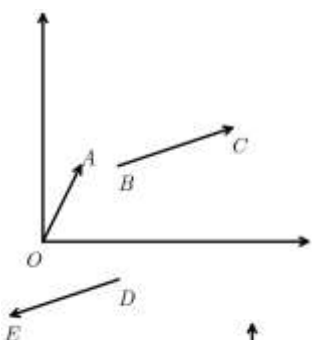
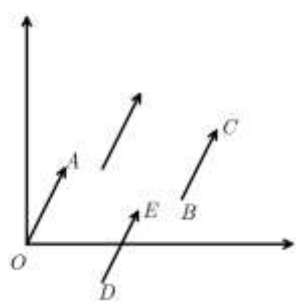
بردارها در R^2

هر پاره خط جهت دار را یک پیکان می نامیم. در کتاب درسی هندسه ۳ منظور از بردار، پیکانی است که ابتدای آن مبدا مختصات باشد، وگرنه آن را بردار نمی نامیم و به پیکان جهت دار اکتفا می کنیم.

تمام اینها پیکان هستند اما فقط OA بردار است.



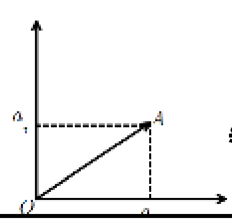
❖اصولا بردارها را با حروف کوچک نشان می دهیم: $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$



دو بردار مساوی

بردارهای $\vec{b},\vec{a}$ را مساوی گوییم هرگاه اندازه و جهت آنها یکی باشد.

دقت کنید که دو بردار مساوی از یک نقطه شروع نمیشوند

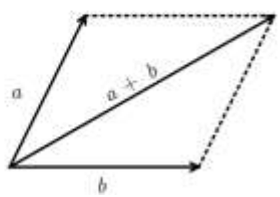


ولی میتوان هر بردار را با بردار مساوی آن که از مبدا شروع میشود یکی دانست.

بردار را میتوان با زوج مرتب متناظر آن نشان داد: $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_۱, a_۲)$

طول بردار $\overrightarrow{OA}$ = $\sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲}$

جمع دو بردار



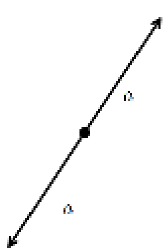
اگر $\vec{a} = (a_۱, a_۲)$ و $\vec{b} = (b_۱, b_۲)$ دو بردار باشند مجموع آنها به صورت زیر تعریف می شود:

جمع به روش متوازی الاضلاع $\overrightarrow{a+b} = (a_۱ + b_۱, a_۲ + b_۲)$

ضرب عدد در بردار

درواقع $r\vec{a}$ برداری است که طول آن $|r|$ برابر طول بردار a است و $r\vec{a} = (ra_۱, ra_۲)$

اگر $r > ۰ \leftarrow$ هم جهت با $\vec{a}$ اگر $r < ۰ \leftarrow$ خلاف جهت $\vec{a}$

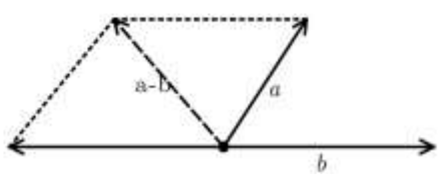


قرینه یک بردار

اگر $r = -۱$ باشد بردار $(-۱)\vec{a}$ را که هم طول $\vec{a}$ است و خلاف جهت $\vec{a}$ است

را قرینه بردار $\vec{a}$ می نامیم و با $-\vec{a}$ نمایش می‌دهیم.

تفاضل دو بردار



از آنجایی که می‌دانیم: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ پس با روش متوازی‌الاضلاع

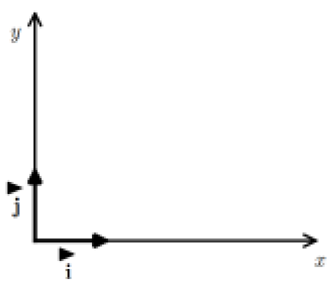
جمع دوبردار $\vec{a}, -\vec{b}$ همان $\vec{a} - \vec{b}$ است.

