2}-q$

تست: در درخت از مرتبه ۵ کلاً چند مسیر وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

نکته ی ۸۵: تعدا د درخت ها از مرتبه p برابر است با: $(p-4)+2^{p-4}$ ، $(p\geq 5)$

تست: تعداد درخت های از مرتبه ۶ چند تا است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

نکته ی۸۶: **طریقه به دست آوردن تعداد راس درجه ۱ در درخت ها:**

۱) از درجات بزرگتر از ۲ هر کدام ۲ واحد کم می کنیم.

۲) اعداد به دست آمده در قسمت (۱) را با هم جمع کرده و به مجموع آنها ۲ واحد اضافه می کنیم.

به بیا ن دیگر : $2+\sum_{d_i\geq 3}(d_i-2)$

تست: دنباله درجات رئوس یک درخت به صورت $S: 3,3,3,2,1,\cdots,1$ است. تعداد رئوس درجه یک برابر است با:

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

تست: بین دو راس از گراف G دقیقاً یک مسیر وجود دارد، اگر این گراف شامل ۷ راس از درجه یک و ۵ راس از درجه ۲ و k راس از درجه ۳ با شد k کدام است؟ (سراسری – ۷۸)

۱) ۶ ۲) ۱۳ ۳) ۱۱ ۸) ۷

نکته ۸۷: اگر عد د حاصل در نکته ی ۸۵ را با A نشان دهیم داریم:

۱)گراف حتماً دارای دور است. $\Leftarrow$ تعداد یک های دنباله ی داده شده با شد $A<$ اگر

۲)گراف حتماً نا همبند است. $\Leftarrow$ تعداد یک های دنباله ی داده شده با شد $A>$ اگر

۳)گراف حتماً درخت است. $\Leftarrow$تعداد یک های دنباله ی داده شده با شد $A=$ اگر

تست: گرافی که دنباله ی درجه ی راس های آن $3,2,2,1,1,1,1,1$ می با شد، چگونه است؟(سراسری -۸۲)

۱) قطعاً دارای دور ۲) درخت ۳) همبند ۴) نا همبند

نکته ی ۸۸: گراف آلکان ها C_nH_{2n+2} درختی از مرتبه $p=3n+2$ و انداه $q=3n+1$ می با شد به طوری که در این درخت ها $\Delta=4$ و $\delta=1$ خواهد بود.

تست: مجموع مرتبه و اندازه گراف گاز پرو پان کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

نکته ی ۸۹: رتبه مداری در گراف ساده: تعداد یالی است که باید از یک گراف همبند حذف نمود، تا به به درخت تبدیل شود و برابر $q-p+1$ می با شد.

تست: گراف G با اندازه ۱۲ و از مرتبه ۷ همبند است ولی درخت نیست. حداقل چند یال از این گراف حذف کنیم تا به درخت تبدیل شود؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۳

نکته ی ۹۰: در هر درخت:

۱) فرد $= p+q$

۲) زوج $= pq$

۳) فرد $= p^2+q^2=4k+1$

۴) فرد $= p^2+q^2=4k+1$

۵) فرد $= p^n \pm q^m$

تست: اگر p و q مرتبه و اندازه یک درخت باشند در بین عبارات p^q و q^p و $p-q$ و p^3+q^2 چند عبارت زوج وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

نکته ی ۹۱:

تعداد راس	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تعداد درخت	۱	۱	۱	۲	۳	۶	۱۱	۲۳

تست: نسبت تعداد درخت های مرتبه۶ به تعداد درخت های مرتبه ۴ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

نکته ی ۹۲: میا نگین درجه رئوس درخت برابر $\bar{V}=\frac{2q}{p}=\frac{2p-2}{p}$ می با شد که دنباله ای است اکیداً صعودی.

تست: میانگین درجه رئوس یک درخت از مرتبه ۴ کدامست؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۱/۷۵

نکته ی ۹۳: به هرگراف بدون دورجنگل می گویندکه متشکل از تعدادی گراف همبند و بدون دور(درخت) می با شد.

تست: اگر در یک جنگل ۳ درخت از مرتبه های ۵و۷و۱۲ وجودداشته با شد، اندازه این جنگل کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۲ ۳) ۲۴ ۴) ۲۱

نکته ی ۹۴: ماتریس مجاورت: ارتباط بین راس ها ی گراف ساده را نشان می دهد. ماتریس مجاورت گراف G از مرتبه p یک ماتریس $p \times p$ متشکل از درآیه های صفر و یک است که سطر ها و ستون های ماتریس به

یک ترتیب با اسامی رئوس گراف نام گذاری شده اند، در محل تلاقی هر سطر و ستون چنا نچــه رئــوس متنــا ظــر ، مجاور باشند، درآیه یک قرار دارد و چنا نچه رئوس متنا ظر مجاور نبا شند، درآیه صفر.

نکته ی ۹۵: ویژگیهای ماتریس مجاورت گراف ساده:

۱) تمام درآیه های آن ۰و ۱ می با شدو روی قطر همواره صفر است.

۲) مرتبه آن $p \times p$ یعنی همان مرتبه ی گراف می با شد.

۳) ماتریسی متقارن و مربعی است یعنی سطر n اُم با ستون n اُم برابر است.

۴) اگراعداد روی سطر یا ستون نظیر هرراس را در ماتریس M با هم جمع کنیم،درجه آن رأس بدست می آید.

۵) درآیه های روی قطر اصلی ماتریس M^2 برابر درجه رئوس گراف می با شند.

۶) تعداد درآیه ۱ در ماتریس مجاورت یک گراف ساده برابر مجموع درجات رئوس آن گراف یعنی $2q$ می با شد.

۷) تعداد صفرهای ماتریس مجاورت برابر است با: $n(0) = p^2 - 2q$

تست: اگر ماتریس مجاورت گراف ساده G به صورت زیر با شد حاصل $\frac{pq}{\Delta + \delta}$ کدامست؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۳ ۴) ۶

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نکته ی ۹۶: اگر گراف r - منتظم با شد آنگاه تعداد صفر های ماتریس مجاورت برابراست با : $n(0) = p(p-1)$

ب)اگر گراف درخت باشد، آنگاه تعداد صفر های ماتریس مجاورت برابراست با : $n(0) = q^2 + 1$

تست: تفاضل تعداد یک ها و تعداد صفر های ماتریس مجاورت درخت مرتبه ۷ کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۶ ۳) ۳۴ ۴) ۲۵

نکته ی ۹۷: اگر مجموع در آیه های روی قطر اصلی ماتریس M^3 در یک گراف ساده را بر ۶ تقسیم نماییم ، تعـداد دور به طول ۳ (تعداد مثلث) بدست می آید.

تست: اگر ماتریس M^3 در یک گراف ساده به صورت زیر باشد، تعداد دور های به طول ۳ در این گراف کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

نکته ی ۹۸: در یک گراف کامل در آیه های روی قطر اصلی ماتریس M^2 برابر $p-1$ و درآیه های خارج قطر اصلی M^2 برابر $p-2$ می با شد.

تست: مجموع اعداد موجود در ماتریس M^2 برای گراف k_6 کدام است؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۷۰

نکته ی ۹۹) ۱) دترمینان ماتریس M در گراف k_p برابر است با: $|M| = (-1)^{p-1} \cdot (p-1)$

۲) دترمینان ماتریس M^2 در گراف k_p برابر است با: $|M^2| = (p-1)^2$

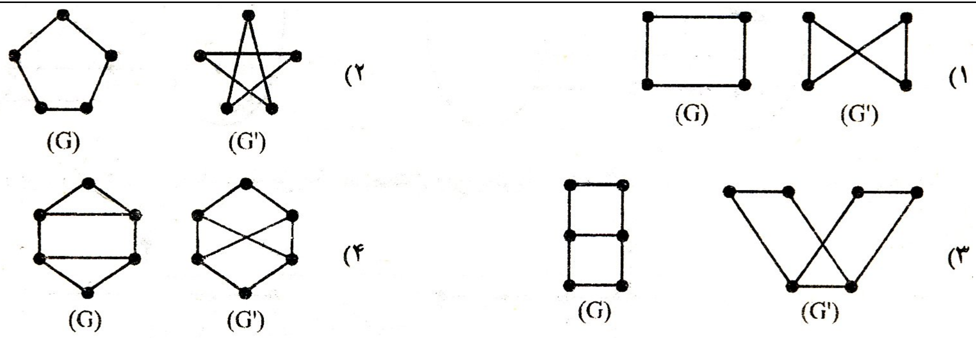
تست: دترمینان ماتریس M و ماتریس M^2 در یک گراف ساده با هم برابر می با شند، این گراف چند ویژگی زیر را دارا می با شد؟

الف) همبند بودن ب) اویلری بودن ج) درخت بودن د) کامل بودن

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

نکته ی ۱۰۰) تعریف گراف های یکسان یا ایزومورف: دو گراف $G_1(V_1, E_1)$ و $G_2(V_2, E_2)$ را یکسان یا ایزومورف گوییم هرگاه $|V_1| = |V_2|$ و با اسامی رئوس یکی بتوان رئوس دیگر ی را به گونه ای نام گذاری کرد که داشته باشیم: $E_1 = E_2$. **توجه:** اگر دنباله درجات دو گراف **متفاوت** با شد، آن دو گراف یکسان <u>نیستند.</u>

تست: در کدام گزینه G و G' یکریخت <u>نیستند</u>؟



۱)
(G')
(G)
۲)
(G')
(G)
۳)
(G')
(G)
۴)
(G')
(G)