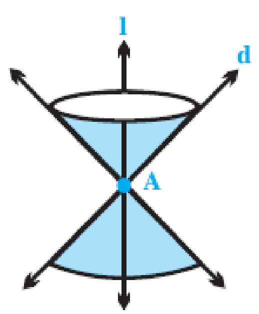
مثال: مقادیر x از رابطه $\begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟(کنکور ریاضی ۹۷)

۱) $-1, -6$　　۲) $-1, 6$　　۳) $1, -6$　　۴) $1, 6$

مقاطع مخروطی

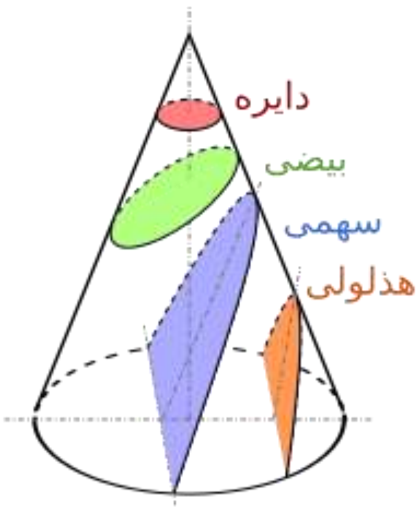
❶ رویه مخروطی: اگر خط l, d در نقطه ای مانند A (مطابق شکل) **متقاطع** باشند، سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را در یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم.

در این حالت خط l را محور، نقطه A را رأس و خط d را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.



❷ فصل مشترک حاصل از تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی را مقطع مخروطی می‌نامیم.

حالت های مختلف این تقاطع به صورت زیر است:



❖ دایره: اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی یعنی d' عمود باشد،
و همچنین از A نگذرد، سطح حاصل یک دایره است.

❖ بیضی: اگر صفحه P بر محور d' عمود نباشد و با d هم موازی نباشد و
فقط یکی از دو نیم سطح را قطع کند ، سطح حاصل بیضی خواهد بود.

❖ سهمی: اگر صفحه P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروطی عبور نکند،
در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروط یک سهمی است.

❖هذلولی : اگر صفحه P هر دو نیمه سطح مخروطی را قطع کند و شامل d' نباشد،
در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی خواهد بود.

📖مثال۱ – یک رویه مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحه p عمود بر محور رویه مخروطی طوری رسم شود که از رأس مخروط عبور نکند سطح مقطع حاصل چه شکلی است؟ شکل مناسب رسم کنید.

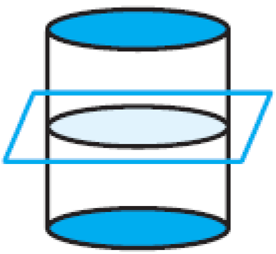
📖مثال۲ – یک رویه مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحه p بر محور رویه مخروطی عمود نباشد و با مولد رویه نیز موازی نباشد، سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه و رویه چه شکلی است؟ شکل مناسب رسم کنید.

📖مثال۳ – یک رویه مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحه p هر دو تکه بالایی و پایینی رویه مخروطی را قطع کند و شامل محور رویه نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی چه شکلی است؟ شکل مناسب بکشید.

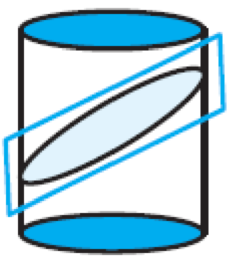
مثال۴ – هرگاه صفحه ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک حاصل چه شکل خواهد بود؟

❸ اگر دو خط d',d (بهتر است بگوییم دو پاره خط d',d) موازی باشند، از دوران d حول d' یک استوانه ایجاد می‌شود.

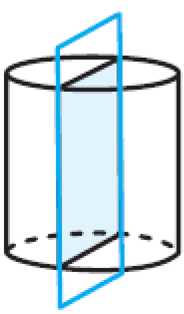
❖ اگر صفحه p موازی با قاعده استوانه، استوانه را قطع کند، سطح مقطع حاصل دایره است.



❖ اگر صفحه p ، استوانه را مایل قطع کند، سطح مقطع حاصل یک بیضی است.



❖ اگر صفحه p ، عمود بر قاعده استوانه، استوانه را قطع کند، سطح مقطع حاصل، مستطیل است.



مکان هندسی

مجموعه نقاطی از صفحه یا فضا است که همه آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند **و** همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

مکان هندسی های مهم

قبلا در هندسه ۱ و۲ خواندیم:

1 عمود منصف یک پاره‌خط، مکان هندسی نقطه هایی نقطه‌هایی از صفحه است که از دو سر این پاره‌خط به یک فاصله‌اند.
(ویژگی مشترک: یکسان بودن فاصله نقطه از دو سر پاره خط)

2 نیمساز یک زاویه، مکان هندسی نقطه هایی در صفحه این زاویه است که فاصله آن‌ها از دو ضلع زاویه برابر است.

(ویژگی مشترک: یکسان بودن فاصله نقطه از دوضلع زاویه)

3 دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله شان از نقطه ثابتی به نام مرکز به یک فاصله است.

4 کره مکان هندسی نقاطی از فضاکه از یک نقطه ثابت به نام مرکز به یک فاصله است.

5 مکان هندسی نقاطی از صفحه که از سه نقطه غیرواقع بر یک خط به فاصله باشند، یک نقطه است.

این نقطه چه نقطه ای است؟

6 مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله معلوم باشد، دو خط در طرفین d است.

7 مکان هندسی نقاطی از فضا که از خط d به فاصله معلوم باشد، یک استوانه است.

8 مکان هندسی نقاطی از فضا که از صفحه p به فاصله معلوم باشد، دو صفحه موازی آن است.

نکته: برای مشخص کردن مکان هندسی باید سه مرحله را پیمود:

۱- به اندازه کافی نقاطی پیدا کنیم که تصوری شهودی از مکان مورد نظر پیدا کنیم.

۲- آن نقطه‌ها را به هم وصل کنید تا تصوری شهودی از مکان هندسی مورد نظر پیدا کنید.

۳- مکان هندسی را توصیف کنید.

