

ماتریس



تعریف: هر آرایش ماتریسی از اعداد حقیقی شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می شود. هر عدد

حقیقی واقع در ماتریس را درایه می گوئیم.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 8 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{دارای سه سطر و دو ستون}$$

این ماتریس را ماتریس 3×2 میگویند و ۶ درایه دارد.

برای به دست آوردن تعداد درایه ها میتوان تعداد سطرها و تعداد ستون ها را ضرب کرد اما وقتی کنار ماتریس فوق مینویسیم :

$A_{3 \times 2}$ دیگر حق نداریم اعداد را ضرب کنیم. این اعداد برای نشان دادن تعداد سطر و ستون است.

* وقتی مینویسیم $A_{m \times n}$ به چه معناست؟ جواب: تعداد سطرها m و تعداد ستون ها n است.

$$\text{مثال: اگر } A = [a_{ij}]_{2 \times 2} \text{ و بدانیم: } \begin{cases} a_{ij} = 1 & i < j \\ a_{ij} = 5 & i = j \\ a_{ij} = -2 & i > j \end{cases} \text{ ماتریس را مشخص کنید.} \quad \text{📖}$$

$$\text{مثال: در ماتریس } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ حاصل } a_{13} - 2a_{21} + a_{32} \text{ را بیابید.} \quad \text{📖}$$

مثال: ماتریسی بسازید که اطلاعات زیر را نشان دهد:

در یک لیگ فوتبال تیم های A, B, C هر کدام به ترتیب ۵ و ۴ و ۶ بازی شکست خورده اند. آن ها به ترتیب در ۲ و ۴ و ۱ مسابقه به پیروزی رسیده اند و هر کدام در سه مسابقه بازی کرده اند. در نتیجه ۹ و ۱۵ و ۶ امتیاز کسب کرده اند.

* آیا می‌توانید اطلاعات بالا را طوری دسته بندی کنید که تیم ها بر اساس امتیاز دسته بندی شوند؟

جمع و تفریق ماتریس ها



نکته: فقط و فقط ماتریس های هم مرتبه می توانند با هم جمع و تفریق شوند.

برای جمع و تفریق ماتریس ها باید حتماً هم مرتبه باشند. و ماتریس حاصل ماتریسی هم مرتبه با آنها است که از جمع و تفریق درایه های نظیر به وجود آمده است.

$$\text{اگر } A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ و } B = [b_{ij}]_{m \times n} \text{ آنگاه: } A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$$

ضرب عدد در ماتریس



نکته: برای ضرب عدد r در ماتریس A باید عدد r را در تک تک درایه های A ضرب کنیم.

$$\text{اگر } A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ آنگاه: } rA = r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

قرینه یک ماتریس




قرینه ماتریس A ماتریسی هم مرتبه مثل B است که اگر $A+B=\bar{O}$ در واقع تمام درایه ها قرینه می شوند.


مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس C را طوری بیابید که $A+2B-C=\bar{O}$

مثال: اگر $A = [i - j]_{2 \times 2}$ و $B = [6 - ij]_{2 \times 2}$ مجموع درایه های سطر دوم $A+B$ را بیابید.

مثال: اگر $A = [i - 2j]_{2 \times 2}$ و $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس $A+2B$ را بیابید.


مثال: ماتریس $A = [i^2 - 3j]_{2 \times 2}$ را با نشان دادن اعضا مشخص کنید.

مثال: مطلوبست $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به شرطی که: $a_{ij} = \begin{cases} -2i+j & i > j \\ i-3j & i = j \\ 2i & i < j \end{cases}$ 

مثال: ماتریس زیر را به صورت آرایش مستطیلی نشان دهید 

الف) $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, $a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{2} & i = j \\ \frac{1}{2} & i < j \\ -1 & i > j \end{cases}$

ب) $B = [b_{ij}]_{3 \times 4}$, $b_{ij} = [i^2 - 2ij]$

انتهایی دی ۹۷- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i, j & i > j \\ i^2 & i = j \\ 2i - j & i < j \end{cases}$ ماتریس $2A - 3I$ را بیابید. 

تساوی بین دو ماتریس:



دو ماتریس هم مرتبه با هم برابرند هرگاه درایه های نظیر با هم برابر باشند.

مثال: اگر $\begin{bmatrix} 3x-y & 0 \\ z+3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & x-2y \\ 4 & -t \end{bmatrix}$ مقدار $x+y+z+t$ را بیابید.