نکته: همان طور که در شکل معلوم است، متوازی الاضلاعی که دو ضلع آن بردارهای b,a باشد، قطرهای آن $\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+\vec{b}$ است.

بردار یکه: هر برداری که طول آن ۱ باشد را بردار یکه یا واحد می‌گوییم. $\vec{a}$ یکه است $\Leftrightarrow$ $|\vec{a}|=1$ اگر $\overrightarrow{AB}$ برداری در صفحه مختصات باشد، $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

تا اینجا یادآوری بردارها در فضای R^2 بود.

بردارها در فضای R^3



اگر $A(a_1,a_2,a_3)$ نقطه ای غیرصفر در فضای R^3 باشد، پاره خط جهت داری که ابتدای آن O و انتهای آن A باشد را یک بردار می‌گوییم. $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$

اندازه بردار $\vec{a}$ به صورت $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ تعریف می‌شود.

اگر $A(a_1,a_2,a_3)$ و $B(b_1,b_2,b_3)$ دو نقطه در فضا باشند، داریم: $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$

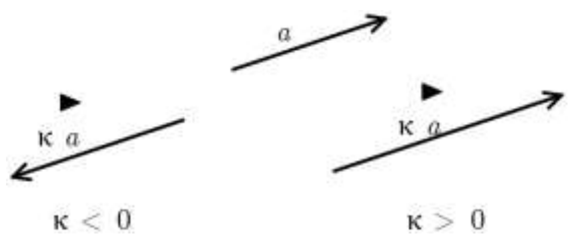
واندازه بردار $\overrightarrow{AB}$ به صورت : $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$ می باشد.

ضرب عدد در بردار

اگر $\vec{a}(x,y,z)$ برداری در فضای R^3 و k عددی حقیقی باشد، بردار $k\vec{a}$ برداری است موازی $\vec{a}$ و داریم:

$$k\vec{a}=(kx,ky,kz)$$

دقت کنید در صورتی دو بردار موازی هستند که یکی از حالتهای زیر باشد:



یعنی یکی از بردارها مضرب دیگری است.

پس $\vec{a}(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}(b_۱,b_۲,b_۳)$ موازیند، اگر و تنها اگر $\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\frac{a_۳}{b_۳}$

مثال ۱ : بردارهای $\vec{a}(m-۱,۱,n+m)$ و $b(۰,-۲,-۴)$ موازیند، $n-m$ را بیابید.

مثال ۲ : اگر دو بردار $\vec{v}_۱(۲,۱,m+۱)$, $\vec{v}_۲(-۱,۲k,۱)$ موازی باشند، m,k کدام است؟

الف) $m=-۳,k=-\frac{۱}{۴}$ ب) $m=۳,k=\frac{۱}{۴}$

پ) $m=-۳,k=\frac{۱}{۴}$ ت) $m=۳,k=-\frac{۱}{۴}$

مثال ۳ : اگر نقاط $M(۱,-۲,۲),N(۰,-۳,۳),P(۴,a,b)$ روی یک خط راست باشند، $a+b$ را بیابید.

⌛مثال ۴ : اگر $c(0,1,-1), b(1,-1,2), a(2,-1,0)$ و داشته باشیم : $\alpha a+\beta b+\gamma c=(4,-4,5)$ حاصل $3\alpha+2\beta-\gamma$ کدام است؟

الف) صفر ب) ۲ پ)۶ ت)۸

⌛مثال ۵ : اگر $\vec{a}(2,-1,3)$ و بردار b به طول $\sqrt{56}$ موازی و غیر هم جهت با بردار a باشد، مجموع مولفه های بردار b کدام است؟

الف) ۸ ب)۸- پ)۱۶ ت)۱۶-

⌛مثال ۶ : اگر بردارهای $b(1,2,-2), a(2,1,-2)$ دو ضلع یک مثلث باشند، محیط این مثلث را بیابید.