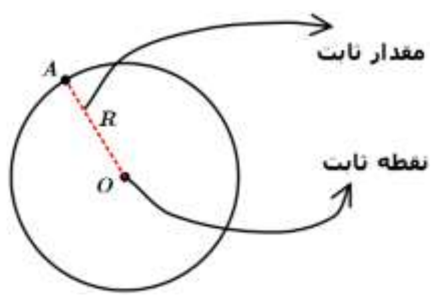
مثال۵ – خط d و دو نقطه B,A خارج از این خط در صفحه مفروضند، نقطه ای بیابید که از B,A به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر است.

مثال۶ – نقاط C,B,A در صفحه مفروض‌اند. نقطه ای بیابید که از B,A به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی متر باشد.

مثال۷ – نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

دایره

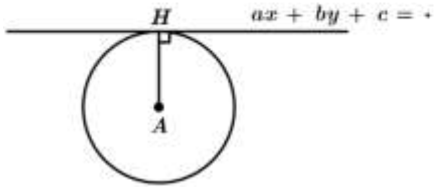
تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آنها از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) به فاصله ثابت(شعاع) باشد.



یادآوری : از قبل می‌دانیم فاصله نقطه $A(x_1,y_1)$ تا خط $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$AH=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

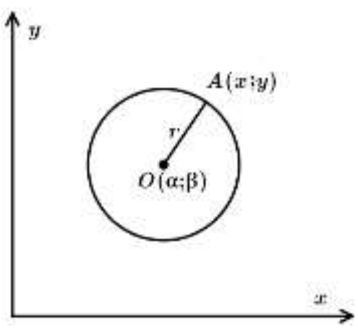
پس: اگر در مساله ای مرکز دایره ومعادله خط مماس بر دایره را داشته باشیم می‌توان از فرمول فوق اندازه شعاع را محاسبه کرد.



معادله دایره : فرض کنید C دایره ای باشد به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r

◈ معادله استاندارد دایره

برای نوشتن معادله ی این دایره فرض می‌کنیم نقطه دلخواه $A(x,y)$ نقطه ای روی دایره باشد. با دستور فاصله بین دو نقطه می‌توانیم بنویسیم : $OA=\sqrt{(x_A-x_O)^۲+(y_A-y_O)^۲}$



$$r==\sqrt{(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲}$$

$$\boxed{(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲}$$

به این معادله، **معادله استاندارد دایره** می‌گوییم.

❖مثال حل شده ۸ – معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(۲,-۴)$ و شعاع ۳ را بنویسید.

حل: از روی اطلاعات مساله داریم: $\alpha=۲\,,\beta=-۴$ و $R=۳$ پس: $(x-۲)^۲+(y-(-۴))^۲=۹$

مثال ۹ –معادله دایره ای بنویسید که نقاط دو سر قطر آن $A(۷,۴)\,,B(-۳,۸)$ باشد.

مثال –معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(۴,-۲)$ باشد و $(۳,۱)$ یکی از نقاط آن باشد.

📖مثال – مرکز و شعاع دایره ای به معادله $(x-۱)^۲+(y+۳)^۲=۸$ را بیابید.

📖مثال – شعاع دایره ای که از دو نقطه $(۳,۰),(۱,۲)$ گذشته و مرکز آن روی خط $y=۲x-۱$ باشد را بیابید. (سراسری ریاضی ۷۵)

📖مثال۱۲ – مرکز و شعاع دایره‌ی $x^۲+y^۲-۴x-۴y+۷=۰$ را به دست آورید.

📖مثال۱۳ – مساحت دایره ای به معادله $(x-۱)^۲+y^۲+۴y-۲=۰$ را بیابید.

◈ معادله گسترده (ضمنی) دایره

معادله ی $\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2}$ رامی‌توان با به توان رساندن به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ نوشت.

تذکر : در معادله ضمنی باید ضریب y^2, x^2 همواره <u>۱</u> باشد.

اگر بخواهیم مختصات مرکز و شعاع دایره به معادله ضمنی را در حالت کلی به دست بیاوریم و شبیه مثال های قبلی همواره مجبور نباشیم آن را به صورت مربع کامل بنویسم داریم:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \Rightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c=0$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

پس مرکز آن $\boxed{O\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)}$ و شعاع آن $\boxed{r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}}$ است.

به نظرتون این فرمول به هیچ دقت خاصی نیاز نداره؟؟؟؟

مثال۱۴ – کدام یک از روابط زیر می‌تواند معادله یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و طول شعاع را به دست آورید؟

الف) $x^2+y^2+2x-4y-4=0$

ب) $x^2+y^2-4x+6y+14=0$

ج) $x^2+y^2+2x-2y+2=0$

د) $4x^2+4y^2+16x-4y+1=0$

📖مثال – نمودار دایره‌ی $۲x^۲ + ax^۲ + ۸x - ۴y - ۸ = ۰$ را رسم کنید.

📖مثال – مقدار k را چنان بیابید که شعاع دایره به معادله زیر برابر ۲ باشد. $۲x^۲ + ۲y^۲ - ۴x - ۸y - k = ۰$

📖مثال – مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y + ۹ = ۰$ را به دست آورید.

📖مثال – حدود m را چنان بیابید که عبارت $x^۲ + y^۲ + (m-۱)x + ۲y + ۵ = ۰$ معادله یک دایره باشد؟

مثال – حدود m را چنان بیابید که عبارت $x^۲+y^۲+(m-۱)x+۲y+۵=۰$ معادله یک دایره باشد.

مثال – معادله دایره‌ی $x^۲+y^۲+۲x-۴y=۵$ را به صورت استاندارد بنویسید.

مثال – اگر $B(-۴,۱),A(۲,۳)$ دو سرقطر دایره ای باشند، معادله دایره را به صورت ضمنی بنویسید.

مثال – دایره‌ای از دو نقطه $(۰,۱)$, $(۳,۰)$ گذشته و معادله یک قطر آن به صورت $x-y=۲$ است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

◈ معادله پارامتری (مثلثاتی) دایره

میتوان معادله دایره را به صورت $\begin{cases} x=\alpha+R\sin\theta \\ y=\beta+R\cos\theta \end{cases}$ یا $\begin{cases} x=\alpha+R\cos\theta \\ y=\beta+R\sin\theta \end{cases}$ معادله دایره ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع R است. در معادله پارامتری دایره با تغییر θ از صفر تا ۲π نقاط دایره به دست می‌آیند.