مثال: اگر $5A+2B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ ماتریس A را بیابید.

مثال: ماتریس های $A = \begin{bmatrix} ab & 4 \\ 3 & a+b \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ با هم برابرند. $A^2 + B^2$ را بیابید.

مثال: اگر A, B دو ماتریس 2×2 باشند بطوریکه $B + 5A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $3A - 2B = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$ ماتریس A, B را

بیابید.

معرفی چند ماتریس خاص



1 **ماتریس مربعی:** اگر تعداد سطرها و ستون ها برابر باشد، A را یک ماتریس مربعی می گوئیم. گاهی ماتریس مرتبه $n \times n$ را مرتبه n هم میگوئیم.

$$A = [3] \quad \text{مربعی مرتبه ۱} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{مربعی مرتبه ۲} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ -4 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{مربعی مرتبه ۳}$$

2 **ماتریس سطری:** ماتریسی که فقط یک سطر دارد.

$$A = [3] \quad B = [2 \ 8] \quad C = [3 \ 5 \ -3]$$

3 **ماتریس ستونی:** ماتریسی که فقط یک ستون دارد.

$$A = [5] \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

4 **ماتریس قطری:** ماتریسی که تمام درایه ها به جز قطر اصلی همگی صفر هستند.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}; i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

لطفا بدون حل تمرینات کلاس تشریف نیاورید - سرایی

۵ **ماتریس اسکالر** : ماتریسی که اولاً قطری است . ثانیاً تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابرند.

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته: ماتریس قطری که تمام درایه های روی قطر اصلی آن ۱ باشد را I می نامیم.

$$I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۶ **ماتریس صفر** : ماتریسی که تمام درایه های آن صفر باشد که در قسمت ماتریس قرینه معرفی شد. و با \bar{O} نمایش می

دهیم.

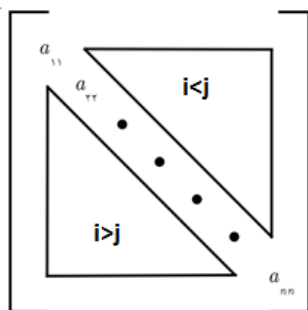
۷ **ماتریس بالا مثلثی** : ماتریسی است که تمام درایه های پایین قطراصلی همگی صفر باشند(سایر درایه ها میتوانند

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} \quad i > j \Rightarrow a_{ij} = 0 \quad (\text{صفر باشند یا نباشند.})$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۸ **ماتریس پایین مثلثی** : ماتریسی است که تمام درایه های پایین قطراصلی همگی صفر باشند(سایر درایه ها میتوانند

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} \quad i < j \Rightarrow a_{ij} = 0 \quad (\text{صفر باشند یا نباشند.})$$



$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

نکته : ماتریس قطری و ماتریس صفر ؛ هم بالا مثلثی هستند و هم پایین مثلثی.

نکته : در شکل روبرو در مورد درایه های بالای قطر اصلی و پایین قطر اصلی

ضرب ماتریس سطری در ستونی



ستونی سطری

$$A_{m \times n} \times B_{n \times 1}$$

برای ضرب باید علامت هایی که شبیه هم هستند در هم ضرب شوند و سپس عددهای به دست آمده را با هم جمع کنیم.

$$\begin{bmatrix} \ominus \\ \Psi \\ \Delta \\ \wp \end{bmatrix}$$

نکته: برای ضرب اولین موضوعی که به آن دقت میکنیم این است که وقتی دو ماتریس کنار هم نوشته

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p} \text{ میشوند تعداد ستون های اولی با تعداد سطر های دومی باید با هم برابر باشند.}$$



$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = (2 \times 1) + (3 \times -4) + (-3 \times 5) + (6 \times 9)$$

مثال

❖ برای ضرب به روش زیر عمل می کنیم

۱- ابتدا بررسی می کنیم ضرب قابل انجام دادن هست یا خیر (نکته بالا)

۲- ماتریس اولی را سطر به سطر عمل می کنیم.

۳- ماتریس دومی رو ستون به ستون عمل می کنیم.

۴- یک سطر از ماتریس اولی را با یک ستون از ماتریس دومی با روش ضرب سطری در ستونی ضرب می کنیم. سپس سراغ

سطر بعدی می رویم.