⌛مثال۷ : اگر بردارهای $b(-۲,۰,۳),a(۲,۳,۱)$ دوضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع باشد، طول قطرکوچک این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

⌛مثال۸ : طول ضلع سوم مثلثی که بر دو بردار $\vec{b}(۵,-۱,۶),\vec{a}(۷,۳,۲)$ بنا می‌شود چقدر است؟

⌛مثال۹: اگر بردار $|\vec{b}|=\sqrt{۴۱}$ و $\vec{a}(m,۲,-۱)$ و دو بردار $a-b,a+b$ بر هم عمود باشند مقدار مثبت m کدام است؟

الف) ۳ ب)۴ پ)۵ ت)۶ سراسری ۸۵

⌛مثال ۱۰ : دو بردار $\vec{b}\left(۲,۰,-۱\right),\vec{a}(۱,\alpha+۱,۲\alpha)$ مفروض اند. به ازای کدام مقدار α بردارهای $a-b,a+b$ برهم عمودند؟ سراسری ۸۹

الف)۰/۶ و ۱- ب) ۰/۴ و ۱- پ) ۰/۴ و ۱ ت) ۰/۳ و ۱-

بردارهای یکه در $R^۳$

برداری که طول آن یک باشد را بردار یکه میگوییم. بردارهای یکه محورهای z, y, x را به ترتیب $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ می نامیم.

$$\vec{k}(۰,۰,۱)\ ,\ \vec{j}(۰,۱,۰)\ ,\ \vec{i}(۱,۰,۰)$$

هربرداری با مختصات $\vec{a}(x,y,z)$ را میتوان به صورت $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ نشان داد.

مثال: بر روی بردارهای $۲\sqrt{۲}\vec{k}, -۲\vec{j}, -۶\vec{i}$ یک مکعب مستطیل ساخته شده است. فاصله مرکز مکعب مستطیل تا مبدا مختصات چقدر است؟

الف) ۳　　ب) $۲\sqrt{۳}$　　پ) ۴　　ت) $۴\sqrt{۳}$

نکته: مرکز مکعب مستطیلی که روی سه بردار $\alpha\vec{i}$ و $\beta\vec{j}$ و $\gamma\vec{k}$ ساخته میشه $\left(\frac{\alpha}{۲}, \frac{\beta}{۲}, \frac{\gamma}{۲}\right)$ است.

مثال ۱۱ : اگر نقاط $A(۱,۲,۱), B(۰,۲,۰), C(۰,۰,۱)$ و مبدا مختصات رئوس یک مکعب مستطیل باشند، فاصله مرکز مکعب مستطیل تا محور y ها چقدر است؟

الف) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　　ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$　　پ) $\frac{۱}{۲}$　　ت) $\frac{۱}{۴}$

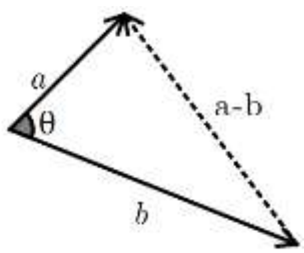
⌛مثال۱۲ : اگر دو بردار $\vec{a}=۲\vec{i}-\vec{j}+۳\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+۲\vec{j}+۴\vec{k}$ دو ضلع مجاور یک مثلث باشند، طول ضلع سوم مثلث برابر است با:

الف) $\sqrt{۱۰}$ ب) $\sqrt{۱۱}$ پ) $\sqrt{۱۲}$ ت) $\sqrt{۱۳}$

⌛مثال۱۳ : اگر $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}+\vec{k}\,,\,\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ، حاصل $\dfrac{|\vec{a}-۲\vec{b}|}{|\vec{a}+۲\vec{b}|}$ کدام است؟ آزاد ریاضی ۸۱

الف) ۱ ب) $\sqrt{۶}$ پ) $\dfrac{\sqrt{۶}}{۶}$ ت) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