در معادله پارامتری ضرایب $\sin\theta,\cos\theta$ با هم برابرند و این ضرایب برابر شعاع است.

📖مثال – شعاع انحنای منحنی حاصل از نقطه M به مختصات $M\left(\sqrt{۲}\cos\alpha,\sqrt{۲}\sin\alpha\right)$ وقتی α تغییر کند، کدام است؟ ۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) ۲　　۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　　۴) $\sqrt{۲}$

📖مثال – معادله دایره به مرکز $(۲,-۱)$ وطول قطر ۵ کدام است؟

۱) $۴x^۲+۴y^۲+۸x+۱۶y=۵$　　۲) $۴x^۲+۴y^۲-۸x-۱۶y=۵$

۳) $۴x^۲+۴y^۲+۲x+۴y=۲۰$　　۴) $۴x^۲+۴y^۲-۲x-۴y=۲۰$

📖مثال – معادله دایره ای به مرکز مبدا و گذرنده از نقطه $A(-۱,۲)$ کدام است؟

۱) $(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۲۵$　　۲) $x^۲+y^۲=۵$

۳) $(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۵$　　۴) $x^۲+y^۲=۲۵$

📖مثال – در دایره ای به مرکز $(-۲,۳)$ و قطر ۴ ، بیشترین مقدار y نقاط دایره از کم ترین مقدار x نقاط دایره چه‌قدر بیشتر است؟ ۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۹

📖مثال – اگر $(۱,۲)$ مرکز دایره $x^۲+y^۲-ax+۲by=۰$ باشد، $a+b$ را بیابید.

📖مثال – اگر شعاع دایره $ax^۲+y^۲+۲x+۴y=k$ برابر با ۲ باشد، k را بیابید.

📖مثال – دسته خطوط به معادلات $(m+۲)y+(m+۱)x+۱=۰$ قطرهای یک دایره اند. اگر این دایره از نقطه نقطه $(۵,۲)$ بگذرد شعاع را بیابید. (سراسری۸۳)

مثال – دایره ای از دو نقطه $(۰,۰),(۳,۱)$ گذشته و مرکز آن بر خط به معادله $y=۲x$ قرار دارد. شعاع این دایره کدام است؟ (تجربی خارج ۸۶)

۱) $\sqrt{۳}$		۲) ۲		۳) $\sqrt{۵}$		۴) ۳

مثال – فاصله نقطه متحرک $M(x,y)$ از نقطه $A(۱,۳)$ به اندازه $\sqrt{۲}$ برابر فاصله M تا نقطه $B(-۲,۴)$ است. شعاع مسیر حرکت M کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۶}$		۲) $۲\sqrt{۵}$		۳) ۵		۴) ۴

مثال – دایره ای از دو نقطه $(۰,۲),(۴,۰)$ گذشته و برمحور x ها مماس است.این دایره محور y ها را در نقطه دیگر با کدام عرض قطع می‌کند؟(ریاضی خارج ۸۵)

۱) ۵		۲) ۶		۳) ۷		۴) ۸

مثال – اگر دایره $x^۲+ax+y^۲-۴y=b$ در ربع اول بر هر دو محور مماس باشد، آنگاه $a+۲b$ چه‌قدر است؟

۱) -۱۶		۲) -۱۲		۳) -۸		۴) -۴

نوشتن معادله دایره با داشتن سه نقطه از آن

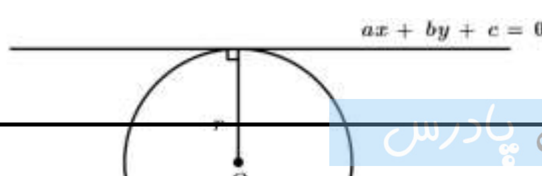
در این نوع سوالات کافی است معادله کلی دایره را به صورت گسترده بنویسیم و سپس مختصات سه نقطه را در آن جایگذاری کنیم. سپس با حل دستگاه و یافتن ضرایب c, b, a معادله دایره را به دست آورید.

در واقع در این نوع سوالات با داشتم سه رأس مثلث معادله دایره محیطی مثلث را مینویسیم.

مثال – معادله دایره ای را بنویسید که از سه نقطه $A(۴,۶), B(-۲,-۲), C(۵,-۱)$ بگذرد.

مماس بر دایره

❶ **خط مماس بر دایره :** در این حالت فاصله مرکز تا خط مماس برابر شعاع است. $O(\alpha,\beta)$

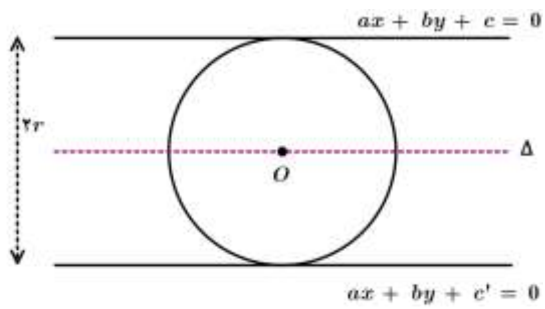


لطا

$$r=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$$

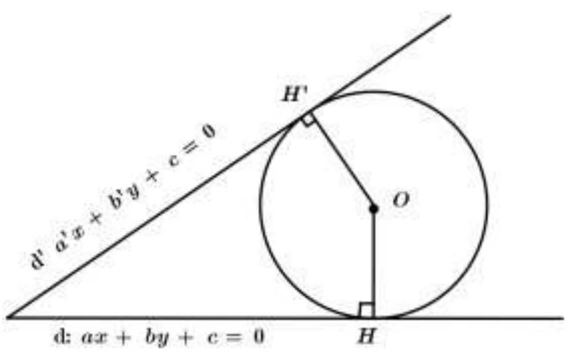
❷ **دایره مماس بر دو خط موازی** : در این حالت فاصله دو خط موازی برابر قطر دایره است و مرکز همواره روی خطی قرار دارد که موازی این دو خط است و به یک فاصله از این دو خط قرار دارد.