مثال: اگر $A_{3 \times 2}$ و $B_{5 \times 3}$ کدام ضرب قابل انجام دادن است؟ مرتبه ی ماتریس حاصل را مشخص کنید.


مثال: ماتریس $A_{2 \times 2}$ را به گونه ای پیدا کنید که در تساوی $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ صدق کند.


مثال: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = A \times B$ درایه ی C_{33} را بیابید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، درایه واقع بر سطر دوم و ستون اول ماتریس

ABC را بیابید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ مطلوبست: $A \times B$ 

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ سطر دوم $A \times B$ را بیابید. 

مثال: اگر $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ مطلوبست $x + y$ 

۴(۴)

۳(۳)

۲(۲)

۱(۱)

مثال: دو ماتریس $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ مفروض اند. مطلوبست:


الف) $A \times B$ ب) $(A+B) \times (A-B)$ پ) $2A^2 \times 3I$

نکته: برای یافتن عضو d_{ij} از ماتریس $ABC = (ستون\ j\ ام\ C) \times (سطر\ i\ ام\ A)$



مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ درایه ی سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^3 کدام است؟

۱) $3x$ ۲) $3y$ ۳) $2x^2 + 2y^2$ ۴) $3(x^2 + y^2)$

مثال  : ماتریس های A, B مربعی و از مرتبه ۲ هستند. ثابت کنید مجموع درایه های روی قطر اصلی دو ماتریس $A + B, B + A$ با هم برابر هستند.

ویژگی های ضرب ماتریس ها



① در حالت کلی خاصیت جابه جایی ندارد.

② ضرب همانی در ماتریس، خاصیت جابه جایی دارد. $AI = IA = A$

③ اگر $A \times B = A \times C$ نمی توان نتیجه گرفت $B = C$ (حذف برقرار نیست)


نکته: وقتی خاصیت حذف برقرار است که ماتریس A وارون پذیر باشد. (بعدها معنی وارون پذیری را خواهیم خواند و این موضوع را اثبات خواهیم کرد.)

④ ضرب ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری دارد. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

⑤ ضرب ماتریس ها خاصیت توزیع پذیری و فاکتورگیری دارد. $A \times (B \pm C) = (A \times B) \pm (A \times C)$

⑥ در اعداد حقیقی می دانیم: $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

اما این خاصیت در ضرب ماتریس ها برقرار نیست یعنی اگر بدانیم $AB = \bar{O}$ نمیتوان نتیجه گرفت $A = \bar{O}$ یا $B = \bar{O}$


مثال: دو ماتریس ناصفر مثال بزنند که حاصلضرب آنها ماتریس صفرشود و درستی حکم بالا را نشان دهید. 

۷ حاصلضرب دو ماتریس قطری

کافی است درایه های روی قطر اصلی را در هم ضرب کنیم.

$$\begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & \cdot & \cdot \\ \cdot & e & \cdot \\ \cdot & \cdot & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & \cdot & \cdot \\ \cdot & be & \cdot \\ \cdot & \cdot & cf \end{bmatrix}$$

برای به توان رساندن هم همین خاصیت را داریم. یعنی تمام درایه های روی قطر اصلی به توان مورد نظر میرسد.

مثال:  برای دو ماتریس هم مرتبه و مربعی B, A داریم: $A+B=I$ ثابت کنید ضرب B, A خاصیت جابه جایی دارد.

۸ اگر دو ماتریس B, A تعویض پذیر باشند یعنی $A \times B = B \times A$ آنگاه اتحادهای زیر در مورد آنها برقرار است.

(الف) اتحاد مربع دو جمله ای $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(ب) اتحاد مزدوج $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

(پ) اتحاد چاق و لاغر $(A+B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$

مثال: اگر $A = B + C$ حاصل $A^2 + B^2 - AB - BA$ کدام است؟ (آزاد ۷۸)

- (۱) $-C^2$ (۲) C^2 (۳) \bar{O} (۴) C

مثال- اگر ضرب ماتریسی $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشد، حاصل $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -x \end{bmatrix}$ را $\begin{bmatrix} x & 2 & -y \end{bmatrix}$ را

بیابید. نهایی دی ۹۷

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، مقدار a, b را چنان بیابید که حاصل ضرب $A \times B$ ماتریسی قطری شود.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه:

$x = -y = 1$ (۴)

$x = y = 1$ (۳)

$x = -y = -1$ (۲)

$x = y = -1$ (۱)