ضرب داخلی بردارها در $R^{۲}$



فرض کنید $\vec{a}(a_۱,a_۲)$, $\vec{b}(b_۱,b_۲)$ دو بردار باشند. طبق شکل روبرو داریم:

(قضیه کسینوس ها)

$$|a-b|^{۲}=|a|^{۲}+|b|^{۲}-۲|a||b|\cos\theta$$

$$۲|a||b|\cos\theta=|a|^{۲}+|b|^{۲}-|a-b|^{۲}$$

$$۲|a||b|\cos\theta=a_۱^{۲}+a_۲^{۲}+b_۱^{۲}+b_۲^{۲}-\left[(a_۱-b_۱)^{۲}+(a_۲-b_۲)^{۲}\right]$$

$$۲|a||b|\cos\theta=۲a_۱b_۱+۲a_۲b_۲$$

$$\cos\theta=\frac{a_۱b_۱+a_۲b_۲}{|a||b|}$$ فرمول محاسبه زاویه بین دو بردار

صورت کسر فوق را ضرب داخلی $\vec{b},\vec{a}$ می نامند و با $\vec{a}.\vec{b}$ نمایش می دهند.

پس داریم: $\boxed{\vec{a}.\vec{b}=|a||b|\cos\theta=a_۱b_۱+a_۲b_۲}$

با تبدیل b به $-b$ در رابطه فوق داریم: $\boxed{|a+b|^{۲}=|\vec{a}|^{۲}+|\vec{b}|^{۲}+۲\vec{a}.\vec{b}}$

تذکر خیلی خیلی مهم : حاصل ضرب داخلی دو بردار ، یک عدد حقیقی است.

ضرب داخلی در فضای $R^{۳}$

اگر $\vec{a}(a_۱,a_۲,a_۳)$, $\vec{b}(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار در فضای $R^{۳}$ باشند، ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می شود.

$$\vec{a}.\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$$

و همچنین اگر θ زاویه بین دو بردار باشد، $\vec{a}.\vec{b}=|a||b|\cos\theta$

نکته: اگر یکی از دو بردار $\vec{a}$ یا $\vec{b}$ صفر باشد $\vec{a}.\vec{b}=0$ ولی برعکس آن برقرار نیست.

مثال ۱۴ : حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}(2,1,3)$ و $\vec{b}(5,3,n)$ برابر ۷ است. n کدام است ؟

مثال ۱۵ : اگر دو بردار $\vec{b},\vec{a}$ زاویه 30° بسازد و $|a|=2\sqrt{2}$ و $\vec{b}(2,-2,4)$ حاصل ضرب داخلی دو بردار را بیابید.

مثال۱۶ : اگر $\vec{a}=2i-j+2k$ و $\vec{b}=i-j$ ، زاویه بین دو بردار چقدر است ؟

مثال ۱۷ : اگر اندازه دو بردار $v_1=2i+(a+1)j+4k$ و $v_2=ai+4j+3k$ برابر باشند، کسینوس زاویه بین دو بردار چند است؟

⌛مثال۱۸: اگر $\vec{a}=۲i+۳j+k$ و $\vec{b}=i-j+k$ کسینوس زاویه بین دو بردار $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}$ را بیابید.

⌛مثال ۱۹ : سه بردار $\vec{a}(۱,-۱,a)$, $\vec{b}(۲,b,۱)$, $\vec{c}(c,۳,۲)$ دو بدو عمود بر هم هستند. $a+b+c$ کدام است؟

(سراسری خارج ۹۳)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

مثال۲۰: اگر $\vec{a}$ برداری به طول ۲ و $\vec{b}(\sqrt{۶},-۱,۳)$ باشد، حداکثرمقدار $|\vec{a}+\vec{b}|$ چقدر است؟

⌛مثال ۲۱ : سه نقطه $A(۲,۱,۰), B(۳,-۱,۲), C(-۱,۱,۳)$ راس های مثلثی هستند. $\cos A$ کدام است؟

(سراسری ۹۳)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

⌛مثال۲۲ : زاویه بین دو بردار $\vec{a}(۱,m,۰), \vec{b}(۰,-۱,-۱)$ برابر ۱۲۰ درجه است. مقدار m را بیابید.