تذکر: فاصله دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر است با: $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$



$$۲r=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}\ ,\ \Delta: ax+by+\frac{c+c'}{۲}=۰$$

❸ **دایره مماس بر دو خط متقاطع** : در این حالت فاصله مرکز دایره را از دو خط را مساوی هم قرار می‌دهیم.



$$r=OH=OH'$$
$$\Rightarrow r=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}=\frac{|a'\alpha+b'\beta+c'|}{\sqrt{a'^{۲}+b'^{۲}}}$$

مثال –معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(-۲,۱)$ باشد و بر خط $۳x-۴y=۹$ مماس باشد.

📖مثال – معادله دایره ای را بنویسید که خطوط $x+y=۱\,,\ x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=-۵$ بر آن مماس باشد. (خرداد ۹۸ نهایی)

📖مثال – در نقطه $A(۲,۳)$ روی دایره $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی رسم کرده ایم. معادله این خط مماس را به دست آورید.(خرداد۹۸ نهایی)

📖مثال – معادله دایره ای که $mx+(m-۱)y=۲$ معادله کلیه اقطار آن باشد و بر خط به معادله $۳x-۴y=۸$ مماس باشد.

📖مثال – مرکز دایره ای بر روی نیمساز ناحیه اول است. اگر این دایره از نقطه $(۶,۳)$ گذشته و بر خط $y=۲x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟

مثال – معادله دایره ای را بنویسید که بر خط های به معادلات $y = x - ۱, y = x + ۳$ مماس بوده و طول مرکزش برابر ۱ باشد.

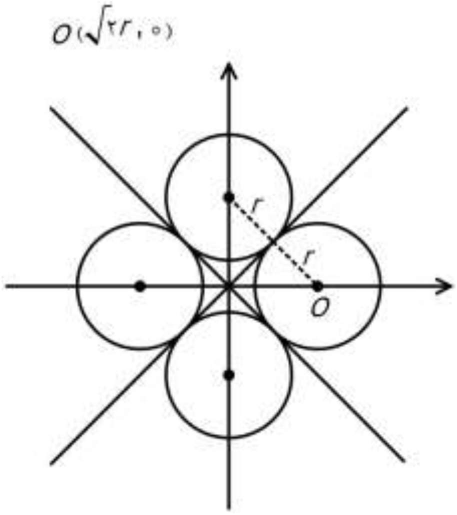
مثال – دایره ای از دونقطه $(۴,۰),(۰,۲)$ گذشته و بر محور x ها مماس است. این دایره محور y ها را در نقطه ای دیگر با کدام عرض قطع می‌کند؟

نکته: اگر دایره ای بر نیم‌سازهای محورهای مختصات مماس باشد

مرکز دایره همواره روی محورهای مختصات می‌افتد و اگر مرکز دایره

روی محور x ها باشد $|\alpha| = \sqrt{۲}r$ و اگر مرکز دایره روی محور y ها

باشد $|\beta| = \sqrt{۲}r$

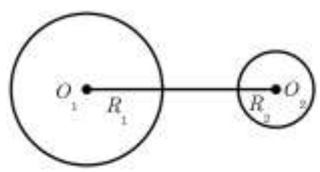


مثال – معادله دایره ای را بنویسید که بر نیمسازهای ربع اول و دوم مماس باشد و شعاع آن $۲\sqrt{۲}$ باشد.

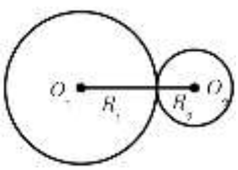
اوضاع نسبی دو دایره در صفحه

اگر دایره $C_1(O_1,R_1), C_2(O_2,R_2)$ در صفحه ای مفروض باشند این دودایره نسبت به هم یکی از حالت های زیر را دارند.

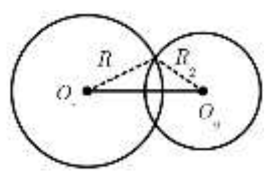
متخارج ❶ $O_1O_2 > R_1 + R_2$



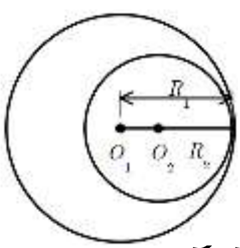
مماس بیرون ❷ $O_1O_2 = R_1 + R_2$



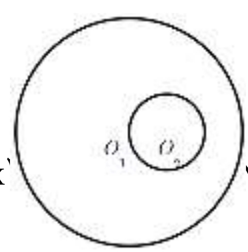
متقاطع ❸ $|R_1 - R_2| < O_1O_2 < R_1 + R_2$



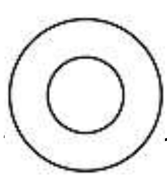
مماس درونی ❹ $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$



متداخل ❺ $O_1O_2 < |R_1 - R_2|$



هم مر ❻ $O_1O_2 =$



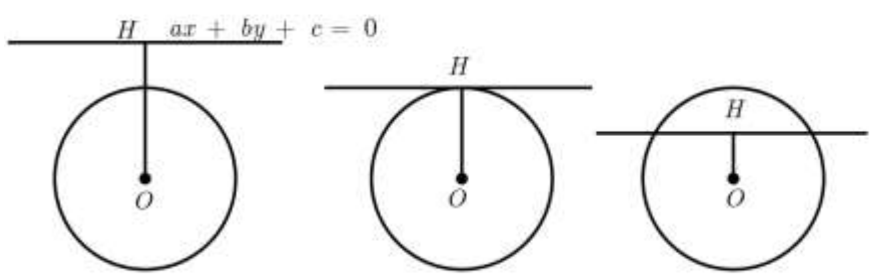
مثال – دودایره x^2 ... $4=0$ و $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ نس... وضعیتی دارند؟

مثال – به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4y + b = 0$ مماس داخل هستند؟

مثال – معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(-1,1)$ بوده و بر دایره ای به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ مماس خارج باشد.