مثال: اگر $A^T = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 15 & 13 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ باشند، $AB + BA$ را بیابید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 2a & 0 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2b & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 4c \end{bmatrix}$ و $4a + 3b - 2c = 7$ باشد، مجموع عناصر روی قطر اصلی

۲۱ (۴)

۱۸ (۳)

۱۶ (۲)

۱۴ (۱) چقدر است؟

مثال: حاصل جمع ریشه های معادله $\bar{0} = \begin{bmatrix} X & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ X \\ 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $\frac{-3}{2}$

از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} X & 2X & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 2X \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ عدد غیرصفر X کدام است؟ (کنکور ۹۸)

(۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{3}{5}$

نهایی خرداد ۹۸ - در معادله ماتریسی $\bar{0} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ مقدار X را بیابید.

مثال: اگر B, A دو ماتریس هم مرتبه باشند و $BA - \lambda AB = \bar{O}$ مقدار m را از رابطه $mAB^2 = B^2A$ چقدر است؟

مثال: اگر $A - B = -kI$ باشد، حاصل $A^2 - AB + kB$ کدام است؟

- (۱) $k^2 I$ (۲) $k^2 I$ (۳) $-k^2 I$ (۴) $-k^2 I$

مثال: اگر $AB = B$, $BA = A$ باشد، $A^2 B^2$ کدام است؟

- (۱) I (۲) A (۳) B (۴) A^2

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ماتریس $A^7 - A^4$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I$ دوتایی (α, β) کدام است؟ (سراسری ۸۴)

(۱) $(2, 11)$ (۲) $(2, 13)$ (۳) $(4, 11)$ (۴) $(4, 3)$

مثال: اگر A یک ماتریس مربعی باشد بطوریکه $A^2 - A = \bar{O}$ آنگاه $(2A - I)^{399}$ کدام است؟

(۱) \bar{O} (۲) I (۳) A (۴) $2A - I$

مثال: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع همه درایه های ماتریس $A^2 + AB + 2B$

کدام است؟ (آزمون های کانون ۹۷)

۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴)

مثال: اگر $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ حاصل $(A - B)^2$ را بیابید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل $A^n - A^{n-1}$ را بیابید.

نکته: ماتریس قطری فرعی وقتی به توان برسد به ماتریس قطری تبدیل میشود.



مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} \circ & \circ & -1 \\ \circ & 2 & \circ \\ 5 & \circ & \circ \end{bmatrix}$ آنگاه A^n چگونه است؟

مثال: $A^2 = 5A$ آنگاه A^{10} کدام است؟

$25A$ (۴)

$5^9 A$ (۳)

$5^2 A$ (۲)

$10A$ (۱)

نکته: اگر $A^2 = kA$ آنگاه $A^n = k^{n-1}A$



مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه A^y را بیابید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ مجموعه درایه های A^5 کدام است؟

- (۱) -3^7 (۲) 3^7 (۳) -3^6 (۴) 3^6


مثال: اگر $A^2 = I$ آنگاه $A^{1397} + A^{1398}$ با کدام ماتریس برابر است؟


- (۱) $A + I$ (۲) $2A$ (۳) $2I$ (۴) $2A + I$

مثال: مجموع درایه های $A^{136} - A^{139}$ را در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$ بیابید.

مثال: اگر $A^2 = -2I$ آنگاه A^{29} کدام است؟

- (۱) $512A^2$ (۲) $-512A^2$ (۳) $512A$ (۴) $-256A^2$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ -1 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس A^{99} را بیابید. 


مثال: اگر $(A - I)^2 = \bar{O}$ ، حاصل A^4 برابر کدام است؟ 


$8A - 7I$ (۴)

$4A - 3I$ (۳)

$3A - 2I$ (۲)

I (۱)

نهایی دی ۹۷ - اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه های سطر دوم A^2 برابر ۵ است. (درست - نادرست) 

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ مطلوبست ماتریس A^5 

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & & & \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه های قطر اصلی

ماتریس C^2 کدام است؟

۱۶(۱) ۱۸(۲) ۲۰(۳) ۲۴(۴)

وارون ماتریس



در مجموعه اعداد حقیقی وارون عددناصفر a ، عددی حقیقی مثل $\frac{1}{a}$ است بطوریکه $a \times \frac{1}{a} = 1$ که عدد ۱ را عضو خنثی عمل ضرب در اعداد حقیقی میگویند.