⌛مثال ۲۳ : بر روی دو بردار $\vec{a}(۳,۳,۰), \vec{b}(۱,-۱,-۲)$ متوازی الاضلاعی ساخته شده است. کسینوس زاویه بین دو قطر این متوازی الاضلاع چقدر است؟(سراسری خارج ۹۲)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

⌛مثال۲۴ :اگر $\vec{a}(۲,-۳,۱)$, $\vec{a} \| \vec{b}$ آنگاه بردار $\vec{b}$ را به گونه ای تعیین کنید که $\vec{a}.\vec{b} = -۲۸$

⌛مثال۲۵ : اگر b,a دو بردار با طول برابر باشند که زاویه بین آنها ۶۰° باشد، زاویه بین بردارهای $a+b,a$ چند درجه خواهد بود؟

⌛مثال ۲۶ : بردار $\vec{a}(۲\sqrt{۳},۱,\sqrt{۳})$ با جهت مثبت محور x ها چه زاویه ای می سازد؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

مثال ۲۷ : اگر $a-b=\left(۷,\frac{-۵}{۳},-۱\right)$, $a+b=\left(\frac{۵}{۳},۱,-۷\right)$ اندازه بین بردارهای $۳a$ و $-۷b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴۵ ۳) ۹۰ ۴) ۱۳۵

مثال۲۸ : زاویه بین دوبردار b,a برابر ۶۰ و $|\vec{a}|=۲|\vec{b}|$ است. زاویه بین $a-b,a$ چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

خواص ضرب داخلی

❶ ضرب داخلی خاصیت جابه جایی دارد. $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

❷ $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^{۲}$

❸ ضرب داخلی نسبت به جمع و تفریق خاصیت پخشی دارد. $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

❹ برای هر دو بردار غیرصفر $\vec{b},\vec{a}$ داریم : a بر b عمود است $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=۰$

❺ $\vec{a}.\vec{o}=\vec{o}.\vec{a}=۰$

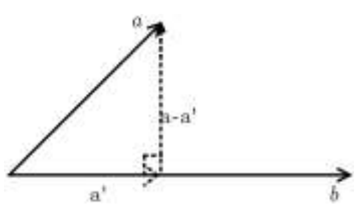
❻ نامساوی کوشی شوارتز $|\vec{a}.\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$

این نامساوی اخیر را میتوان به این صورت هم نوشت:

$$(a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳)^{۲}\leq(a_۱^{۲}+a_۲^{۲}+a_۳^{۲})(b_۱^{۲}+b_۲^{۲}+b_۳^{۲})$$

تمرین ۲۹ : هر ۶ قسمت را خلاصه اثبات کنید.

تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی $\vec{b}$



در واقع در تصویر بالا به دنبال یافتن a' هستیم.

واضح است که a' مضربی از b است: $a' = rb$

$$a - a' \perp b \Rightarrow (a - a').b = ۰$$
$$(a - rb).b = ۰$$
$$a.b - r|b|^۲ = ۰$$
$$\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|b|^۲} = r \xrightarrow{\vec{a}'=r\vec{b}} \boxed{a' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|b|^۲} \times \vec{b}}$$

اندازه ی تصویر را میتوان از فرمول $\boxed{|\vec{a}'| = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}^۲|}}$ محاسبه کرد.

مثال ۳۰ : تصویر قائم $a(۴,۱,-۲)$ را بر $\vec{b}(۲,-۳,۱)$ بیابید.

مثال۳۱ : اگر $\vec{b}(2,1,1),\vec{a}(1,0,-1)$ تصویر قائم $\vec{b}+\vec{i}$ روی $\vec{a}$ را بیابید.