نکته: یک خط $ax + by + c = 0$ و دایره $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ نسبت به هم سه وضعیت دارند:

$$OH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$OH > R$ $\qquad$ $OH = R$ $\qquad$ $OH < R$

مثال –به ازای کدام مقدار a دایره به معادله $x^2 + y \;\; - 2x + 4y + a = 0$ بر خط $x + 3y = 0$ مماس است؟

سراسری تجربی ۸۵

مثال – اگر خط $y-۲x+m=۰$ و دایره C به معادله $x^۲+y^۲-۲x+۴y=۰$ متقاطع باشند، آنگاه حدود m کدام است؟

مثال –در نقطه $A(۲,۷)$ روی دایره $x^۲+y^۲-۴x-۶y=۳$ مماسی بر آن رسم کرده ایم. معادله این مماس را به دست آورید.

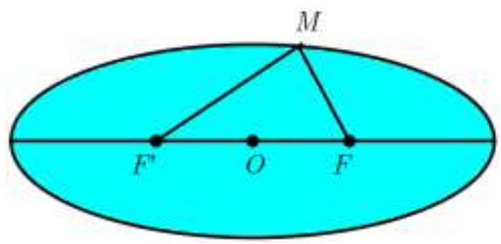
نکته : اگر از نقطه M خارج دایره بر دایره دو مماس رسم کنیم برای یافتن طول مماس رسم شده کافی است مختصات نقطه را در معادله دایره جایگزین کنیم.

مثال – از نقطه $M(۴,۲)$ مماس بر دایره $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۴=۰$ رسم می‌کنیم، طول مماس را به دست آورید.

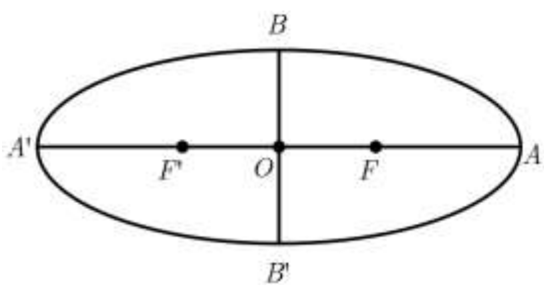
بیضی

تعریف : مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت و متمایز F', F در آن صفحه، مقدار مثبت ثابتی باشد.

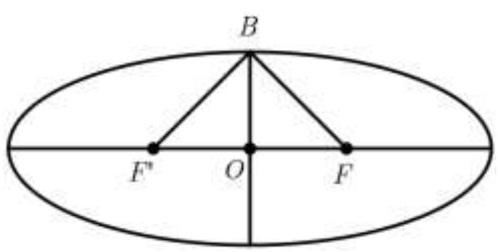
$$MF + MF' = 2a$$



1. این نقطه ثابت را کانون می‌نامیم.
2. فاصله ی دو کانون را فاصله کانونی می‌گوییم و با $2c$ نشان می‌دهیم.
3. وسط FF' را با O نشان می‌دهیم و مرکز بیضی نام دارد.
4. در شکل روبرو AA' را قطر بزرگ و نقاط A, A' را رئوس کانونی و BB' را قطر کوچک بیضی و نقاط B, B' را رئوس ناکانونی می‌نامیم.



5. می‌دانیم $MF + MF' = 2a$ حال طبق شکل روبرو اگر M روی B بیفتد داریم:



$$BF + BF' = 2a \xrightarrow{BF=BF'} BF = BF' = a$$

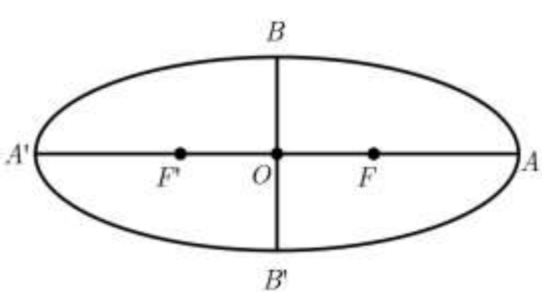
از قبل می‌دانیم: $FF' = 2c \to OF = c$

و $BB' = 2b \to OB = b$

پس با فیثاغورث داریم: $BF^2 = OB^2 + OF^2 \to \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

6. مختصات رئوس وکانون ها:

الف) بیضی افقی



$$B\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta + b\end{bmatrix}$$

$$A'\begin{bmatrix}\alpha - a \\ \beta\end{bmatrix}, F'\begin{bmatrix}\alpha - c \\ \beta\end{bmatrix}, O\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix}, F\begin{bmatrix}\alpha + c \\ \beta\end{bmatrix}, A\begin{bmatrix}\alpha + a \\ \beta\end{bmatrix}$$

ب) بیضی عمودی

$$B'\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta-b\end{bmatrix}$$

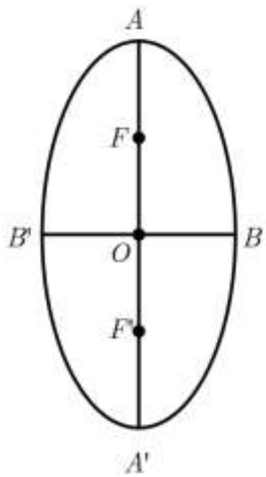
$$A\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta+a\end{bmatrix}$$

$$F\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta+c\end{bmatrix}$$

$$B'\begin{bmatrix}\alpha-b\\ \beta\end{bmatrix},O\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix},B\begin{bmatrix}\alpha+b\\ \beta\end{bmatrix}$$

$$F'\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta-c\end{bmatrix}$$

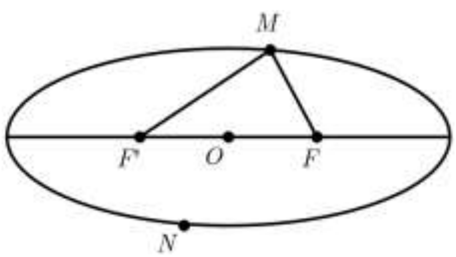
$$A'\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta-a\end{bmatrix}$$



7 خروج از مرکز بیضی : در هر بیضی نسبت $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز گوییم و میزان کشیدگی یک بیضی را نشان می‌دهد و همواره $۰<\frac{c}{a}<۱$ اگر خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود شکل به دایره نزدیک می‌شود.

8 فاصله یک رأس کانونی از یک رأس ناکانونی برابر است با : $\sqrt{a^۲+b^۲}$

مثال – در بیضی شکل مقابل F,F' کانون ها هستند. اگر $MF=۳$ و باشد حاصل $NF+NF'$ را بیابید.