در ماتریس ها وارون ماتریس ناصفر A ، ماتریسی مانند B است که

$$A \times B = I$$

$$B \times A = I$$

ماتریس وارون A را با A^{-1} نمایش می دهیم.

مثال: نشان دهید وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ماتریس $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 10 \\ 0 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ است.

روش محاسبه وارون ماتریس 2×2 روبرو $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

دنبال ماتریسی مثل B هستیم که $A \times B = I$ و $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ ay + bt = 0 \\ cx + dz = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases} \Rightarrow B = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{با حل دستگاه روبرو داریم:} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* پس وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس روبروست: $B = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

عدد حقیقی $ad - bc$ که در واقع تفاضل درایه های روی قطر اصلی و قطر فرعی است را دترمینان ماتریس A میگوییم.


پس: $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$


نکته: ماتریس وقتی وارون دارد که دترمینان آن صفر نشود. پس اگر دترمینان ماتریسی برابر صفر شود، ماتریس وارون ندارد. اصطلاحاً میگوییم وارون پذیر نیست. یعنی نمیتوان ماتریسی پیدا کرد که اگر در خود ماتریس ضرب شود حاصل I شود.

مثال: مقدار a را طوری بیابید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ 2 & a+2 \end{bmatrix}$ وارون پذیر باشد.

مثال: وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ را بیابید. 


مثال: وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ را بیابید. 


مثال: وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$ را بیابید. 


مثال: اگر ماتریس های A, B وارون پذیر نباشند، حاصل $A \times B$ کدام است؟ 

$$A = \begin{bmatrix} a+2 & 3 \\ a & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1-b & 2 \\ -b & 3 \end{bmatrix}$$

❖ قضیه: ثابت کنید ماتریس وارن A منحصر به فرد است.

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ را بیابید. 


مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(A^{-1} + I)(A + I)$ را بیابید. 

مثال: وارون ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ را بیابید. 

نکته: برای وارون کردن ماتریس قطری کافی است درایه های روی قطر اصلی را معکوس کنیم.




$$(kI)^{-1} = \frac{1}{k}I \quad \text{و} \quad I^{-1} = I$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A - A^{-1}$ را به دست آورید. 

مثال: اگر $A^3 = I$ آنگاه A^{-1} کدام است؟ 

(۱) A (۲) A^2 (۳) A^3 (۴) I

مثال: اگر $3I - 5A = A^3$ آنگاه A^{-1} را بیابید. 

مثال: اگر $\cos x = \frac{1}{2}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$ دترمینان A^{-1} را بیابید.

نکات مهم وارون



برای دو ماتریس وارون پذیر 2×2 داریم:

(ب) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

(الف) $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

(ت) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

(پ) $(A^{-1})^{-1} = A$

(ث) $(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix}$ باشد، $(A^2)^{-1}$ را بیابید. ($a \neq 1, -1$)

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ -7 & 15 \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $(B^{-1}AB)^{14}$ کدام است؟

- (۱) $-A$ (۲) A (۳) I (۴) $-I$

مثال: اگر $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ حاصل $|B - A| - |A + B|$ کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۴ (۳)

-۱۴ (۲)

-۱۸ (۱)

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ دترمینان $(3A)^2$ کدام است؟

۳ (۴)

۹ (۳)

۲۷ (۲)

۸۱ (۱)

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ و I همانی و α, β دو عدد حقیقی باشند بطوریکه $\alpha A + \beta I = A^{-1}$ مقدار β کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۳)

نکته مهم: قبلا گفتیم اگر $AB = AC$ نمیتوان نتیجه گرفت $B = C$



❖ قضیه: اگر در رابطه ماتریسی $AB = AC$ ماتریس A وارون پذیر باشد، $(|A| \neq 0)$ آنگاه قاعده حذف وجود دارد.

📖 مثال: اگر A وارون پذیر باشد و $|I - A| = 5$ باشد، مقدار $|A^{-1} - I|$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) $\frac{5}{|A|}$ (۳) $\frac{1}{5|A|}$ (۴) $5|A|$

📖 مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، از رابطه ماتریسی $AX = A - 2I$ ، ماتریس X کدام است؟ (کنکور ۹۸)

(۱) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

📖 مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و دترمینان $(A^{-1})^2$ برابر $\frac{1}{9}$ باشد، مقدار a را بیابید.