مثال۳۲ : سه بردار c,b,a با طولهای $3,\sqrt{3},\sqrt{6}$ در رابطه $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ صدق می کنند. اندازه تصویر قائم بردار $\vec{c}$ در امتداد $\vec{b}$ را بیابید ؟

مثال۳۳ : اگر بردار $\vec{a}(n,2,-1)$, $|\vec{b}|=\sqrt{41}$ و دو بردار $a+b$, $a-b$ عمود بر هم باشند، مقدار مثبت m کدام است؟

(سراسری ۸۵)

۱) ۳　　　　۲) ۴　　　　۳) ۵　　　　۴)

⌛مثال۳۴ : طول تصویر بردار $v_۱(۱,۲,۲)$ بربردار $v_۲(۲,۱,۲)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۸}{۹}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۸

⌛مثال۳۵ : نقاط $A(۱,۱,۱)$, $B(۳,۳,۲)$, $C(۰,-۱,۲)$ راس های یک مثلث اند. و H پای ارتفاع وارد بر ضلع BC است. طول CH کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۷}{۵}$ ۳) $\frac{۹}{۵}$ ۴) $\frac{۱۱}{۵}$

⌛مثال۳۶ : دو بردار b,a با معلومات $|\vec{a}|=۵$, $|\vec{b}|=۷$, $\vec{a}-\vec{b}=۲\vec{i}+\vec{j}-۳\vec{k}$ مفروضند. تصویر قائم بردار $\vec{b}$ بر روی $\vec{a}$ چند برابر بردار $\vec{a}$ است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۸ ۳) ۱/۲ ۴) ۱/۴

ضرب خارجی دو بردار در R^3

فرض کنیم $\vec{a}(a_1,a_2,a_3),\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در فضای R^3 باشند، ضرب خارجی دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ که با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش داده میشود برداری است که به صورت زیر تعریف میشود.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

با محاسبه داریم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

قضیه: اگر b,a دو بردار در فضای $R^{۳}$ باشند که زاویه بین آنها θ است ، داریم: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|a||b|\sin\theta$

از قبل می دانیم مساحت متوازی الاضلاعی که دوضلع مجاور آن $\vec{b},\vec{a}$ و زاویه بین این دو بردار α باشد، برابر $ab\sin\alpha$ است پس میتوان $|a||b|\sin\alpha$ یا همان اندازه ضرب خارجی را مساحت متوازی الاضلاع فوق دانست.

$S_{\text{متوازی الاضلاع}}=|a\times b|$

مساحت مثلثی که دوضلع مجاور آن $\vec{b},\vec{a}$ باشد، نصف مساحت متوازی الاضلاع فوق است. پس:

$S_{\text{مثلث}}=\frac{۱}{۲}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

⌛مثال۳۷ : ضرب خارجی بردارهای زیر را بیابید.

الف) $\vec{i}\times\vec{j}=$ ب) $\vec{j}\times\vec{i}=$

پ) $\vec{j}\times\vec{k}=$ ت) $\vec{k}\times\vec{j}=$

ث) $\vec{i}\times\vec{k}=$ ج) $\vec{k}\times\vec{i}=$

نکته: به حالت چرخش بردارها در شکل روبرو و محاسبات دقت کنید. چه نتیجه ای میگیرید؟

⌛مثال ۳۸ : اگر $\vec{b}(۲,۱,۴),\vec{a}(-۲,-۱,۳)$ دو بردار باشند، ضرب خارجی آنها را بیابید.

⌛مثال۳۹ : مساحت متوازی الاضلاعی با رئوس متوالی $P(۱,۳,-۲), Q(۲,۱,۴), R(-۳,۱,۴)$ را بیابید.

نکته: حاصلِ ضرب داخلی، یک عدد حقیقی و حاصلِ ضرب خارجی یک بردار است.

⌛مثال ۴۰ : اگر $\vec{a}(۱,-۲,۳), \vec{b}(۲,۱,۰)$ مطلوبست محاسبه مقدار $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

⌛مثال۴۱: اگر $\vec{a} = ۲\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b}(۲,۰,-۳)$, $\vec{c} = ۴\vec{k} - \vec{j}$ سه بردار مفروض باشند مطلوبست:

الف) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ را بیابید.

ب) اندازه تصویر آن را روی محور x ها محاسبه کنید.

پ) ضرب خارجی و داخلی بردار $2\vec{a}-\vec{b}$ در $\vec{c}$ را بیابید.

خواص ضرب خارجی

① اگر b,a دو بردار باشند داریم: $\vec{a}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=0$ و $\vec{b}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=0$

اثبات:

② ضرب خارجی خاصیت جابه جایی ندارد. ولی رابطه روبرو بین انها برقرار است. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$

③ $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$

نتیجه : از قبل می دانیم اگر ضرب داخلی دو بردار صفر شود، آن دو بردار بر هم عمودند. پس :

$\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ عمود است.

یعنی $\vec{a}\times\vec{b}$ برداری است که بر هر دو بردار سازنده اش عمود است.

لذا $\vec{a}\times\vec{b}$ برهربرداری به شکل $m\vec{a}$ و $n\vec{b}$ یا $m\vec{a}\pm n\vec{b}$ هم عمود است.

مثال۴۲: برداری بیابید که بر هر دو بردار $\vec{a}(۱,۲,-۳)$, $\vec{b}(۴,۰,۲)$ عمود باشد.

مثال۴۳: برداری واحد بیابید که بر هر دو بردار $\vec{a}(۱,۲,-۳)$, $\vec{b}(۴,۰,۲)$ عمود باشد..

هر وقت برداری داشتید و خواستید برداری موازی آن بیابید که اندازه آن واحد باشد کافی است تمام مولفه های آن بردار را بر اندازه اش تقسیم کنید.

مثال ۴۴: $\vec{a}\,||\,\vec{b}$, $\vec{b}(۳,۰,-۴)$ اگر بدانیم بردار $\vec{a}$ یکه است، آن را بیابید.

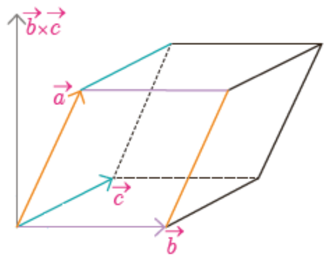
⌛مثال۴۵: دو بردار $\vec{a}(1,2,-1)$, $\vec{b}(2,4,m)$ مفروضند. به ازای کدام مقدار m ، اندازه بردار $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})$ برابر صفر است؟ (سراسری ۸۸)

۱) فقط $m=-2$ ۲) $m=\pm 2$ ۳) هیچ مقدار m ۴)هر عدد حقیقی m

⌛مثال۴۶ : سینوس زاویه بین بردارهای $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}, \vec{v}=-3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ را بیابید.

⌛مثال۴۷ : مساحت متوازی الاضلاعی که با رئوس مجاور داده شده را بیابید. $A(-2,1,1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(-1,-2,4)$

اگر $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ سه بردار غیرواقع بر یک صفحه باشند، آنگاه میتوان به کمک آنها یک متوازی السطوح ساخت که حجم آن از رابطه ی $V=\left|\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|$ به دست می آید.



در شکل فوق اگر $\vec{b},\vec{a}$ دو بردارعمود بر هم باشند، $\vec{a}\times\vec{b}$ برداری است عمود بر هر دو بردار. پس میتوان سه بردار $\vec{a}\times\vec{b},\vec{a},\vec{b}$ را طول و عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل تجسم کرد که حجم آن قابل محاسبه است.

$$V=|a||b||a\times b|$$

مثال۴۸ : اگر سه بردار با مختصات های $(۲,۱,c),(b,۲,۴),(۲,a,۱)$ یال های یک مکعب مستطیل باشند، حجم مکعب مستطیل را بیابید. (سراسری خارج ۹۰)

۱) ۳۲　　　۲) ۳۶　　　۳) ۴۲　　　۴) ۴۵

مثال۴۹: اگر $\vec{a}(۲,-۳,۱)$, $\vec{b}(۱,۲,-۴)$ باشند، حجم متوازی السطوحی که بر روی سه بردار $\vec{a}\times\vec{b},\vec{b},\vec{a}$ ساخته می شود چقدر است؟ (سراسری ۹۷)

۱) ۲۲۵　　　۲) ۲۳۰　　　۳) ۲۴۵　　　۴) ۲۵۰

مثال ۵۰ : اگر $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{۳}\left(\vec{a}.\vec{b}\right)$ زاویه بین دو بردار $\vec{b},\vec{a}$ چقدر است؟

۱) ۳۰
۲) ۶۰
۳) ۴۵
۴) ۹۰

مثال ۵۱ : اندازه بردار $\vec{b},\vec{a}$ به ترتیب $\sqrt{۳},۲$ و زاویه بین آنها برابر ۳۰ است. اندازه بردار $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۵}$
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

⌛مثال۵۲ : فرض کنید $\vec{b},\vec{a}$ بردارهایی با طول ۵ باشند که با یکدیگر زاویه ۴۵ می سازند. مساحت متوازی الاضلاعی که با بردارهای $۲\vec{a}-\vec{b}\ ,\ ۴\vec{a}+۲\vec{b}$ ساخته می شود را پیدا کنید.

⌛مثال۵۳ : سه بردار $\vec{c}=۲\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\ ,\ \vec{b}=\vec{i}+\vec{k}\ ,\ \vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+۲\vec{k}$ مفروضند. حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار فوق ساخته میشود را حساب کنید.

اتحاد لاگرانژ

برای هردو بردار $\vec{b},\vec{a}$ میتوان نوشت: $\boxed{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|^{۲}+\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^{۲}=\left|\vec{a}\right|^{۲}\left|\vec{b}\right|^{۲}}$

⌛مثال۵۴: بردارهای $\vec{b},\vec{a}$ مفروضند. اگر $\left|\vec{a}\right|=۲\ ,\ \left|\vec{b}\right|=۱۵\ ,\ \vec{a}.\vec{b}=-۲۴$ مقدار $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ کدام است؟

⌛مثال۵۵: اگر $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ دو بردار به طول های ۲ و ۴ و $|v_1+v_2|=\sqrt{6}$ باشد، $|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|$ کدام است؟

⌛مثال۵۶: زاویه بین a,b کمتر از ۹۰ درجه است و $|\vec{a}|=6\ ,\ |\vec{b}|=5\ ,\ |\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})|=18$ مقدار $\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})$ چقدر است؟

④ اگر سه بردار $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ در یک صفحه قرار داشته باشد، ضرب مختلط آنها صفر است. یعنی :

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=0 \quad \text{یا} \quad \vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})=0 \quad \text{یا} \quad \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})=0$$

⌛مثال۵۷: به ازای کدام مقدار m ، بردار $\vec{a}(-3,10,m)$ برابر مجموع دو بردار هم راستا با بردارهای $(3,1,2)\ ,\ (1,4,-2)$ است؟ (سراسری خارج ۹۶)

۱) ۱۰− ۲) ۸− ۳) ۹ ۴) ۱۱

⌛مثال۵۸: به ازای کدام مقدار m سه بردار $\vec{a}=(-۱,۲,۳)$, $\vec{b}=(۲,۰,۱)$ و $\vec{c}=(-۴,m,۵)$ در یک صفحه اند.

(سراسری ۹۸)

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

⌛مثال۵۹ : m چقدر باشد تا چهار نقطه $A(m-۲,۱), B(۰,۲,۱), C(۲,-۳,۲), D(۱,۲,۴)$ در یک صفحه باشند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مثال۶۰: مساحت مثلثی که با بردارهای $۲\vec{a}-۳\vec{b}\ ,\ ۲\vec{b}-\vec{a}$ ساخته میشود چند برابر مساحت متوازی الاضلاعی است که با بردارهای $۳\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+۲\vec{b}$ ساخته میشود؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۷}{۵}$ ۴) $\frac{۷}{۱۰}$