مثال – اگر طول قطر کوچک بیضی $۴\sqrt{۲}$ و فاصله کانون تا نزدیک ترین رأس ۲ باشد خروج از مرکز بیضی را بیابید.

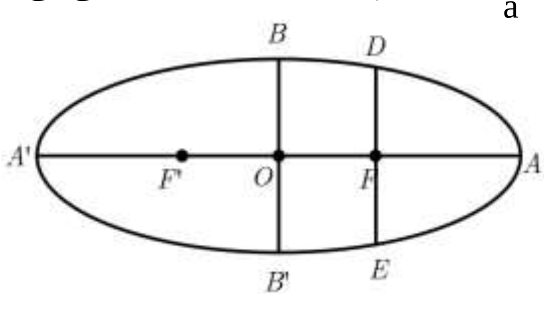
مثال – قطر کوچک بیضی ، نصف قطر بزرگ آن است. خروج از مرکز را بیابید.

مثال – یک بیضی بر خطوط $y=۶, y=-۴, x=۵, x=-۱$ مماس است. مختصات کانون F ومرکز O را بیابید.

نکته: کم‌ترین فاصله نقاط بیضی از کانون برابر $a-c$ و بیشترین فاصله نقاط بیضی از کانون برابر $a+c$ است.

مثال – فاصله یک رأس ناکانونی بیضی از کانون و رأس کانونی به ترتیب $\sqrt{۵}, ۲$ است، بیشترین فاصلهٔ نقطهٔ $M(x,y)$ روی بیضی از یکی از کانون های بیضی کدام است؟

نکته : اگر مرکز یک بیضی برمبدا مختصات و قطرهای آن برمحورهای مختصات منطبق باشد، طول وتری که بر از کانون گذشته و بر قطر بزرگ عمود است برابر است با: $DE=\frac{۲b^۲}{a}$ پاره خط DE را وتر کانونی می‌گوییم.



مثال – طول وتر کانونی مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه $F'(۲,۲), F(۲,-۴)$ برابر ۸ باشد، چقدر است؟

مثال – اگر $F(۴,۲), F'(-۲,۲)$ کانون های یک بیضی باشند و $A(۶,۲)$ یک رأس آن است. خروج از مرکز بیضی را بیابید.

مثال – $B\left(۱-\frac{۲}{\sqrt{۳}},۰\right), B'\left(۱+\frac{۲}{\sqrt{۳}},۰\right)$ رئوس ناکانونی بیضی هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ باشد، مجموع فواصل نقطهٔ P روی بیضی از دوکانون بیضی کدام است؟

مثال – در یک بیضی طول قطرها ۸ و ۶ واحد بوده و مرکز بیضی روی مبدأ مختصات می‌باشد.

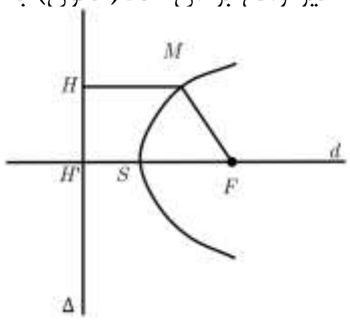
الف) خروج از مرکز بیضی را تعیین کنید

ب)معادلات دایره های محاطی و محیطی بیضی را بنویسید.

نکته: خاصیت انعکاس نور در بیضی: اگر از یکی از کانون های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی تابانده شود، انعکاس نور از کانون دیگر خواهد گذشت.

سهمی

تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت (خط هادی) و یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط(کانون) به یک فاصله‌اند. $|MF| = |MH|$



نکات مهم: نقطه F را کانون و S را رأس سهمی و خط Δ را خط هادی و خط d که از S, F می‌گذرد و بر خط هادی عمود است را محور تقارن یا محور سهمی می‌نامیم.

نکته: فاصله ی کانون تا رأس یعنی $|FS|$ و راس تا خط هادی یعنی $|SH'|$ را با $|a|$ نمایش می‌دهیم

نکته: فاصله کانون تا خط هادی $۲|a|$ است.

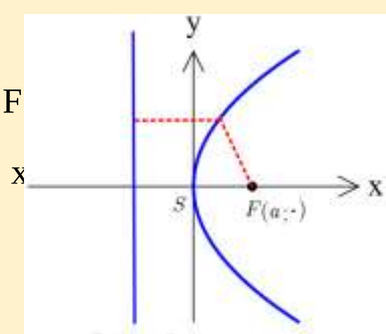
نکته : اگر دهانه سهمی به سمت قسمت مثبت یا منفی محور طولها باشد سهمی را **افقی** و اگر دهانه آن به سمت بالا یا پایین باشد آن را سهمی **قائم** می‌گوییم. سهمی خوانده شده در سال دهم و یازدهم از نوع سهمی قائم بودند.

❖ درابتدا فرض می‌کنیم رأس سهمی روی مبدا مختصات باشد.چهارنوع سهمی داریم:در تمام حالتهای زیر $a > ۰$ است.