دستگاه دو معادله دو مجهول



اگر دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ را به شکل ماتریسی بنویسیم داریم: $\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$


را ماتریس ضرایب مینامیم $\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ را ماتریس مجهولات و $\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ را ماتریس معلوم (مقادیر) مینامیم.


پس شکل ماتریسی دستگاه بالا به صورت زیر است: $AX = B$

اگر هر دو طرف رابطه فوق را در A^{-1} ضرب کنیم داریم: $X = A^{-1} \times B$

مثال: اگر $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را بیابید.


مثال: در دستگاه $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases}$ وارون ماتریس ضرایب را به دست آورید.


مثال: دستگاه 
$$\begin{cases} x - 5y = -1 \\ 4x + 3y = 19 \end{cases}$$
 را با روش ماتریس وارون حل کنید.

مثال: در دستگاه معادلات 
$$\begin{cases} ax + by = f \\ cx + dy = 1 \end{cases}$$
 معکوس ماتریس ضرایب مجهول به صورت $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ است. اگر $x = 1$

مقدار y کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۶)

(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

مثال:  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $B \cdot (2A^{-1})$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

مثال: اگر  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ماتریس $B \cdot (AB)^{-1}$ کدام است؟

مثال: از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس A کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

مثال: از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ سطر اول ماتریس A کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۸)

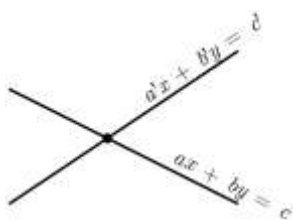
مثال: اگر X ماتریسی 2×2 باشد که $X \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه ماتریس X را پیدا کنید.

تعبیر هندسی دستگاه دو معادله دو مجهول



دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ متشکل از دو معادله خط است. اگر y, x خاصی در دستگاه صدق کند جواب دستگاه است.

(x, y) نقطه ای از صفحه ای است که هم روی خط $ax + by = c$ و هم روی $a'x + b'y = c'$ است پس (x, y) همان محل تلاقی دو خط است.



در واقع حل دستگاه همان پیدا کردن محل تلاقی دو خط است.

الف) اگر دو خط متقاطع باشند

$$m \neq m' \Rightarrow \frac{-a}{b} \neq \frac{-a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$$

ب) دو خط موازی هستند اما منطبق نیستند. $m = m' \Rightarrow \frac{-a}{b} = \frac{-a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

پ) دو خط موازی و منطبق هستند.

$$m = m' \Rightarrow \frac{-a}{b} = \frac{-a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$


جواب ندارد


$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$


پس: یک جواب منحصر به فرد

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$


بی شمار جواب دارد

مثال: دستگاه معادله $\begin{cases} 3x - y = k \\ 2x + by = 7 \end{cases}$ بی شمار جواب دارد. $k + b$ را بیابید. 

مثال: دستگاه معادله $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ ax + 2y = 3 \end{cases}$ جواب ندارد. a را بیابید. 

مثال: به ازای کدام مقدار a ، معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} a+1 & 2 \\ -1 & a-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$ جواب دارد؟ (سراسری تجربی ۸۸) 

(۱) $\{-1, 1\}$ (۲) $R - \{0, 1\}$ (۳) \emptyset (۴) R

مثال: از دستگاه معادلات $\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 4 \\ \frac{14}{x} - \frac{10}{y} = 5 \end{cases}$ مقدار $x + y$ کدام است؟ 

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸


مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} a+b & 2 \\ b-a & 0 \end{bmatrix}$ و $A^{-1} = A$ باشد، مقدار $3b - 5a$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲



مثال: به ازای کدام مقدار a معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & a+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2 \\ 2 \end{bmatrix}$ جواب ندارد؟ (تجربی خارج ۸۸)

- (۱) -۶ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) ۲

مثال: دستگاه معادلات $\frac{3x-y}{3} = \frac{5x+y}{1} = \frac{7x+y}{2} = \frac{x-3y}{5}$ چند دسته جواب دارد؟ (سراسری تجربی ۸۷)

مثال: از دستگاه 
$$\begin{cases} \frac{xy}{y-x} = 6 \\ \frac{xy}{2x+3y} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
 مقدار $y-x$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱

نهایی خرداد ۹۸- مقدار m را چنان بیابید که دستگاه 
$$\begin{cases} mx + 3y = -3 \\ 4x + (m+4)y = 2 \end{cases}$$
 جواب نداشته باشد. 

