توزیع توپ‌ها در جعبه‌ها

۱–تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متمایز
۲– تعداد راه‌های توزیع n توپ یکسان در k جعبه متمایز
۳–تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه یکسان
۴– تعداد راه‌های توزیع n توپ یکسان در k جعبه یکسان

۱– تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متمایز

مثال ۱) می‌خواهیم ۵ توپ با شماره‌های ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ را در ۳ جعبه به رنگ‌های آبی ، قرمز و زرد توزیع کنیم . این کار به چند طریق امکان پذیر است ؟

پاسخ : برای هر توپ ۳ انتخاب وجود دارد ، بنابراین طبق اصل ضرب $۳^۵ = ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳$ است .(برای هر کدام از توپ‌ها ۳ انتخاب وجود دارد یعنی می‌توان جعبه آبی یا قرمز یا زرد را انتخاب کرد به همین ترتیب بقیه جعبه‌ها نیز همین حالت را دارد .)

مثال ۲) چند تابع از مجموعه $A = \{a, b, c, d, e\}$ به مجموعه $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ وجود دارد؟

پاسخ : عضو a می‌تواند به هر یک از عددهای ۱, ۲, ۳ و ۴ تصویر شود ، بنابراین برای هر عضو از مجموعه A چهار انتخاب از مجموعه B وجود دارد پس پاسخ برابر است با : $۴^۵$

نتیجه ۱

تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متفاوت برابر است با : k^n

مثال ۳) می‌خواهیم ۳ جایزه متفاوت را بین ۵ نفر توزیع کنیم ، به‌وری که به هر کدام حداکثر یک جایزه برسد . این کار به چند طریق امکان‌پذیر است ؟

پاسخ : جایزه اول را می‌توانیم به هر کدام از ۵ نفر بدهیم ، جایزه دوم را نیز به هر کدام از ۴ نفر باقی‌مانده و جایزه سوم را نیز می‌توانیم به ۳ نفر دیگر بدهیم . بنابراین طبق اصل ضرب ، جواب مسئله $۳ \times ۴ \times ۵$ است . این عدد را می‌توانیم به صورت $\frac{۵!}{۲!} = \frac{۲ \times ۱}{۲ \times ۱} \times ۳ \times ۴ \times ۵$ نیز بنویسیم .

نتیجه ۲

تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متفاوت $(k \geq n)$ که در هر جعبه حداکثر یک توپ قرار گیرد ، برابر است با :

$$P(k,n) = \frac{k!}{(k-n)!}$$

مثال ۴) شرکتی در نظر دارد برای هر یک از شغل‌های نگهبانی ، دفترداری ، روابط عمومی و مسئول رایانه ، یک نفر را استخدام کند ، ۴ نفر برای استخدام در این شغل‌ها داوطلب شده‌اند . شرکت به چند روش می‌تواند افراد را برای این مشاغل استخدام کند ؟

پاسخ : برای نگهبانی هر کدام از ۴ نفر را می‌توان انتخابر کرد پس ۴ روش ، برای دفترداری نیز ۳ نفر و ... در نتیجه !۴ طریق وجود دارد .

نتیجه ۳

تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه n عضوی به خودش برابر است با $n!$

مثال ۵) شرکتی در نظر دارد برای هر یک از شغل‌های نگهبانی ، دفترداری ، روابط عمومی و مسئول رایانه ، یک نفر را استخدام کند ، ۱۰ نفر برای استخدام در این شغل‌ها داوطلب شده‌اند . شرکت به چند روش می‌تواند افراد را برای این مشاغل استخدام کند ؟

پاسخ : برای نگهبانی هر کدام از ۱۰ نفر را می‌توان انتخابر کرد پس ۱۰ روش ، برای دفترداری نیز ۹ روش و برای روابط عمومی ۸ روش و برای مسئول رایانه نیز ۷ روش وجود دارد .در نتیجه $۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰$ طریق وجود دارد .(یا می‌توان ابتدا ۴ نفر از ۱۰ نفر را انتخاب کرده سپس آن چهار نفر را برای شغل‌ها انتخاب نمود . $\frac{۱۰!}{۶!} = ۴! \times \binom{۱۰}{۴}$

نتیجه ۴

تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متمایز $(k \leq n)$ به‌طوری که در هر جعبه دقیقاً یک توپ قرار گیرد ، برابر است با :

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال ۶) شرکتی در نظر دارد برای هر یک از شغل‌های نگهبانی ، دفترداری ، روابط عمومی و مسئول رایانه ، به‌ترتیب ۱ ,۲ ,۲ و ۳ نفر را استخدام کند ، ۱۰ نفر متقاضی استخدام در این شغل‌ها داوطلب شده‌اند . شرکت به چند روش می‌تواند افراد را برای این مشاغل استخدام کند ؟

پاسخ : ابتدا ۳ نفر از ۱۰ نفر را برای مسئول رایانه ، سپس ۲ نفر از افراد باقی‌مانده را برای روابط عمومی ، به همین ترتیب ۲ نفر از افراد باقی مانده را برای دفتر داری و ۱ نفر را از افراد باقی‌مانده را برای نگهبانی انتخاب می‌کنیم .

$$\binom{۱۰}{۳} \times \binom{۷}{۲} \times \binom{۵}{۲} \times \binom{۳}{۱}$$

مثال ۷) می‌خواهیم ۵ توپ از رشته‌های ورزشی متفاوت را در سه جعبه ۱ ,۲ و ۳ به گونه‌ای قرار دهیم که در هر جعبه حداقل یک توپ قرار گیرد ، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است ؟

پاسخ : می‌توان صورت دیگر مسئله را بدین صورت نیز بیان کرد . (تعداد توابع پوشا از مجموعه‌ای ۵ عضوی به مجموعه $\{۱, ۲, ۳\}$ به‌دست آورد .)

برای جواب دادن به این مسئله ناچاریم از اصل شمول و عدم شمول استفاده کنیم ، ابتدا پیشامدهای نامطلوب را تعریف می‌کنیم :

$A_۱ =$ پیشامدهایی که در جعبه اول توپی قرار نگیرد یا عدد ۱ تصویر هیچ عضوی از مجموعه اول نباشد

$A_۲ =$ پیشامدهایی که در جعبه دوم توپی قرار نگیرد یا عدد ۲ تصویر هیچ عضوی از مجموعه اول نباشد

$A_۳ =$ پیشامدهایی که در جعبه سوم توپی قرار نگیرد یا عدد ۳ تصویر هیچ عضوی از مجموعه اول نباشد

تعداد کل حالت‌های نامطلوب برابر است با : $|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳|$

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = |A_۱| + |A_۲| + |A_۳| - |A_۱ \cap A_۲| - |A_۱ \cap A_۳| - |A_۲ \cap A_۳| + |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|$$
$$= ۲^۵ + ۲^۵ + ۲^۵ - ۱ - ۱ - ۱ + ۰ = ۳ \times ۲^۵ - ۳$$

بنابراین از کل حالت‌ها $۳^۵$ تعداد حالت‌های نامطلوب را کم می‌کنیم. $۳^۵ - (۳ \times ۲^۵ - ۳)$

۲- تعداد راه‌های توزیع n توپ یکسان در k جعبه متمایز

نکته

تعداد جایگشت‌های n شیء که n_1 تا از آن‌ها مانند هم ، n_2 تا از آن‌ها نیز مانند هم و ... ، n_k تا از آن‌ها مانند هم است به شرطی که $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ برابر است با : $\dfrac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_k!}$

مثال ۸) با حروف کلمه انتخابات چند کلمه ۸ حرفی بدون توجه به مفهوم آن می‌توان ساخت ؟

پاسخ : با توجه به این‌که ۳ حرف « ا » و ۲ حرف «ت » وجود دارد ، پاسخ $\dfrac{8!}{3!2!}$ است .

مثال ۹) با ارقام ۰, ۰, ۰, ۲, ۲, ۳, ۳ و ۳ چند عدد ۸ رقمی می‌توان ساخت ؟

پاسخ : رقم صفر در اولین رقم سمت چپ نمی‌تواند قرار بگیرد ، بنابراین این رقم یا عدد ۲ و یا عدد ۳ است .

$$\begin{cases} \text{سمت چپ ۲ باشد : اعدادی که با ۲ شروع می‌شوند.} \Rightarrow \dfrac{7!}{2!1!3!}=140 \\ \text{سمت چپ ۳ باشد : اعدادی که با ۳ شروع می‌شوند.} \Rightarrow \dfrac{7!}{2!2!3!}=210 \end{cases} \Rightarrow 140+210=350$$