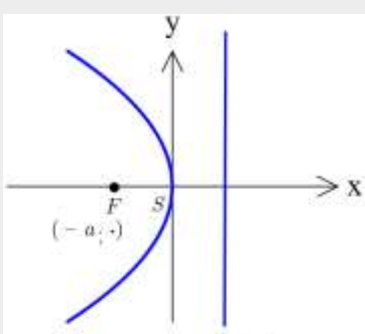
$y^۲ = ۴ax$ سهمی افقی

F

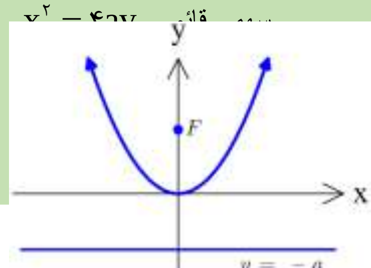
x



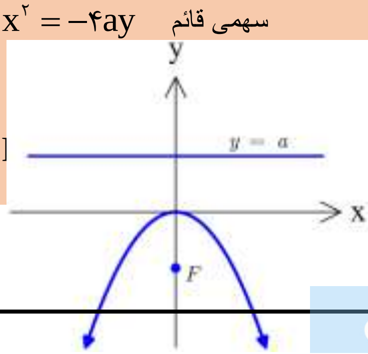
$y^۲ = −۴ax$ سهمی افقی



$x^۲ = ۴ay$ سهمی قائم



$x^۲ = −۴ay$ سهمی قائم



لطفا بدون حل تمرین

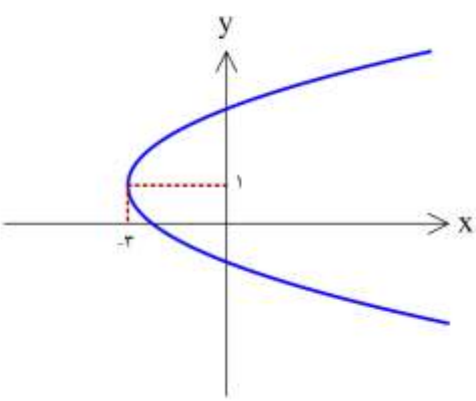
خط هادی $y=-a$	خط هادی $y=a$

❖حال سوال اساسی اینجاست که اگر رأس سهمی روی مبدا نباشد چه کنیم؟

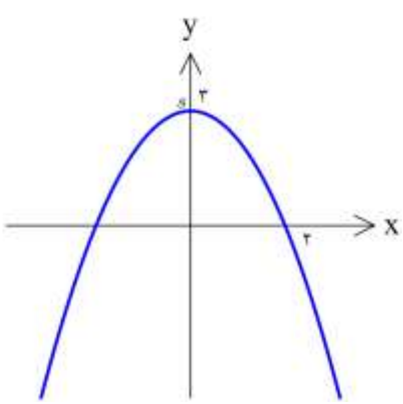
از سال قبل با انتقال های افقی و عمودی آشنا هستیم. طبق انتقال ها می‌توان برای هر سهمی با هر رأسی معادله ی مناسب نوشت. فرض کنیم مبدا سهمی روی نقطه (α,β) قرار دارد.

دهانه سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادله سهمی
رو به راست(افقی)	$y=\beta$	$x=\alpha-a$	$F(\alpha+a,\beta)$	$(y-\beta)^۲=۴a(x-\alpha)$
رو به چپ(افقی)	$y=\beta$	$x=\alpha+a$	$F(\alpha-a,\beta)$	$(y-\beta)^۲=-۴a(x-\alpha)$
رو به بالا (قائم)	$x=\alpha$	$y=\beta-a$	$F(\alpha,\beta+a)$	$(x-\alpha)^۲=۴a(y-\beta)$
رو به پایین (قائم)	$x=\alpha$	$y=\beta+a$	$F(\alpha,\beta-a)$	$(x-\alpha)^۲=-۴a(y-\beta)$

📖مثال – معادله سهمی شکل زیر را بنویسید.



📖مثال –



📖مثال – نقطه $S(۱,۲)$ رأس سهمی و خط $y=-۱$ خط هادی آن است. معادله سهمی را بنویسید.

📖مثال – معادله سهمی را به دست آورید که $F(۲,۳)$ کانون و خط به معادله $X=-۴$ خط هادی آن باشد.

📖مثال – معادله سهمی را بنویسید که $S(۱,-۱)$ رأس آن و $F(۳,-۱)$ کانون آن باشد.

📖مثال – معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط $x=-۱$ و نقطه $A(-۳,۲)$ به یک فاصله هستند، کدام است؟

📖مثال – مختصات کانون و معادله خط هادی سهمی به معادله $(x+۴)^۲=-۸(y+۲)$ را تعیین نموده و نمودار آن را رسم کنید.

مثال – ثابت کنید هرگاه از کانون سهمی خطی بر محور سهمی عمود رسم شود، فاصله نقاط تلاقی سهمی با محور تقارن سهمی برابر با مقدار ثابت $۲|a|$ است.

نکته: به خطی که از کانون سهمی بر محور سهمی عمود رسم شود وتر کانونی سهمی می‌گوییم و طول پاره خط ایجاد شده، همواره مقدار ثابت $۴|a|$ است.

مثال – اگر یک سهمی قائم رو به بالا باز شود و دو سر وتر کانونی آن $B(۳,۲), A(-۱,۲)$ باشند، معادله سهمی کدام است؟

مثال – معادله سهمی را بنویسید که خط هادی آن به معادله $x=۰$ و محور آن به معادله $y=۳$ بوده و از نقطه $A(۲,۵)$ عبور کند.

مثال – سهمی با کانون $F(۱,۱)$ و خط هادی $x=۳$ محور y ها را در دو نقطه B, A قطع می‌کند. فاصله B, A چقدر است؟

در تمام قسمت های توضیح داده ی فوق معادله سهمی به صورت استاندارد بود. حال می‌خواهیم ببینیم اگر معادله سهمی را به صورت دیگری داشتیم چگونه می‌توانیم آن را به صورت استاندارد درآوریم.

کافی است با مربع کامل کردن معادله را استاندارد کنیم. همواره سعی کنید متغیری که توان ۲ دارد دارای ضریب ۱ شود. سپس آن متغیر را مربع کامل کرده و بقیه را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم. اکنون کافی است از ضریب متغیر دیگر در سمت دیگر تساوی فاکتور بگیریم.

مثال حل شده : معادله ی $x^۲+۴y+۲x+۹=۰$ را استاندارد کرده و مختصات رأس و کانون و معادله خط هادی را بنویسید.

ابتدا قسمتی که توان ۲ دارد را مربع کامل می‌کنیم(دقت کنید که این متغیر ضریب ۱ دارد)

$$x^۲+۲x+۴y+۹=۰ \to (x+۱)^۲-۱+۴y+۹=۰$$

$$\to (x+۱)^۲=-۴y-۸$$

چون x توان ۲ دارد پس سهمی قائم است.

$$\to (x+۱)^۲=-۴(y+۲)$$

$$-۴a=-۴ \to a=۱$$

$$S\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \to s\begin{bmatrix}-۱\\ -۲\end{bmatrix}$$

$$y=\beta+a \to y=-۲+۱=-۱$$

$$F\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta-a\end{bmatrix} \to F\begin{bmatrix}-۱\\ -۲-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\ -۳\end{bmatrix}$$

مثال – مختصات رأس و کانون سهمی $y^۲=۲x-۴y$ و همچنین نقاط برخورد سهمی با محور های مختصات را بیابید و ان را رسم کنید.

مثال – معادله یک سهمی را بنویسید که رأس آن مبدامختصات و محور x ها محور تقارن آن باشد و از نقطه $(-۲,-۴)$ عبور کند.

مثال – سهمی $y^۲ = ۴x - ۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل تلاقی سهمی و دایره را بیابید.

مثال – الف) نمودار $y^۲ - ۲y + ۸x + ۹ = ۰$ را رسم کنید

ب) معادله سهمی را بنویسید که $A(۲,۱)$ رأس و $F(۲,۵)$ کانون آن باشد. سپس معادله خط هادی را بنویسید.

مثال – در سهمی به معادله $۳x^۲+۴y-۶x+۱۱=۰$ معادله خط هادی را بیابید. (سراسری۸۸)

مثال – مقدار m را طوری بیابید که طول نقطه رأس سهمی $۲y^۲+۴y-x+m=۰$ برابر $\frac{۱۷}{۸}$ شود.

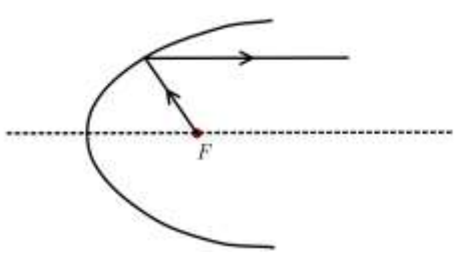
مثال – ضرایب b,a را طوری بیابید که نقطه $(-۱,-۲)$ رأس سهمی $x=y^۲+ay+b$ باشد.

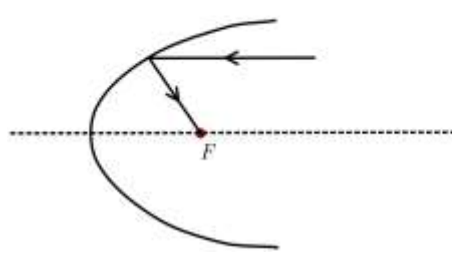
مثال – به ازای کدام مقدار a کانون سهمی به معادله $2y^2+ay-3x=0$ روی محور y هاست؟ (تجربی ۹۱)

مثال – به ازای کدام مقدار a کانون سهمی $y^2-ay-3x=\frac{a^2}{2}$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم است؟

ویژگی بازتابندگی سهمی و کاربردهای آن

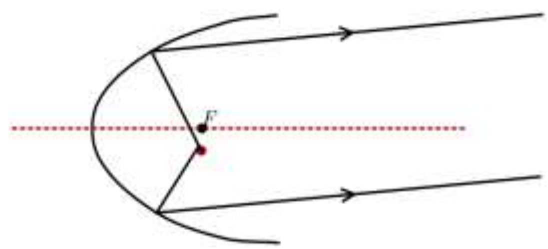
1 هر شعاع نوری که از کانون به بدنه سهمی بتابد ، بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت. و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی بتابد ، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.



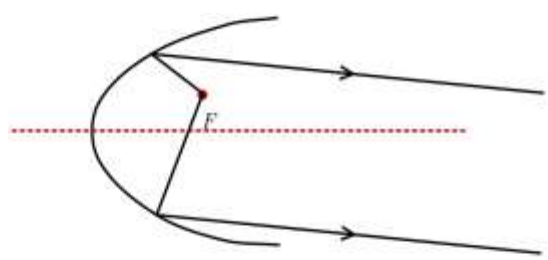


از این خاصیت در چراغ جلوی ماشین ها استفاده می‌شود. و لامپ در کانون قرار می‌گیرد. در این صورت تمام پرتوها به جداره می‌خورند و موازی محور خارج می‌شوند ونور بیشتری تولید می‌شود

❷ اگر لامپ در همان راستای کانون اما کمی پایین تر قرار گیرد هم چیزی شبیه خاصیت قبل را دارد و باز هم پرتو های ایجاد شده موازی خارج میشوند اما از راستای قبلی بالاتر خارج میشوند که اصطلاحا نور بالا می‌گوییم.



❸ اگر لامپ در همان راستای کانون اما کمی بالاتر قرار گیرد هم چیزی شبیه خاصیت اول را دارد و باز هم پرتو های ایجاد شده موازی خارج میشوند اما از راستای قبلی پایین تر خارج میشوند که اصطلاحا نور پایین می‌گوییم.



مثال – پرتوهای تابش موازی محور y ها به سهمی $x^{۲}-x-y=۰$ می‌تابند. پس از بازتاب در کدام نقطه متقاطعند؟

مثال – دو اشعه که به موازات محور x ها بر سهمی به معادله $y^{۲}-۲y+۴x=۱۱$ می‌تابند. پس از بازتاب در کدام نقطه متقاطع‌اند؟سراسری تجربی ۸۶

📖مثال – یک اشعه نورانی را در امتداد خط $x=3$ و اشعه دیگر را در امتداد خط $x=-1$ ، از داخل سهمی به معادله $x^2-2x-4y+9=0$ بر آن می‌تابانیم. مختصات نقطه تلاقی بازتاب این دو پرتو کدام است؟ سراسری تجربی ۸۹

📖مثال – خط هادی یک سهمی به معادله $x=\frac{13}{4}$ است. هرپرتویی که از نقطه $\left(-2,\frac{-5}{4}\right)$ بر این سهمی بتابد، در امتداد محور x ها باز می‌تابد، این سهمی محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ سراسری تجربی۹۴

📖مثال – نقطه $S(-1/6,-1)$ رأس سهمی است. هر پرتو که موازی محور x ها بر این سهمی بتابد به نقطه $(-1,0/9)$ باز می‌تابد. این سهمی محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ سراسری تجربی ۹۴

📖مثال – از کانون سهمی به معادله $y^2+2y-6x+4=0$ یک پرتو به طرف رأس سهمی میتابد. اگر شیب این پرتو ۱ باشد، معادله بازتاب آن کدام است؟