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس 3×3

گام اول: ابتدا تصمیم می‌گیریم که با کدام سطر یا ستون می‌خواهیم دترمینان را محاسبه کنیم.


گام دوم: از اولین درایه برای تمام درایه‌ها می‌توان به صورت یک در میان علامت مثبت و منفی در نظر گرفت.

گام سوم: هر درایه باید در یک دترمینان 2×2 ضرب شود. روش به دست آوردن این دترمینان به این صورت است که تمام

درایه‌هایی که در سطر و ستون این درایه‌ی مورد نظر هست را حذف می‌کنیم و بقیه را در دترمینان مورد نظر مینویسیم. به

طور مثال درایه‌هایی که متناظر با a_{13} حذف میشوند به صورت روبروست:


$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

مثال: دترمینان ماتریس روبرو را بیابید. 

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -7 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

یافتن ماتریس مربعی درجه ۳ با روش ساروس

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - (ceg + afh + bdi)$$

مثال: اگر $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix} = A + x \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ باشد، A کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۷) 

نکات دترمینان های 3×3



$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & a \\ \cdot & b & \cdot \\ c & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = -abc - 3$$

$$\begin{vmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{vmatrix} = abc - 2$$

$$|I_3| = 1 - 1$$

۶- اگر یک سطر (ستون) صفر باشد، حاصل صفر است.

$$\begin{vmatrix} a & \cdot & \cdot \\ x & b & \cdot \\ y & z & c \end{vmatrix} = abc - 5$$

$$\begin{vmatrix} a & x & y \\ \cdot & b & z \\ \cdot & \cdot & c \end{vmatrix} = abc - 4$$

۷- اگر دو سطر (دو ستون) ماتریسی با هم برابر باشد، دترمینان صفر است.

۸- اگر A ماتریسی مربعی و $n \times n$ باشد، $|\lambda A| = \lambda^n |A|$

۹- اگر یکی از سطرها (ستونها) مضربی از سطر (ستون) دیگر باشد، دترمینان صفر است.

۱۱- اگر $m > n$ آنگاه $|A_{m \times n} B_{n \times m}| = 0$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad -10$$

نهایی خرداد ۹۸ - اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A^2|$ را بیابید.

مثال: اگر $-2 = \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & y & -1 \\ 3 & 4 & z \end{vmatrix}$ آنگاه حاصل $\begin{vmatrix} -2x & 12 & -6 \\ 1 & -3y & -1 \\ 1 & -12 & z \end{vmatrix}$ را با استفاده از خواص دترمینان ها بیابید.

مثال: اگر A ماتریسی 2×2 باشد، بطوری که $|A| = -3$ حاصل $|A|A$ چقدر است؟

مثال: اگر A ماتریسی 3×3 باشد، بطوری که $|A| = 4$ آنگاه دترمینان ماتریس $|A| \cdot A$ چقدر است؟ (کنکور ۹۸)

۲۵۶ (۴)


۱۲۸ (۳)

۹۶ (۲)

۶۴ (۱)

مثال: $|A|A = 5I_3$ آنگاه حاصل $|A|$ را بیابید.

مثال: معادله $\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ x & 1 & 7 \\ x & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟

مثال: مقادیر x از رابطه $= 0$ 

$$\begin{vmatrix} \circ & x-3 & x-2 \\ x+3 & \circ & -4 \\ x+2 & 6 & \circ \end{vmatrix}$$

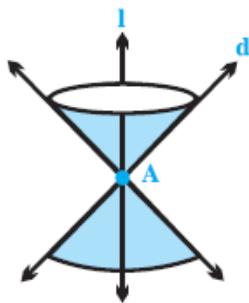
کدام است؟ (کنکور ریاضی ۹۷)

(۱) $-1, -6$ (۲) $-1, 6$ (۳) $1, -6$ (۴) $1, 6$

مقاطع مخروطی



۱ رویه مخروطی: اگر خط l, d در نقطه ای مانند A (مطابق شکل) متقاطع باشند، سطح حاصل از دوران خط d حول



خط l را در یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم.

در این حالت خط l را محور، نقطه A را رأس و خط d

را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.

۲ فصل مشترک حاصل از تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی را مقطع مخروطی می‌نامیم.

حالت های مختلف این تقاطع به صورت زیر است: