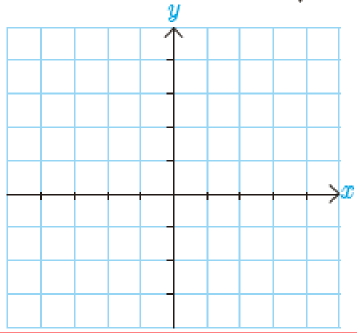
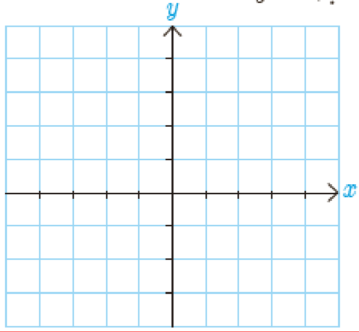
کار در کلاس : ۱) برای هر یک از روابط زیر ابتدا چند نقطه از صفحه که در آن رابطه صدق می کند را مشخص کنید و سپس شکل کلی مربوط به آن را تعیین نمایید.

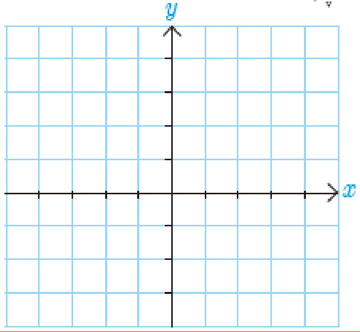
الف) $x = 0$



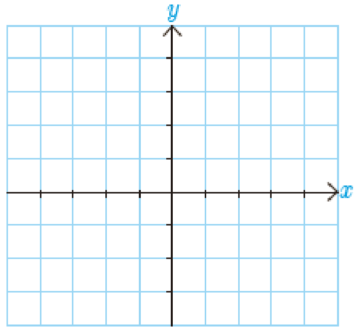
ب) $y = 0$



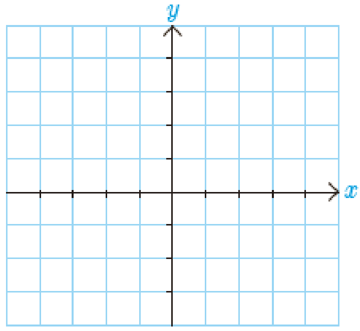
پ) $x = 1$



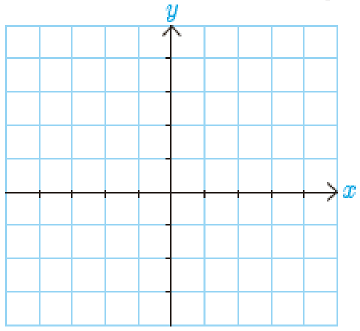
ت) $-1 \le y < 3$ ، $x = 1$



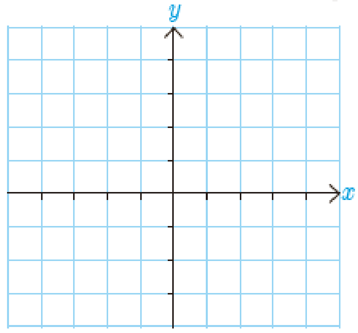
ث) $-1 < x \le 2$ ، $y = x^2$



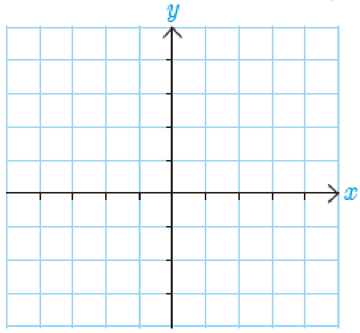
ج) $1 \le x \le 2$ ، $y = x^2$



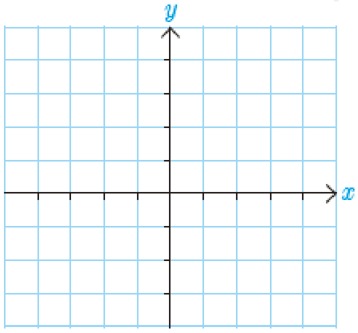
چ) $1 \le y \le -2$ ، $-1 \le x \le 1$



ح) $x^2 < y \le 2$

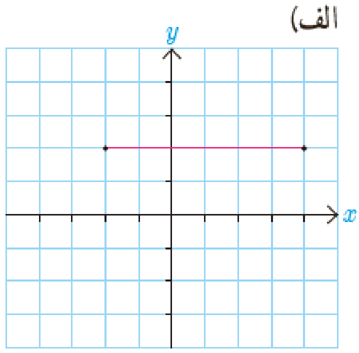


خ) $y \ge x^2$

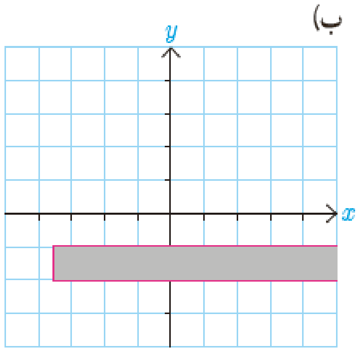


۲) در هر یک از شکل های رو به رو ابتدا مختصات چند نقطه از آن شکل را مشخص نمایید و سپس با توجه به ویژگی های مشترک نقاط مشخص شده و ویژگی های دیگری که از شکل دریافت می کنید رابطه مربوط به آن شکل را بنویسید.   (ص۶۳کتاب جدید)

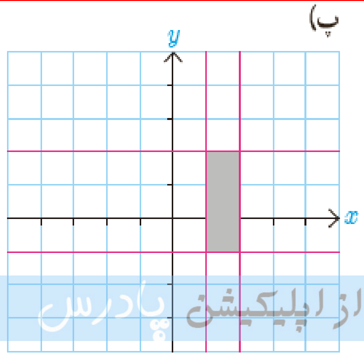
الف)



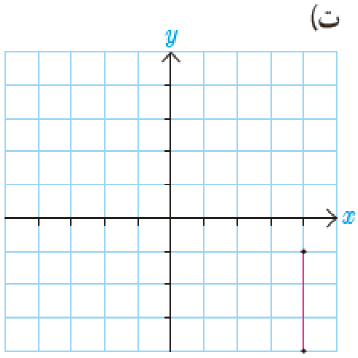
ب)



پ)



ت)

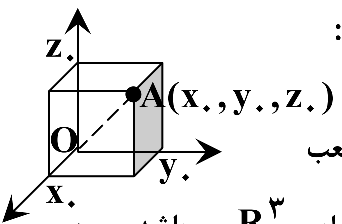


مختصات فضایی سه بعدی $R^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in R\}$: این دستگاه از سه محور دو به دو عمود بر هم $x'Ox$، $y'Oy$ و $z'Oz$ تشکیل شده است. این سه محور فضا را به سه صفحه xOy، yOz و xOz و هشت ناحیه تقسیم می کنند اگر A نقطه ای در فضا باشد سه صفحه از نقطه A طوری می گذرانیم که به ترتیب با صفحه های yOz، xOz و xOy موازی باشد (به بیان دیگر سه صفحه از نقطه A طوری می گذرانیم که به ترتیب بر محورهای طول ها، و عرض ها و ارتفاع ها عمود باشند.) این صفحه ها به ترتیب محور های $x'Ox$، $y'Oy$ و $z'Oz$ را در x_0 (طول) و y_0 (عرض) و z_0 (ارتفاع) قطع می کنند. به (x_0, y_0, z_0) مختصات نقطه‌ی A می گوییم. باید توجه داشت در این تعریف x_0 و y_0 و z_0 را به ترتیب طول از مبدأ و عرض از مبدأ و ارتفاع از مبدأ نقطه‌ی A می نامند.

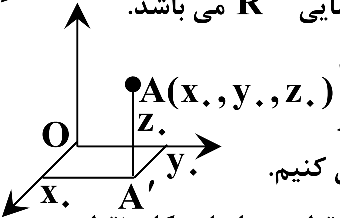
توجه : هر عضو از $R^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in R\}$ یک نقطه را در فضا به شکل منحصر به فرد مشخص می کند. و هم چنین به هر نقطه در فضا به طور منحصر به فرد یک سه تای مرتب (x_0, y_0, z_0) نظیر می کنند بنابراین بین نقاط فضا و مجموعه R^3 تناظر یک به‌یک وجود دارد لذا به این دستگاه، دستگاه مختصات فضایی R^3 می گویند.

مبدأ مختصات : محل برخورد سه محور را مبدأ مختصات می نامند که مختصات آن $O(0,0,0)$ است.

طریقه‌ی یافتن مکان نقطه‌ی $A(x_0, y_0, z_0)$ در دستگاه مختصات فضایی R^3 :



مکعب مستطیلی بنا می کنیم که‌یک رأس آن مبدأ مختصات بوده و سه‌یال آن به اندازه های x_0 (طول) و y_0 (عرض) و z_0 (ارتفاع) بر محور طول ها و عرض ها و ارتفاع ها واقع شده باشد انتهای قطری از مکعب مستطیل که یک سر آن مبدأ مختصات است مکان نقطه‌ی $A(x_0, y_0, z_0)$ در دستگاه مختصات فضایی R^3 می باشد.



روش مختصر : ابتدا x_0 (طول) را روی محور طول ها و y_0 (عرض) را روی محور عرض ها پیدا می کنیم و از این نقاط خطوطی به ترتیب موازی محور طول ها و عرض ها رسم می کنیم این خطوط همدیگر را در نقطه‌ی A' قطع می کنند. از نقطه‌ی A' به اندازه‌ی z_0 (ارتفاع) به موازات محور ارتفاع ها حرکت می کنیم. (توجه شود که اگر z_0 مثبت باشد به سمت بالا و اگر z_0 منفی باشد به سمت پایین حرکت می کنیم.) نقطه‌ی حاصل مکان نقطه‌ی $A(x_0, y_0, z_0)$ در دستگاه مختصات فضایی R^3 می باشد.

معرفی صفحه ها و محورهای مختصات در فضا :

الف) صفحه xOy : $\{(x,y,z) : z = 0\}$ یا $\{(x,y,0) : x,y \in R\}$

ب) صفحه yOz : $\{(x,y,z) : x = 0\}$ یا $\{(0,y,z) : y,z \in R\}$

پ) صفحه xOz : $\{(x,y,z) : y = 0\}$ یا $\{(x,0,z) : x,z \in R\}$

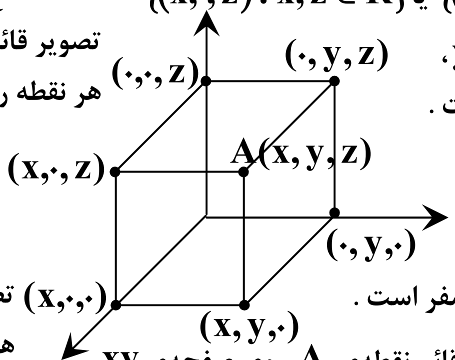
ت) محور x ها : $\{(a,0,0) : a \in R\}$

ث) محور y ها : $\{(0,b,0) : b \in R\}$

ج) محور z ها : $\{(0,0,c) : c \in R\}$

تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی yz، هر نقطه روی این صفحه طولش صفر است .

تصویر قائم نقطه‌ی A روی محور z ها، هر نقطه روی این محور طول و عرضش صفر است .



تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی xz، هر نقطه روی این صفحه عرضش صفر است .

تصویر قائم نقطه‌ی A روی محور y ها، هر نقطه روی این محور طول و ارتفاعش صفر است .

تصویر قائم نقطه‌ی A روی محور x ها، هر نقطه روی این محور عرض و ارتفاعش صفر است .

تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی xy، هر نقطه روی این صفحه ارتفاعش صفر است .

در تصویر قائم هر نقطه بر محورهای مختصات (یا صفحه های مختصات)، مؤلفه‌ی نظیر آن محور (یا آن صفحه) تغییر نکرده ولی دو مؤلفه غیر همنام با آن محور (یا مؤلفه غیرهمنام با آن صفحه) صفر خواهد بود.

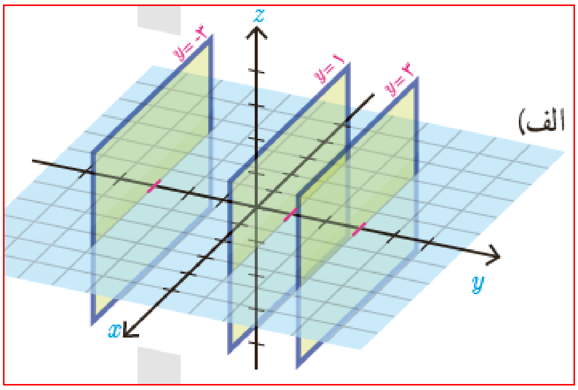
فعالیت۱:۱)مختصات چند نقطه راکه دررابطه $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ صدق کند را مشخص کنید و مکان آنها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

۲) نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله $x=0$ دارد؟ (ص۶۷کتاب جدید)

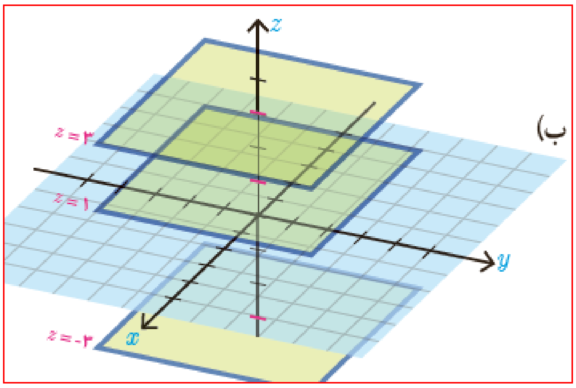
مثال : روی صفحه‌ی $z=1$ نقاط $A=(1,2,1)$ و $B=(2,2,1)$ و $C=(3,2,1)$ را در نظر می گیریم، مؤلفه‌ی دوم هر سه نقطه برابر ۲ است. اگر روی صفحه‌ی مزبور ($z=1$) تمام نقاطی که مؤله‌ی دوم آنها ۲ است را در نظر بگیریم یک خط تشکیل می دهند (نمودار آن یک خط است به معادلات $\begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$) (ص۶۷کتاب جدید)

کار در کلاس : ۱) در دستگاه مختصات صفحه بعد شکل و معادله چند صفحه مشخص شده است. برای هر کدام از صفحات دو نقطه را مشخص کنید که در آن صفحه قرار دارند. (ص۶۷کتاب جدید)

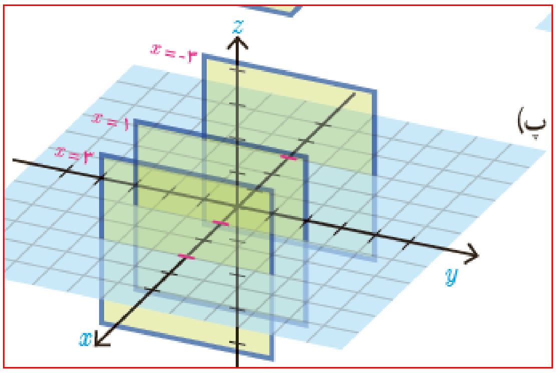
الف)



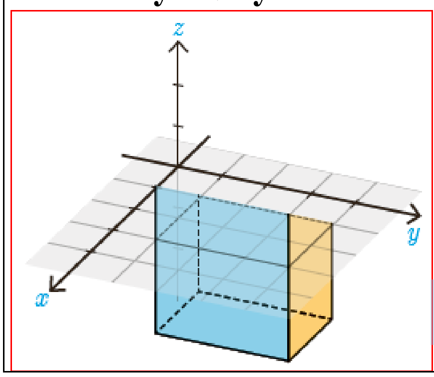
ب)



پ)



۲)وجه های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل قسمت هایی از صفحات به معادلات $x=1$، $x=3$، $y=1$، $y=4$، $z=-2$ و $z=2$ هستند.



الف) در هر یک از شش وجه، مختصات نقطه ای را مشخص کنید که بر هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

ب) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقاً بر دو تا از وجه ها قرار دارند.

پ) معادلات مربوط به هر یک از یال های این مکعب مستطیل را بنویسید.

(دقت کنید که یال ها پاره خط اند و نه خط)

ت) مختصات رأس های این مکعب مستطیل را بنویسید.

ث)روابط مشخص کننده یکی ازوجه های مکعب رانوشته ایم.روابط مشخص کننده پنج وجه دیگر را شما مشخص کنید. $\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ 1 \le y \le 4 \\ z = 2 \end{cases}$

ج) مختصات نقطه ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد و سپس مختصات نقطه ای را بیابید که روی یکی از وجه های آن و غیر واقع بر بال ها باشد.

ج) شرط اینکه نقطه ای درون این مکعب با روی یکی از وجه های آن باشد چیست؟

ح) روابطی را بنویسید که مشخص کننده‌ی حجم محدود شده به درون و روی سطح مکعب داده شده باشند.   (ص۶۸کتاب جدید)

مثال) اگر نقطه‌ی $A(m^2+m, m, m+1)$ روی فصل مشترک صفحه های yOz و xOz قرار داشته باشد کدام نقطه‌ی زیر بر روی صفحه‌ی yOz واقع است؟

۱) $B(1,m,2)$ ۲) $C(m+1,2,m)$ ۳) $D(m-1,2,m)$ ۴) $E(m,m^2-1,2)$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. فصل مشترک صفحه های yOz و xOz همان محور ارتفاع ها می باشد که طول و عرض نقطه روی این محور صفر است پس :

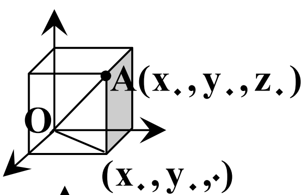
$$\begin{cases} m^2+m=0 \Rightarrow m=0, m=-1 \xrightarrow{\cap} m=0 \\ m=0 \end{cases}$$

از طرفی هر نقطه روی صفحه yOz باشد طول آن صفر است. $m=0 \Rightarrow E(0,-1,2)$

دستور تعیین فاصله در فضا (دستور تعیین اندازه‌ی پاره خط در فضا) :

الف) فاصله نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ از مبدأ مختصات برابر است با $|OA| = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$

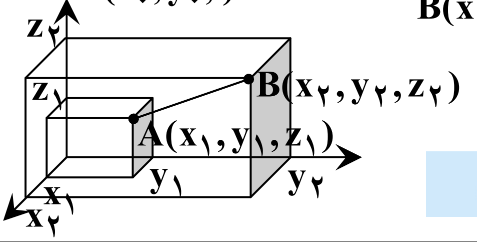
و یا $|OA| = \sqrt{x_A^2+y_A^2+z_A^2}$



ب) فاصله بین دو نقطه (اندازه پاره خط) در فضا : هرگاه $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ دو نقطه د ر فضا باشند فاصله بین آن ها (اندازه پاره خط) برابر است با :

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

و یا
$$|AB| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$



مثال) به ازای چند مقدار مثبت m فاصله بین دو نقطه $A(-۱,۱,m)$ و $B(۲,m,-۳)$ برابر ۷ می باشد.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

جواب : گزینه ۴ درست است.
$$|AB| = ۷ \Rightarrow \sqrt{(۲+۱)^۲ + (m-۱)^۲ + (-۳-m)^۲} = ۷ \Rightarrow$$
$$۹ + m^۲ - ۲m + ۱ + ۹ + ۶m + m^۲ = ۴۹ \Rightarrow ۲m^۲ + ۴m - ۳۰ = ۰ \Rightarrow m^۲ + ۲m - ۱۵ = ۰ \Rightarrow m = ۳$$

۱) اگر A نقطه ای به طول ۳ واقع بر محور طول ها و $B(۳,۲,۰)$ و C نقطه ای واقع در صفحه xOz و A و B و C سه رأس یک مثلث باشند نوع این مثلث همواره کدام است؟

۱) متساوی الساقین ۲) قائم الزاویه ۳) متساوی الاضلاع ۴) نامشخص

مثال) نقطه‌ی A در صفحه‌ی xOy قرار دارد. اگر طولش دو برابر عرض آن باشد و فاصله مبدأ مختصات تا A برابر $۲\sqrt{۵}$ باشد مجموع مختصات A کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

جواب : گزینه ۳ صحیح است.
$$A(۲x,x,۰) \text{ و } \sqrt{۴x^۲ + x^۲} = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow |x|\sqrt{۵} = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow |x| = ۲ \Rightarrow x = \pm ۲$$
$$A(۴,۲,۰) \Rightarrow \sum = ۶ \text{ و } A(-۴,-۲,۰) \Rightarrow \sum = -۶$$

مثال) مساحت مربعی که نقاط $A(۱,-۱,۲)$ و $B(-۱,۱,۰)$ دو رأس مقابل آن هستند، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۶ ۴) ۱۲

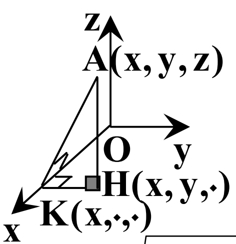
جواب : گزینه ۳ درست است. (هر مربع نوعی لوزی است)
$$AB = \sqrt{(-۱-۱)^۲ + (۱+۱)^۲ + (۰-۲)^۲} = \sqrt{۴+۴+۴} = \sqrt{۱۲} \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۱۲} \times \sqrt{۱۲} = ۶$$

۲) فاصله‌ی بین دو نقطه ای که هر کدام مؤلفه های برابر دارند و از مبدأ مختصات به فاصله $۲\sqrt{۳}$ هستند، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۳}$ ۴) $۸\sqrt{۳}$

فاصله‌ی نقطه از محورهای مختصات : برابر با فاصله‌ی آن نقطه از پای عمود (از تصویر قائم آن نقطه بر روی آن محور) است . چون در محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه از محورهای مختصات، مؤلفه های نظیر به نظیر از هم کم می شوند، لذا فاصله‌ی هر نقطه از یک محور برابر با جذر مجموع مجذور مؤلفه های غیر همنام خواهد بود .

در شکل زیر بنا به قضیه‌ی سه عمود در هندسه‌ی ۲ داریم : $Ak \perp Ox$ درنتیجه فاصله‌ی نقطه $A(x,y,z)$:



الف) از محور x ها برابر $\sqrt{y^۲ + z^۲}$ است .

ب) از محور y ها برابر $\sqrt{x^۲ + z^۲}$ است .

پ) از محور z ها برابر $\sqrt{x^۲ + y^۲}$ است . زیرا $|AK| = \sqrt{(x-x)^۲ + (y-۰)^۲ + (z-۰)^۲} = \sqrt{y^۲ + z^۲}$

نکته : فاصله نقطه از قرینه اش نسبت به محورهای مختصات : فاصله نقطه $A(x,y,z)$ از قرینه A نسبت به :

الف) محور x ها برابر $۲\sqrt{y^۲+z^۲}$ است .

ب) محور y ها برابر $۲\sqrt{x^۲+z^۲}$ است .

پ) محور z ها برابر $۲\sqrt{x^۲+y^۲}$ است .

۳) فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱,۲,۳)$ از محور x ها چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $\sqrt{۱۴}$ ۴) $\sqrt{۱۳}$ (کنکور آزاد ریاضی صبح ۹۱)

فاصله‌ی نقطه از صفحه های مختصات : برابر با فاصله‌ی آن نقطه از پای عمود (از تصویر قائم آن نقطه بر روی آن صفحه) است . چون در محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه از صفحه های مختصات، مؤلفه های نظیر به نظیر از هم کم می شوند، لذا فاصله‌ی هر نقطه از یک صفحه برابر با قدرمطلق مؤلفه‌ی غیر همنام با آن صفحه خواهد بود . فاصله‌ی نقطه $P(x_۰,y_۰,z_۰)$ از

الف) صفحه xy برابر $|z_۰|$ است .
ب) صفحه yz برابر $|x_۰|$ است .
پ) صفحه xz برابر $|y_۰|$ است .
ت) قرینه اش نسبت به صفحه xy برابر $۲|z_۰|$ است .
ث) قرینه اش نسبت به صفحه yz برابر $۲|x_۰|$ است .
ج) قرینه اش نسبت به صفحه xz برابر $۲|y_۰|$ است .

مثال:فاصله‌ی نقطه $P(۲,-۳,-۴)$ ازصفحه xy برابر $۴=|-۴|$ واز صفحه yz برابر $۲=|۲|$ و از صفحه xz برابر $۳=|-۳|$ است .

مثال) اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۳,۲m-۱,۴)$ از محور عرض ها برابر فاصله‌ی آن از صفحه‌ی xoz باشد، m کدام است؟

۱) ۲ و۳ ۲) ۲ و -۳ ۳) -۲ و ۳ ۴) -۲ و -۳

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $\sqrt{۹+۱۶}=|۲m-۱|\Rightarrow ۲m-۱=\pm۵\Rightarrow m=۳$ یا $m=-۲$

مختصات نقطه وسط یک پاره خط : اگر $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ دو نقطه در فضا باشند مختصات

نقطه M وسط AB به صورت زیر است : $M(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲},\frac{z_۱+z_۲}{۲})$ و

یا $M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲},\frac{z_A+z_B}{۲})$ و

یا به طور مختصر $M=\frac{A+B}{۲}$

دستور تعیین مختصات قرینه‌ی یک نقطه نسبت به نقطه‌ی دیگر : اگر نقطه‌ی B قرینه نقطه‌ی $A(x,y,z)$ نسبت به نقطه‌ی $M(a,b,c)$ باشد آنگاه : $B(۲a-x,۲b-y,۲c-z)$ و یا به طورمختصر $M=\frac{A+B}{۲}\Rightarrow B=۲M-A$

(یعنی دو برابر مختصات نقطه‌ی وسط منهای مختصات نقطه‌ی اوّل)

مثال) نقاط E و F به ترتیب تصاویر قائم نقطه‌ی $A(۴,-۶,-۱۲)$ بر صفحه‌ی xoz و محور عرض ها می باشند، فاصله‌ی نقطه‌ی M وسط پاره خط EF از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۳}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) ۷ ۴) ۱۴

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$E(۴,۰,-۱۲)$ ، $F(۰,-۶,۰)$ و $M(\frac{۴+۰}{۲},\frac{۰+(-۶)}{۲},\frac{-۱۲+۰}{۲})=(۲,-۳,-۶)$ لذا $|OM|=\sqrt{۴+۹+۳۶}=۷$

۴) نقاط $A=(-1,0,2)$ و $B=(0,1,3)$ و $C=(2,-5,-1)$ سه رأس مثلث ABC هستند طول میانه AM کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

مثال) مجموع طول و عرض و ارتفاع قرینه‌ی نقطه‌ی $A(2,6,2)$ نسبت به نقطه‌ی $M(3,5,2)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۱۰

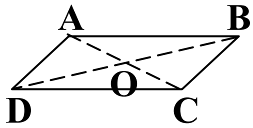
جواب : گزینه ۴ صحیح است. $B(2a-x,2b-y,2c-z)=(2\times 3-2,2\times 5-6,2\times 2-2)=(4,4,2)\Rightarrow \sum=10$

مختصات مرکز ثقل مثلث: در هر مثلث سه میانه همرسند و نقطه همرسی آن ها را مرکز ثقل می نامند اگر $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ و $C(x_3,y_3,z_3)$ رئوس مثلث ABC باشند مختصات مرکز ثقل مثلث به شکل زیر است :

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

و یا به طور مختصر $G=\dfrac{A+B+C}{3}$

رابطه‌ی بین مختصات رأس های متوازی الاضلاع : هر گاه AC و BD دو قطر یک متوازی الاضلاع و نقطه O محل برخورد این دو قطر باشد آنگاه :



$x_A+x_C=x_B+x_D=2x_O$

$y_A+y_C=y_B+y_D=2y_O$

$z_A+z_C=z_B+z_D=2z_O$ و

(مجموع مختصات دو سر یک قطر برابر است با مجموع مختصات دو سر قطر دیگر)

یا به طور مختصر $A+C=B+D=2O$

مثال) مختصات مرکز ثقل مثلث ABC با رئوس $A(1,2,3)$ و $B(3,1,2)$ و $C(-1,3,-14)$ کدام است؟

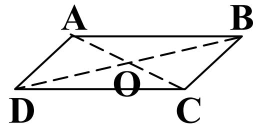
۱) $(-1,2,3)$ ۲) $(1,-2,3)$ ۳) $(-1,-2,3)$ ۴) $(1,2,-3)$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $G\left(\frac{1+3-1}{3},\frac{2+1+3}{3},\frac{3+2-14}{3}\right)=(1,2,-3)$

مثال) نقاط $A(2,1,0)$ و $B(3,-1,1)$ و $C(2,3,-2)$ سه رأس متوالی متوازی الاضلاع $ABCD$ هستند. مجموع مؤلفه های رأس D کدام است؟ ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

جواب: گزینه ۳ صحیح است. در هر متوازی الاضلاع مجموع مختصات دو سر یک قطر برابر است با مجموع مختصات دو سر قطر دیگر

روش اوّل :



$x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow 2+2=3+x_D\Rightarrow x_D=1$

$y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow 1+3=-1+y_D\Rightarrow y_D=5$

$z_A+z_C=z_B+z_D\Rightarrow 0-2=1+z_D\Rightarrow z_D=-3$

درنتیجه $D(1,5,-3)$ پس : $x_D+y_D+z_D=1+5-3=3$

روش دوم : $\dfrac{A+C}{2}=\dfrac{B+D}{2}\Rightarrow D=A+C-B=(2+2-3,1+3+1,0-2-1)=(1,5,-3)$

ویژگی ها ی طول : اگر A و B دو نقطه در فضای R^3 باشند آنگاه :

الف : $A=B\Leftrightarrow |AB|=0\Leftrightarrow \begin{cases}x_A=x_B\\ y_A=y_B\\ z_A=z_B\end{cases}$

ب : $|AB|=|BA|$

پ : به ازای هر نقطه‌ی C از R^3 : $|AB|\le|AC|+|BC|$ (نامساوی مثلثی)

مختصات قرینه نقطه $p(x_0,y_0,z_0)$ نسبت به

- محور طول ها به صورت $p'(x_0,-y_0,-z_0)$ است .
- محور عرض ها به صورت $p'(-x_0,y_0,-z_0)$ است .
- محور ارتفاع ها به صورت $p'(-x_0,-y_0,z_0)$ است .
- مبداء مختصات به صورت $p'(-x_0,-y_0,-z_0)$ است .
- نقطه (a,b,c) به صورت $p'(2a-x_0,2b-y_0,2c-z_0)$ است .
- صفحه xOy به صورت $p'(x_0,y_0,-z_0)$ است .
- صفحه yOz به صورت $p'(-x_0,y_0,z_0)$ است .
- صفحه xOz به صورت $p'(x_0,-y_0,z_0)$ است .

نتیجه : در مختصات قرینه‌ی یک نقطه نسبت به یک محور(یا یک صفحه مختصات)، مؤلفه های غیر همنام با آن محور(یا آن صفحه) قرینه می شوند ولی مؤلفه های همنام ثابت می ماند .

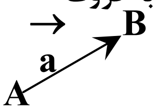
مثال) نقاط $A(1,0,-1)$ و $B(7,2,2)$ مفروضند، چند نقطه در فضا وجود دارد که مجموع فاصله های آن ها از دو نقطه‌ی A و B کمترین مقدار ممکن باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشمار

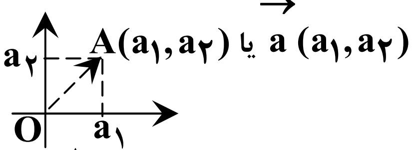
جواب : گزینه ۴ درست است. با توجه به نامساوی مثلثی اگر M نقطه‌ی دلخواهی در فضا باشد همواره داریم : $|MB|+|MA|\geq|AB|$ و مینیمم مجموع فاصله‌ی آن وقتی رخ می دهد که M بر روی پاره خط AB باشد.

بردار (پیکان) $\overrightarrow{AB}$ در صفحه (یا فضا) : به پاره خط جهت دار با ابتدای A و انتهای B بردار (یا پیکان) $\overrightarrow{AB}$ گویند.

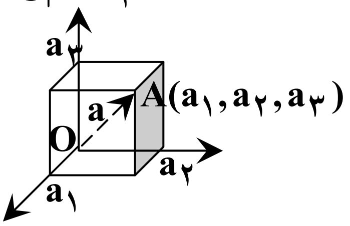
اندازه این بردار را با نماد $|\overrightarrow{AB}|$ نمایش می دهند، که بیانگر اندازه‌ی پاره خط AB است. اغلب جهت سهولت، بردارها را با حروف کوچک لاتین مانند $\vec{a}$ و اندازه‌ی طول آن ها را با $|\vec{a}|$ نمایش می دهند.



بردار در صفحه (یا فضا) :به هر پاره خط جهت دار که ابتدایش بر مبدأ مختصات و انتهایش برنقطه ای مانند $A=(a_1,a_2)$ در صفحه (یا $A=(a_1,a_2,a_3)$ در فضا) واقع است یک بردار گوییم



و با نماد $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2)$ و (یا $\overrightarrow{OA}(a_1,a_2,a_3)$)



و یا به صورت ساده $\vec{a}=(a_1,a_2)$ (یا $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$) نمایش می دهیم.

اعداد حقیقی a_1، a_2 و a_3 مؤلفه های بردار نامیده می شوند.

نتیجه : هر نقطه نشان دهنده یک بردار با نقطه‌ی شروع مبدأ و برعکس هر بردار نشان دهنده‌ی یک نقطه (نقطه‌ی انتهای آن) می باشد. (هر نقطه از صفحه متناظر با یک بردار است و برعکس)

بردار صفر : برداری که ابتدا و انتهایش بر هم منطبق است را بردار صفر گویند.

قرارداد : مبدأ مختصات در صفحه یعنی $O=(0,0)$ (در فضا یعنی $O=(0,0,0)$) نمایشگر بردار $\vec{O}=(0,0)$ در صفحه (یا

بردار $\vec{O}=(۰,۰,۰)$ در فضا) نامیده می شود.

طول (اندازه) یک بردار : الف) اندازه بردار $a(a_۱,a_۲)$ که با نماد $|\vec{a}|$ و یا مختصراً $|a|$ نمایش داده می شود، برابر است با :

$$\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲}$$

ب) اندازه بردار $a(a_۱,a_۲,a_۳)$ که با نماد $|\vec{a}|$ و یا مختصراً $|a|$ نمایش داده می شود، برابر است با : $\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}$

مثال) اگر $a=(m-۳,m,m)$ باشد، به ازای کدام مقدار m اندازه‌ی بردار برابر ۹ است؟

۱) ۱ یا $\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۴}{۳}$ یا ۳   ۳) ۶- یا ۴   ۴) ۴- یا ۶

جواب : گزینه ۴ درست است.

$$|a|=\sqrt{m^۲-۶m+۹+m^۲+m^۲}=۹\Rightarrow ۳m^۲-۶m+۹=۸۱\Rightarrow m^۲-۲m-۲۴=۰\Rightarrow m=-۴ \text{ یا } ۶$$

دو بردار مساوی (هم ارز، همسنگ) : دو بردار هم اندازه و هم جهت را مساوی گویند.

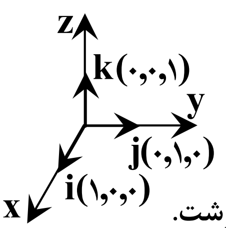
نکته : دو بردار $a(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b(b_۱,b_۲,b_۳)$ مساویند اگروتنهااگر مؤلفه های آن ها نظیر به نظیر مساوی باشند.

یعنی $a_۱=b_۱$ و $a_۲=b_۲$ و $a_۳=b_۳$

دو بردار قرینه : دو بردار موازی و هم طول و مختلف الجهت را قرینه گویند. قرینه‌ی بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ به صورت $-a=(-a_۱,-a_۲,-a_۳)$ می باشد.

بردار یکه : برداری است به طول واحد مانند بردار یکه $a(\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\frac{۱}{۲})$

بردارهای یکه محورهای مختصات : $i(۱,۰,۰)$ و $j(۰,۱,۰)$ و $k(۰,۰,۱)$



نکته : هر بردار مانند $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ را می توان به صورت ترکیب خطی $a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}+a_۳\vec{k}$ نوشت.

زیرا : $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)=(a_۱,۰,۰)+(۰,a_۲,۰)+(۰,۰,a_۳)=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}+a_۳\vec{k}$

نکته : برای هر بردار مانند $a(a_۱,a_۲,a_۳)$

الف : $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ را مختصات یا اندازه‌ی جبری بردار a بر محورهای مختصات می نامند.

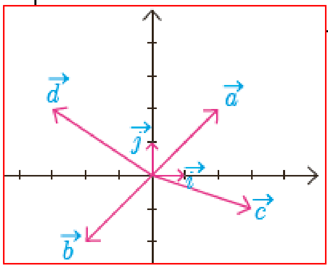
ب : $a_۱i=(a_۱,۰,۰)$، $a_۲j=(۰,a_۲,۰)$ و $a_۳k=(۰,۰,a_۳)$ را تصاویر قائم بردار a بر محورهای مختصات می نامند.

ج : $|a_۱|$، $|a_۲|$ و $|a_۳|$ را اندازه‌ی تصاویر قائم بردار a بر محورهای مختصات می نامند.

قانون شارل : به ازای هر سه نقطه دلخواه A و B و C در فضا همواره داریم : $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}\Rightarrow \vec{BC}=\vec{AC}-\vec{AB}$

در حالت خاص : $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=$ (مختصات ابتدا – مختصات انتها)

نتیجه : مختصات یک بردار با دو نقطه‌ی ابتدایی و انتهایی (مختصات (تصاویر) یک بردار بر روی سه محور) : $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(x_B,y_B,z_B)-(x_A,y_A,z_A)=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$



مثال) بردارهای $\vec{a}=(۲,۲)$ ، $\vec{b}=(-۲,-۲)$ ، $\vec{c}=(۲,-۱)$ ، $\vec{d}=(-۳,۲)$ ، $\vec{i}=(۱,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱)$ در دستگاه مختصات رو به رو رسم شده اند. (ص۶۹کتاب جدید)

مثال) اگر $\vec{AB}=۴\vec{i}+۶\vec{j}+۲\vec{k}$ و نقطه $M(۳,-۱,۲)$ وسط پاره خط AB باشد عرض نقطه‌ی B کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۸

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$\begin{cases} y_B - y_A = ۶ \\ \dfrac{y_B + y_A}{۲} = -۱ \Rightarrow y_B + y_A = -۲ \end{cases} \Rightarrow ۲y_B = ۴ \Rightarrow y_B = ۲$$

مثال) اگر $\vec{AB}(۱,۲,۳)$ و $\vec{AC}(۳,۲,۱)$ باشند، مختصات $\vec{BC}$ کدام است؟

۱) $(۲,۰,-۲)$ ۲) $(۴,۰,-۲)$ ۳) $(۴,۴,۴)$ ۴) $(۲,۲,-۲)$

جواب : گزینه ۱ درست است.

$$\vec{BC}=\vec{BA}+\vec{AC}=(-۱,-۲,-۳)+(۳,۲,۱)=(۲,۰,-۲)$$

۵) نقاط $A(۵,-۴,۱)$ ، $B(-۱,۲,۴)$، مفروض هستند و $\vec{AM}=\frac{۲}{۳}\vec{AB}$ ، مقدار $|\vec{OM}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۱۱}$ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۱۴}$ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۴)

اندازه بردار $\vec{AB}$: اگر $A(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $B(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو نقطه از فضا باشند آنگاه اندازه بردار $\vec{AB}$ به صورت زیر می باشد

$$|\vec{AB}|=\sqrt{(b_۱-a_۱)^۲+(b_۲-a_۲)^۲+(b_۳-a_۳)^۲}$$

نکته : مختصات تصویر و اندازه‌ی تصویر بردار $a(a_۱,a_۲,a_۳)$ بر روی

الف : صفحه‌ی xoy به ترتیب برابر است با : $a'=a_۱i+a_۲j=(a_۱,a_۲,۰)$ و $\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲}$

ب : صفحه‌ی yoz برابر است با : $a'=a_۲j+a_۳k=(۰,a_۲,a_۳)$ و $\sqrt{a_۲^۲+a_۳^۲}$

پ : صفحه‌ی xoz برابر است با : $a'=a_۱i+a_۳k=(a_۱,۰,a_۳)$ و $\sqrt{a_۱^۲+a_۳^۲}$

مثال) اگر اندازه‌ی تصاویر بردار a بر صفحات xoy و yoz و xoz بترتیب $۳\sqrt{۲}$ و $۲\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۲}$ باشد اندازه بردار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۱۴ ۴) قابل محاسبه نیست.

جواب : گزینه ۴ درست است. روش اوّل :

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=۱۸ \\ y^۲+z^۲=۱۲ \\ x^۲+z^۲=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^۲-x^۲=-۶ \\ x^۲+z^۲=۲ \end{cases} \Rightarrow z^۲=-۲$$

روش دوم : حل به روش نادرست : یعنی فرمول فوق شرط داشتن جواب دستگاه باید کنترل شود

$$\begin{cases} \sqrt{x^۲+y^۲}=۳\sqrt{۲} \\ \sqrt{y^۲+z^۲}=۲\sqrt{۳} \\ \sqrt{x^۲+z^۲}=\sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲+y^۲=۱۸ \\ y^۲+z^۲=۱۲ \\ x^۲+z^۲=۲ \end{cases} \Rightarrow ۲(x^۲+y^۲+z^۲)=۳۲ \Rightarrow |a|=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=\sqrt{۱۶}=۴$$

مثال) اندازه تصویر بردار $\vec{v}\,(۳,۱,۲)$ بر صفحه‌ی yoz کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۲۰}$ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۱۴}$ (کنکور سراسری ریاضی ۷۴)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$\text{اندازه تصویر بردار } \vec{v}\,(۳,۱,۲) \text{ بر صفحه‌ی } yoz = \sqrt{y^۲+z^۲}=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$$

مثال) طول تصویر بردار $\vec{AB}$ که در آن $A(۱,۲,۳)$ و $B(۵,۵,۱)$ می باشد، بر صفحه‌ی xoy برابر است با :

۱) ۵ ۲) $\sqrt{۲۹}$ ۳) ۷ ۴) ۹ (کنکور آزادریاضی۷۷)

جواب : گزینه ۱ درست است. روش اوّل :

$$\text{طول تصویر بردار } AB \text{ بر صفحه } xoy = \sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

روش دوم :

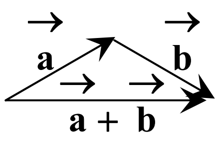
$$\vec{AB}=(x_۲-x_۱,y_۲-y_۱,z_۲-z_۱)=(۴,۳,-۲) \Rightarrow \sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

اعمال روی بردارها : جمع و تفریق بردارها :

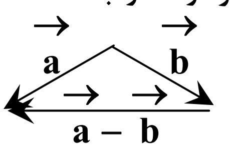
روش مختصاتی : اگر $a(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار از فضا باشند آنگاه :

(مجموع و یا تفاضل دو بردار برابر با مجموع و یا تفاضل مؤلفه های همنام آن ها) $a \pm b=(a_۱ \pm b_۱,a_۲ \pm b_۲,a_۳ \pm b_۳)$

روش هندسی (روش مثلث) :

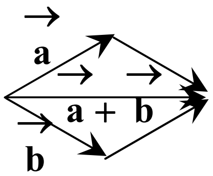


الف) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را طوری قرار می دهیم که ابتدای بردار $\vec{b}$ بر انتهای بردار $\vec{a}$ واقع شود برداری که ابتدای بردار $\vec{a}$ را به انتهای بردار $\vec{b}$ وصل می نماید بردار $\vec{a}+\vec{b}$ رامشخص می کند .



ب) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را طوری قرار می دهیم که ابتدای بردار $\vec{b}$ بر ابتدای بردار $\vec{a}$ واقع شود برداری که انتهای بردار $\vec{b}$ را به انتهای بردار $\vec{a}$ وصل می نماید تفاضل بردار $\vec{b}$ از بردار $\vec{a}$ یعنی بردار $\vec{a}-\vec{b}$ را مشخص می کند .

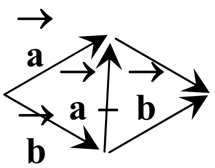
روش هندسی (روش متوازی الاضلاع) :



الف) با دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازی الاضلاعی می سازیم که ابتدای این دو بردار یک رأس آن باشد

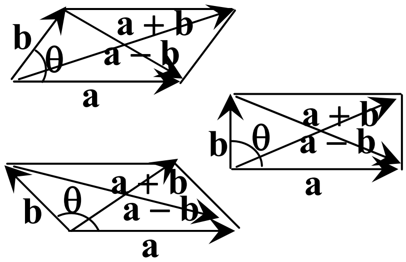
بردار $\vec{a}+\vec{b}$ قطری از متوازی الاضلاع است که از ابتدای دو بردار می گذرد.

ب) با دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازی الاضلاعی می سازیم که ابتدای این دو بردار یک رأس آن باشد



بردار $\vec{a} - \vec{b}$ قطری از متوازی الاضلاع است که انتهای بردار $\vec{b}$ را به انتهای بردار $\vec{a}$ وصل می کند .

نکته : هرگاه بردارهای هم مبدأ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو ضلع مجاور یک متوازی الاضلاع و θ زاویه‌ی بین آنها باشد رابطه های زیر همواره بین دو بردار $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ برقرار است .



الف : $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| > |\mathbf{a}-\mathbf{b}| \Leftrightarrow ۰ < \hat{\theta} < ۹۰^\circ$

ب : $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}| \Leftrightarrow \hat{\theta} = ۹۰^\circ$

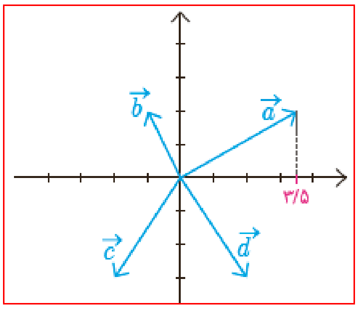
پ : $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| < |\mathbf{a}-\mathbf{b}| \Leftrightarrow ۹۰ < \hat{\theta} < ۱۸۰^\circ$

توجه: اگربردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو ضلع مجاور متوازی الاضلاع باشند آنگاه بردارهای $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ قطرهای آن متوازی الاضلاع خواهند بود .

نتیجه ۱ : اگر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بر هم عمود باشند متوازی الاضلاع تبدیل به‌یک مستطیل می شود و در نتیجه قطرهای آن با هم برابر خواهند بود و بعکس . یعنی : $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow |\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$

نتیجه ۲ : اگر اندازه‌ی بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با هم برابر باشد متوازی الاضلاع تبدیل به لوزی می شود و درنتیجه قطرهای آن بر هم عمود بوده و نیمساز زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ خواهند شد و بعکس . یعنی $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \Leftrightarrow (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a}-\mathbf{b})$

کار در کلاس : در این دستگاه مختصات چند بردار داده شده است.



الف) مختصات بردار $\vec{a} + \vec{b}$ را یافته و آن را رسم کنید.

ب) قرینه بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را رسم کرده و مختصات آنها را به دست آورید.

ج) مؤلفه های بردارهای $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{d} - \vec{c}$ را یافته، آنها را رسم کنید و اندازه هر یک را به دست آورید.

د) هر یک از بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ ، $\vec{d}$ ، $\vec{a} + \vec{b}$ ، $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{d} - \vec{c}$ را بر حسب بردارهای واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ به دست آورید. (ص۷۳کتاب جدید)

مثال) اگر بردارهای $a(۲,۱,۲)$ و $b(۰,۲,۴)$ دو ضلع مجاور یک متوازی الاضلاع باشند آنگاه اندازه بزرگترین قطر این متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۲۰}$ ۳) ۷ ۴) ۱۰

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$a-b=(۲,-۱,-۲)\Rightarrow |a-b|=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$$
$$a+b=(۲,۳,۶)\Rightarrow |a+b|=\sqrt{۴+۹+۳۶}=۷$$

مثال) نقاط $A(۴,۳,۰)$، $B(۶,۴,۲)$ و $C(۶,۶,۶)$ رأس های متوالی یک متوازی الاضلاع و نقطه‌ی $O(۵,۴/۵,۳)$ مرکز تقارن آن است، اندازه بزرگترین قطر این متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۲۰}$ ۳) ۷ ۴) ۱۰

جواب: گزینه ۳ صحیح است. روش اوّل :

$$\overrightarrow{BD}=۲\overrightarrow{BO}=۲(۵-۶,۴/۵-۴,۳-۲)=(۲,۱,۲)\Rightarrow\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$$

$$\overrightarrow{AC}=۲\overrightarrow{AO}=۲(۵-۴,۴/۵-۳,۳-۰)=(۲,۳,۶)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{۴+۹+۳۶}=۷$$

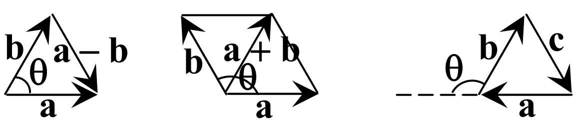
روش دوم :

$$\begin{cases}x_A+x_C=۲x_O\\ y_A+y_C=۲y_O\\ z_A+z_C=۲z_O\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_C=۱۰-۴=۶\\ y_C=۹-۳=۶\\ z_C=۶-۰=۶\end{cases}\Rightarrow a=\overrightarrow{AB}(۲,۱,۲)\ \text{و}\ b=\overrightarrow{BC}(۰,۲,۴)$$

$$a-b=(۲,-۱,-۲)\Rightarrow |a-b|=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$$
$$a+b=(۲,۳,۶)\Rightarrow |a+b|=\sqrt{۴+۹+۳۶}=۷$$

زاویه بین دو بردار : اگر دو بردار v و v' مفروض باشند و از یک نقطه اختیاری O دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ را به ترتیب برابر v و v' رسم کنیم، هر زاویه‌ی مثبت یا منفی یا صفر را که باید $\overrightarrow{OA}$ حول نقطه‌ی O دوران کند تا بر راستای $\overrightarrow{OB}$ منطبق شود زاویه بین v و v' می نامیم و آن را با نماد (v,v') نشان می دهیم. بنابراین $(v',v)=-(v,v')$

نکته : زاویه اصلی بین دو بردار v و v' همواره به صورت $۰\le(v,v')\le۱۸۰$ است.



نکته: الف :هر گاه سه بردار هم اندازه a و b و c اضلاع یک مثلث بوده و $a+b+c=۰$ باشدآنگاه زاویه‌ی بین دوبدوی این سه بردار۱۲۰درجه است.

ب : برای دو بردار متمایز a و b : اگر $|a|=|b|=|a+b|$ آنگاه زاویه‌ی بین a و b برابر ۱۲۰ درجه و اگر $|a|=|b|=|a-b|$ آنگاه زاویه‌ی بین a و b برابر ۶۰ درجه است.

مثال)اگر a و b دوبردارغیرصفروناموازی باشند. از کدام یک از گزینه های زیر می توان نتیجه گرفت که همواره a و b بر هم عمودند؟

۱) $|a|=|b|$ ۲) $(a+b)\perp(a-b)$ ۳) $|a+b|=|a-b|$ ۴) $|a+b|=|a|$

جواب : گزینه ۳ صحیح است. اگر بردارهای a و b بر هم عمود باشند متوازی الاضلاع تبدیل به‌یک مستطیل می شود و در نتیجه قطرهای آن با هم برابر خواهند بود و بعکس.

مثال) بردارهای واحد a و b با یکدیگر زاویه‌ی ۶۰ درجه می سازند زاویه‌ی بین بردار $a+b$ با بردار a کدام است؟

۱) ۳۰ درجه ۲) ۴۵ درجه ۳) ۶۰ درجه ۴) ۹۰ درجه جواب : گزینه۱ صحیح است. بردار $a+b$ قطر متوازی الاضلاعی است که با بردارهای واحد a و b ساخته می شود و به این معنی است که متوازی الاضلاع فوق لوزی است، در نتیجه قطر $a+b$ نیمساز زاویه‌ی بین این دو بردار است.

مثال) زاویه بین دو بردار a، b ، ۶۰ درجه و بردارهای $a+b$ و $a-b$ عمود بر هم هستند. $|a+b|$ چند برابر $|a|$ است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۱ ۴) ۲

جواب : گزینه ۲ درست است. بردارهای $a+b$ و $a-b$ دو قطر متوازی الاضلاع اندکه با دو بردار a و b ساخته می شوند. چون بردارهای $a+b$ و $a-b$ عمود بر هم هستند یعنی دو قطر متوازی الاضلاع بر هم عمودند، پس متوازی الاضلاع فوق لوزی است. و چون زاویه بین دو بردار a، b برابر ۶۰ درجه است پس بردارهای a، b و $a-b$ سه ضلع یک مثلث متساوی الاضلاع اند لذا $|a+b|$ اندازه‌ی برابر ارتفاع این مثلث متساوی الاضلاع است.

$$|a+b| = ۲h = \frac{۲\times|a|\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}|a|$$

مثال) اگر a و b دو بردار ناصفر و $|a|=|b|=|a-b|$ باشند، در این صورت زاویه‌ی بین دو بردار a و $a+b$ چند درجه است؟

۱) ۹۰ ۲) ۶۰ ۳) ۴۵ ۴) ۳۰

جواب : گزینه ۴ درست است. بردارهای a، b و $a-b$ سه ضلع یک مثلث متساوی الاضلاع اند لذا زاویه بین دو بردار a و b برابر ۶۰ درجه است. متوازی الاضلاعی که با دو بردار a و b ساخته می شود یک لوزی است قطر $a+b$ نیمساز زاویه بین دو بردار a و b می باشد در نتیجه زاویه‌ی بین دو بردار a و $a+b$ برابر ۳۰ درجه است.

مثال) اگر بردارهای $(۳,۵,۸)$ و $(۱,۱,۴)$ قطرهای یک متوازی الاضلاع باشند محیط متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$a+b=(۳,۵,۸) \text{ و } a-b=(۱,۱,۴) \text{ و } (a+b)+(a-b)=(۴,۶,۱۲)$$

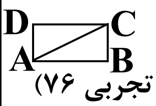
$$\Rightarrow ۲a=(۴,۶,۱۲) \Rightarrow a=(۲,۳,۶) \text{ و } (a+b)-(a-b)=(۲,۴,۴) \Rightarrow ۲b=(۲,۴,۴) \Rightarrow b=(۱,۲,۲)$$

$$\Rightarrow |a|=\sqrt{۴+۹+۳۶}=۷ \text{ و } |b|=\sqrt{۱+۴+۴}=۳ \Rightarrow P=۲(۳+۷)=۲۰$$

۶) در مثلث ABC اگر G محل تلاقی سه میانه باشد حاصل $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}$ کدام است؟ (I مرکز دایره‌ی محاطی داخلی و M مرکز دایره‌ی محیطی و O مبدأ مختصات است.)

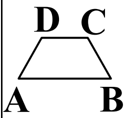
۱) $۳\overrightarrow{IG}$ ۲) $\overrightarrow{o}$ ۳) $۳\overrightarrow{OG}$ ۴) $۳\overrightarrow{MG}$ (کنکور آزاد ریاضی ۷۷)

۷) در مستطیل $ABCD$ حاصل $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}$ کدام است؟



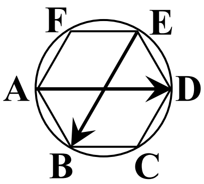
۱) $۲\overrightarrow{BC}$ ۲) $\overrightarrow{o}$ ۳) $۲\overrightarrow{DA}$ ۴) $۲\overrightarrow{AB}$ (کنکور آزاد تجربی ۷۶)

۸) در ذوزنقه‌ی $ABCD$ داریم : $AD = DC = CB = \frac{AB}{۲}$. در این صورت $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ هم سنگ است با :



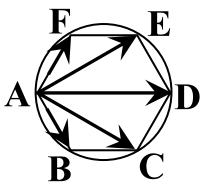
۱) $\overrightarrow{DC}$ ۲) $\overrightarrow{CD}$ ۳) $۲\overrightarrow{BC}$ ۴) $\overrightarrow{AB}$ (کنکور آزاد تجربی ۶۸)

۹) در شکل مقابل شش ضلعی منتظم در دایره $C(O,R)$ محاط است. حاصل عبارت $\left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}\right|$ کدام است؟



۱) ۰ ۲) $۲R$ ۳) $۴R$ ۴) $۶R$

۱۰) در شکل مقابل دایره $C(O,R)$ به ۶ قسمت مساوی تقسیم شده است. حاصل عبارت $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}\right|$ کدام است؟



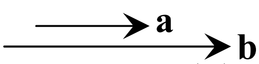
۱) ۰ ۲) $۲R$ ۳) $۴R$ ۴) $۶R$

مثال) دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ به طول های مساوی با محور ox به ترتیب زوایای ۴۳ و ۷۵ درجه می سازند زاویه بردار $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ با محور ox چند درجه است؟

۱) ۵۷ ۲) ۵۸ ۳) ۵۹ ۴) ۶۰ (کنکور سراسری تجربی ۶۵ و کنکور آزاد ریاضی ۷۶)

جواب : گزینه ۳ درست است. $\frac{۴۳ + ۷۵}{۲} = \frac{۱۱۸}{۲} = ۵۹$

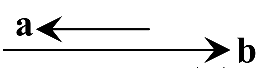
ضرب عدد (اسکالر) در بردار : حاصل ضرب عدد حقیقی r در بردار a برداری مانند b است که اندازه‌ی بردار b برابر $|r|$ در اندازه‌ی بردار a به طوری که



$b = ra, r > ۰, |b| = r|a|$

الف : اگر $r > ۰$ آنگاه دو بردار a و b موازی و هم جهت اند و زاویه بین آنها صفر درجه می باشد.

ب : اگر $r = ۰$ آنگاه بردار b، بردار صفر است.



$b = ra, r < ۰, |b| = -r|a|$

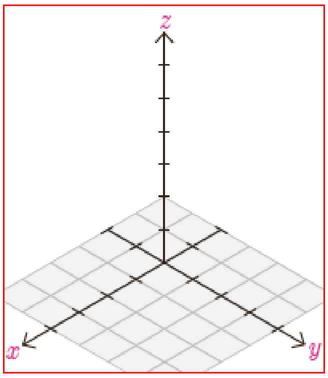
پ : اگر $r < ۰$ آنگاه دو بردار a و b موازی و غیرهم جهت اند و زاویه بین آنها ۱۸۰ درجه می باشد.

نکته : برای دو بردار a و b داریم : $||a|b|| = ||a|b|| = |a||b|$

نکته : اگر بردارهای a و b بر هم عمود باشند آنگاه هر مضرب غیر صفر از بردارهای a و b بر هم عمود خواهند بود و در نتیجه متوازی الاضلاع حاصل ازمضارب این دو بردار تبدیل به‌یک مستطیل می شود و در نتیجه قطرهای آن با هم برابر خواهند بود.
یعنی : $a \perp b \Rightarrow |\alpha a + \beta b| = |\alpha a - \beta b|$

کار در کلاس : نقاط $A(۲,۳,۱)$ و $B(-۱,۲,۲)$ و $C(۳,۴,۰)$ و $D(۱,۰,-۱)$ را در یک دستگاه $R^۳$ در نظر بگیرید، اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ بردارهایی در $R^۳$ با نقاط انتهایی به ترتیب A و B و C و D باشند و هر یک از بردارهای زیر را به دست آورید. $\vec{a} + ۲\vec{b} =$ $\quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) =$ $\quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} =$ $\quad -۲(\vec{b} + \vec{c}) =$ $\quad -۲\vec{b} - ۲\vec{c} =$

(ص۷۴کتاب جدید)



مثال) به ازای کدام مقدار m در تساوی $\vec{AC} + \vec{BC} + ۲\vec{CD} = (m+۵)\vec{AD}$ فقط نقاط A و B بر هم منطبق می شوند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۳ ۴) ۳

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $۲\vec{AC} + ۲\vec{CD} = (m+۵)\vec{AD} \Rightarrow ۲\vec{AD} = (m+۵)\vec{AD} \Rightarrow m+۵ = ۲ \Rightarrow m = -۳$

مثال) اگر چهار بردار $\vec{OA}$، $\vec{OB}$، $\vec{OC}$ و $\vec{OD}$ در تساوی $\vec{OA} - \vec{OB} = k(\vec{OD} - \vec{OC})$ صدق کنند، چهارضلعی $ABCD$ همواره کدام است؟ $(k > ۱)$

۱) ذوزنقه ۲) لوزی ۳) متوازی الاضلاع ۴) مستطیل (کنکور سراسری تجربی ۷۳)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. نکته : هر گاه‌یک بردار در عدد مثبت k ضرب شود برداری است هم راستا با آن بردار بوده و طول آن نیز k برابر می گردد. $\Rightarrow \vec{BA} = k\vec{CD} \Rightarrow \vec{BA} \parallel \vec{CD}$ و $\vec{BA} \neq \vec{CD} \Rightarrow$ ذوزنقه

مثال)اگر a و b دو بردار عمود بر هم و $۲a + ۳b = (m, m+۲, m-۲)$ و $۲a - ۳b = (-۱,۱,۹)$ باشد، m کدام عدد است؟

۱) ± ۱ ۲) ± ۳ ۳) ± ۵ ۴) ± ۷

جواب : گزینه ۳ صحیح است. می دانیم : $a \perp b \Rightarrow |\alpha a + \beta b| = |\alpha a - \beta b|$

$$a \perp b \Rightarrow |۲a + ۳b| = |۲a - ۳b| \Rightarrow |۲a + ۳b|^۲ = |۲a - ۳b|^۲$$

$$\Rightarrow m^۲ + (m+۲)^۲ + (m-۲)^۲ = ۱ + ۱ + ۸۱ \Rightarrow ۳m^۲ = ۷۵ \Rightarrow m = \pm ۵$$

ضرب عدد (اسکالر) در مختصات بردار : حاصل ضرب عدد حقیقی r در بردار $a(a_۱, a_۲, a_۳)$ به صورت زیر تعریف می شود : $ra(a_۱, a_۲, a_۳) = (ra_۱, ra_۲, ra_۳)$

۱۱) اگر $\vec{v_1} = ۲\vec{i} + ۳\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{v_2} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ حاصل $\dfrac{|v_1 - ۲v_2|}{|v_1 + ۲v_2|}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{۶}}{۶}$ ۴) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ (کنکور آزاد ریاضی-۸۱)

نکته شرط توازی دو بردار : دو بردار $a(a_1, a_2, a_3)$ و $b(b_1, b_2, b_3)$ را موازی (یا هم راستا) گویند اگر و تنها اگر یکی از این دو بردار، مضرب غیرصفری از بردار دیگر باشد . مثلاً $\exists t \in R : a = tb$ بنابراین :

$$a \,||\, b \Leftrightarrow \exists t \in R : a = bt \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3) = (b_1 t, b_2 t, b_3 t) \quad (\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = t \quad (b_1 b_2 b_3 \neq ۰) \text{ و یا})$$

نتیجه : اگر $a(a_1, a_2, a_3)$ و $b(b_1, b_2, b_3)$ $(b_1 b_2 b_3 \neq ۰)$ دو بردار موازی باشند آنگاه : $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$

مثال) دو بردار $a(m-۱, ۲, ۴)$ و $b(۳, ۱, ۱-n)$ موازی اند، حاصل mn کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۷ ۳) ۱- ۴) ۷-

جواب : گزینه ۴ صحیح است $\dfrac{m-۱}{۳} = \dfrac{۲}{۱} = \dfrac{۴}{۱-n} \Rightarrow m-۱ = ۶ \Rightarrow m = ۷$ و $۲ - ۲n = ۴ \Rightarrow n = -۱ \Rightarrow mn = -۷$

مثال) اگر بردار b موازی با بردار $a(۱, ۲, -۲)$ و $|b| = ۶$ باشد، تصاویر بردار b کدام است؟

۱) $(۲, ۴, ۴)$ ۲) $(-۲, ۴, ۴)$ ۳) $(۲, -۴, ۴)$ ۴) $(۲, ۴, -۴)$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. روش اوّل : آزمون گزینه ها دیده می شود که در گزینه ۴ نسبت مؤلفه ها برابر و اندازه بردار ۶ است.

روش دوم :

$$b \,||\, a \Rightarrow b = ra \Rightarrow b = (r, ۲r, -۲r), |b| = |r||a| \Rightarrow ۶ = |r|\sqrt{۴+۱+۴}$$

$$\Rightarrow |r| = ۲ \Rightarrow r = \pm ۲ \Rightarrow b(\pm ۲, \pm ۴, \mp ۴)$$

روش سوم :

$$b \,||\, a \Rightarrow b = ra \Rightarrow b(r, ۲r, -۲r) \Rightarrow |b| = ۶ \Rightarrow \sqrt{r^۲ + ۴r^۲ + ۴r^۲} = ۶ \Rightarrow \pm ۳r = ۶$$

$$\Rightarrow r = \pm ۲ \Rightarrow b(\pm ۲, \pm ۴, \mp ۴)$$

نکته : اگر سه نقطه A و B و C بر یک استقامت (یک خط راست) باشند آنگاه $\vec{AB} \,||\, \vec{AC}$ و $\vec{AB} \,||\, \vec{BC}$ و $\vec{BC} \,||\, \vec{AC}$

مثال) اگر نقاط $A(۱, ۳, ۵)$، $B(۲, ۶, ۸)$ و $C(۳, ۹, m-۴)$ سه نقطه‌ی واقع بر یک خط راست باشند، m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۵ ۴) صفر

جواب : گزینه ۳ صحیح $\vec{AB}(۱, ۳, ۳)$ و $\vec{AC}(۲, ۶, m-۹)$ و $\vec{AB} \,||\, \vec{AC} \Rightarrow \dfrac{۱}{۲} = \dfrac{۳}{۶} = \dfrac{۳}{m-۹} \Rightarrow m - ۹ = ۶ \Rightarrow m = ۱۵$

مثال) چند نقطه در فضا دارند که فاصله‌ی آن از سه نقطه‌ی $A(۱, ۲, ۳)$، $B(۳, ۱, ۲)$ و $C(-۳, ۴, ۵)$ به‌یک اندازه باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشمار

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$\vec{AB} \left| \begin{array}{l} x_B - x_A = ۳ - ۱ = ۲ \\ y_B - y_A = ۱ - ۲ = -۱ \\ z_B - z_A = ۲ - ۳ = -۱ \end{array} \right. \text{ و } \vec{AC} \left| \begin{array}{l} -۴ \\ ۲ \\ ۲ \end{array} \right. \Rightarrow \vec{AB} \,||\, \vec{AC}$$

۱۲) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار ناصفر باشندآنگاه زاویه بین دو بردار $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ و $\vec{a}\,|\vec{b}|+\vec{b}\,|\vec{a}|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) حاده ۳) قائمه ۴) منفرجه (کنکور سراسری تجربی ۶۷)

قضیه : به ازاء همه بردارهای a و b و c و بردار صفر و تمام اعدادحقیقی r و s، خواص زیربرقرارند :

۱) مجموعه بردارها نسبت به عمل جمع بردارها بسته است یعنی جمع دو بردار همواره‌یک بردار است .

۲) $a+b=b+a$ (خاصیت جابجایی جمع) ۳) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (خاصیت شرکت پذیری جمع)

۴) $a+o=o+a=a$ (بردار صفرعضو خنثی جمع) ۵) $a+(-a)=(-a)+a=o$ ($-a$ بردار قرینه a)

۶) $1a=a$ ۷) $ro=o$ ۸) $\cdot a=o$ ۹) $r(a+b)=ra+rb$

۱۰) $(r+s)a=ra+sa$ ۱۱) $r(sa)=(rs)a$

بردارجهت a (بردار یکه نظیر بردار a) : به ازای هر بردار غیر صفر a، بردار جهت a با برداری به اندازه واحد طول که موازی و هم جهت با a است مشخص می شود . این بردار را با نماد e_a نشان داده و به صورت زیر محاسبه می کنند . $\vec{e}_a=\frac{1}{|a|}\vec{a}$

نکته : الف : دو بردار a و b هم جهت اند اگر و تنها اگر $e_a=e_b$

ب : دو بردار a و b مختلف الجهت اند اگر و تنها اگر $e_a=-e_b$

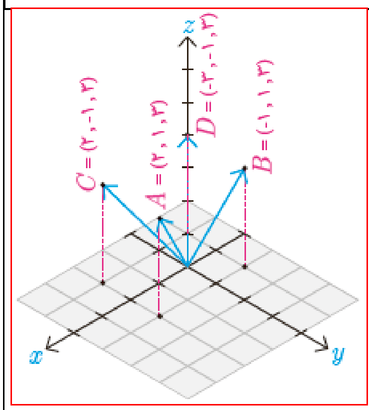
نتیجه : اگر $r>\cdot$ باشد آنگاه $e_{ra}=e_a$ و اگر $r<\cdot$ باشد آنگاه $e_{ra}=-e_a$

تمرین۱) چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده اند.

الف) معادلات مشخص کننده سطح محدود شده به چهارضلعی $ABCD$ را بنویسید.

ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح $ABCD$ هم مساحت و موازی هستند را بنویسید.

(ص۷۷کتاب جدید)



تمرین۲) نقاط با مختصات $P(1,0,1)$، $Q(0,-1,-2)$، $R(3,0,-1)$ و $S(-2,-2,-2)$ را در یک دستگاه مختصات نمایش دهید.
(ص۷۷کتاب جدید)

تمرین۳) در سؤال قبل طول پاره خط های PQ، RQ و PS را بیابید. (ص۷۷کتاب جدید)

تمرین۴)فرض کنید $P=(x_0,y_0,z_0)$ و $Q(x_1,y_1,z_1)$ مختصات نقطه M وسط پاره خط PQ را بیابید. (ص۷۷کتاب جدید)

تمرین۵) در هر کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بیابید.

الف) $\vec{a}=(-\frac{1}{3},0,2)$ ، $\vec{b}=(\sqrt{2},1,1)$ ، $r=3$، $r\vec{a}-\vec{b}=?$

ب) $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{b}=(3,1,-1)$ ، $r=-1$، $r\vec{a}+\vec{b}=?$

ج) $\vec{a}=\sqrt{2}\vec{i}-\vec{k}$ ، $\vec{b}=3\vec{j}+\vec{k}$ ، $r=\frac{1}{5}$، $r\vec{a}+\vec{b}=?$

د) $\vec{a}=5\vec{k}+\vec{j}$ ، $\vec{b}=-\vec{k}+\vec{i}$ ، $r=\frac{1}{5}$، $r\vec{a}+\vec{b}=?$ (ص۷۷کتاب جدید)

تمرین۶) طول بردار $\vec{a}$ را در هر یک از حالات سؤال قبل بیابید.   (ص۷۷کتاب جدید)

ضرب داخلی دو بردار (ضرب اسکالر، ضرب نقطه ای دو بردار) : فرض کنیم a و b دو بردار غیر صفر و θ زاویه بین آن ها باشد. در این صورت ضرب داخلی a در b را که با نماد $a.b$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$a.b = |a||b|\text{Cos}\theta \quad \text{و} \quad ۰ \le \theta \le \pi$$

قرارداد : اگرحداقل یکی از دو بردار a یا b صفر باشد آنگاه $a.b = ۰$

نتیجه (دستور تعیین زاویه‌ی بین دو بردار) : فرض کنیم a و b دو بردار غیر صفر باشند و θ زاویه بین آن ها باشد .

در این صورت $\text{Cos}\theta = \dfrac{a.b}{|a||b|}$

مثال) اگر بردارهای a و b با هم زاویه‌ی ۱۲۰ درجه بسازند و $|a| = ۳$ و $|b| = ۲$، حاصل ضرب داخلی این دو بردار چه قدر است؟

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۴-

جواب : گزینه ۳ درست است. $a.b = |a||b|\cos\theta = ۳ \times ۲ \times (-\frac{۱}{۲}) = -۳$

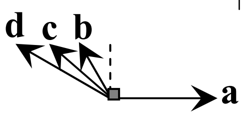
مثال) اگر $۲ = |b| = -a.b = ۲|a|$ باشد، زاویه بین دو بردار a و b کدام است؟

۱) ۶۰درجه ۲) ۹۰درجه ۳) ۱۲۰درجه ۴) ۱۸۰درجه

جواب : گزینه ۴ درست است. $|b| = -a.b = ۲|a| = ۲ \Rightarrow |a| = ۱$

$$-a.b = ۲ \Rightarrow -|a||b|\cos\theta = ۲ \Rightarrow -۱\times ۱\times ۲\cos\theta = ۲ \Rightarrow \cos\theta = -۱ \Rightarrow \theta = ۱۸۰^\circ$$

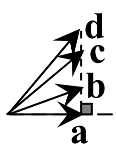
مثال) در شکل زیر حاصل ضرب داخلی کدام دو بردار از سایرین بزرگ تر است؟



۱) $a.b$ ۲) $a.c$ ۳) $a.d$ ۴) هر سه یکسان است.

جواب : گزینه ۱ صحیح است. بردارهای b و c و d را روی راستای بردار a تصویر می کنیم. تصویر این بردارها در خلاف جهت بردار a خواهند بود لذا اندازه‌ی جبری تصویر آن ها بر راستای بردار a منفی است در نتیجه هر کدام اندازه‌ی تصویر بزرگ تری بدهد منفی تر است. یعنی : $a.d < a.c < a.b$

مثال) با توجه به شکل مقابل، حاصل عددی کدام گزینه بزرگتر است؟

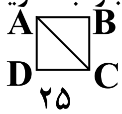


۱) $a.b$ ۲) $a.c$ ۳) $a.d$ ۴) هر سه یکسان

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $a.b = |a|(|b|\cos\theta) = |a||a| = |a|^۲$ و به طریق مشابه $a.c = a.d = |a|^۲$

مثال) نقاط $A(۲,۱,-۱)$ و $C(۲,-۲,۳)$ دو رأس غیر مجاور مربع $ABCD$ هستند. حاصل $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) $\frac{۲۵}{۲}$ ۳) $۲۵\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۲۵}{\sqrt{۲}}$

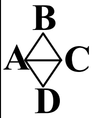


جواب : گزینه ۲ صحیح است.   اندازه‌ی قطر مربع $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(۲-۲)^۲ + (-۲-۱)^۲ + (۳+۱)^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$

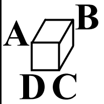
$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AD}\right| = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left|\overrightarrow{AC}\right| = \frac{۵\sqrt{۲}}{۲} \text{ اندازه‌ی ضلع مربع} \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos ۴۵^\circ = ۵ \times \frac{۵\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲۵}{۲}$$

۱۳) در لوزی شکل داده شده $\left|\overrightarrow{AC}\right| = ۴$ و $\left|\overrightarrow{AD}\right| = ۴$ مجموع حاصل ضرب های داخلی $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) -۸   ۳) ۸   ۴) -۱۶   (کنکور آزاد ریاضی صبح ۸۹)



مثال) در مکعب شکل زیر به ضلع ۳ حاصل ضرب داخلی $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ چقدر است؟



۱) ۹   ۲) ۱۸   ۳) صفر   ۴) ۲   (کنکور ریاضی عصر آزاد ۸۵)

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

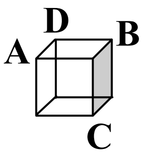
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|AB\right|\left|AC\right|\cos ۶۰ = \sqrt{۲} \times ۳ \times \sqrt{۲} \times ۳ \times \frac{۱}{۲} = ۹$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \left|AC\right|\left|AD\right|\cos ۴۵ = \sqrt{۲} \times ۳ \times ۳ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۹$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = ۹ + ۹ = ۱۸$$

۱۴) در مکعب شکل زیر اندازه هر ضلع مکعب ۱ است، حاصل $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) -۲   ۴) -۱

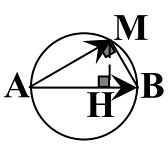


مثال) نقاط A و B در صفحه مفروض اند. اگر $\left|AB\right| = ۴$ باشد، چند نقطه مانند M روی محیط دایره ای به قطر AB وجود دارد که $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = ۳۲$ باشد؟

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۴   (کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۸)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : زاویه M محاطی و روبرو به قطر است پس قائمه می باشد لذا داریم :

$$\cos A = \frac{\left|AH\right|}{\left|AM\right|} \Rightarrow \left|AH\right| = \left|AM\right|\cos A$$

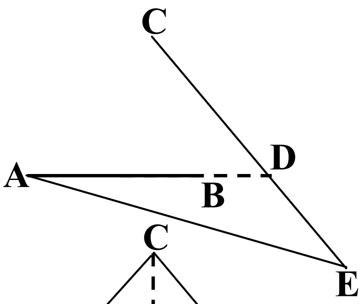


$$\vec{AB}.\vec{AM} = ۳۲ \Rightarrow |AB||AM|\cos A = ۳۲ \Rightarrow ۴|AM|\cos A = ۳۲ \Rightarrow |AM|\cos A = ۸ \Rightarrow |AH| = ۸$$

پس چنین نقطه ای وجود ندارد.

روش دوم : بنا به تعریف ضرب نقطه ای داریم : $\vec{AB}.\vec{AM} = |AB||AM|\cos A$ چون $۰ \le \hat{A} \le ۹۰$ پس $\cos A \le ۱$ ازطرفی

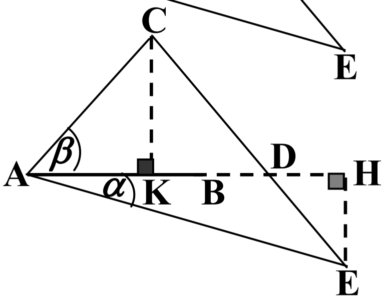
$|AM| \le |AB| = ۴$ در نتیجه همواره داریم : $\vec{AB}.\vec{AM} = |AB||AM|\cos A \le ۱۶$



مثال) با توجه به شکل کدام گزینه عددی بزرگتراست؟

۱) $(\vec{AB}.\vec{AD})$ ۲) $(\vec{AB}).(\vec{AE})$ ۳) $(\vec{AD}).(\vec{AC})$ ۴) هرسه یکسان است.

(کنکور آزاد ریاضی صبح ۸۳)



جواب : گزینه ۲ درست است.

$$(\vec{AB}.\vec{AD}) = |AB||AD|\cos 0 = |AB||AD|$$

$$(\vec{AB}).(\vec{AE}) = |AB||AE|\cos\alpha = |AB||AH| > |AB||AD|$$

$$(\vec{AD}).(\vec{AC}) = |AD||AC|\cos\beta = |AD||AK| < |AD||AB|$$

خواص (ویژگی های) ضرب داخلی :

فرض کنیم a و b و c سه بردار و $r \in R$ باشد دراین صورت :

الف : ضرب داخلی بردارها در فضا بسته نیست یعنی حاصل ضرب داخلی دو بردار یک بردار نیست.

ب : (ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد) $a.b = b.a$

اثبات : $\vec{a}.\vec{b} = a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳ = b_۱a_۱ + b_۲a_۲ + b_۳a_۳ = \vec{b}.\vec{a}$

پ : در حالت کلی ضرب داخلی بردارها خاصیت شرکت پذیری ندارد.

ت : ضرب داخلی دو بردار دارای عضو خنثی نیست.

ث : ضرب داخلی دو بردار دارای عضو وارون نیست.

ج : ضرب داخلی بردارها دارای خاصیت حذف نمی باشد. به عبارت دیگر در حالت کلی $b = c \not\Leftarrow a.b = a.c$ و $a \ne o$

چ : $ra.b = a.(rb) = r(a.b)$

ح : $a.a = |a||a| \Rightarrow a.a \ge ۰$ و $a.a = x^۲ + y^۲ + z^۲$

اثبات : $\vec{a}.\vec{a} = a_۱a_۱ + a_۲a_۲ + a_۳a_۳ = a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲ = |\vec{a}|^۲$

خ : حالت خاص : $i.i = j.j = k.k = ۱$

د : (ضرب داخلی نسبت به اعمال جمع و تفریق بردارها دارای خاصیت پخشی است) $a.(b \pm c) = a.b \pm a.c$

اثبات : $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = a_۱(b_۱ + c_۱) + a_۲(b_۲ + c_۲) + a_۳(b_۳ + c_۳)$

$= a_۱b_۱ + a_۱c_۱ + a_۲b_۲ + a_۲c_۲ + a_۳b_۳ + a_۳c_۳$

$= a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳ + a_۱c_۱ + a_۲c_۲ + a_۳c_۳ = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

ذ : ضرب داخلی دو بردار غیرصفر عددی است مثبت یا صفر یا منفی اگر و تنها اگر زاویه‌ی بین بردارها صفر یا قائمه یا حاده یا منفرجه

یا ۱۸۰ درجه باشد.

$$\begin{cases} a,b\neq ۰, a.b>۰ \Leftrightarrow ۰\leq \hat{\theta}<\frac{\pi}{۲} \\ a,b\neq ۰, a.b=۰ \Leftrightarrow \hat{\theta}=\frac{\pi}{۲} \\ a,b\neq ۰, a.b<۰ \Leftrightarrow \frac{\pi}{۲}<\hat{\theta}\leq \pi \end{cases}$$

اثبات :
$$a,b\neq o \text{ و } a.b=۰ \Leftrightarrow |a||b|\text{Cos}\theta=۰ \overset{|\vec{a}|\neq ۰}{\underset{|\vec{b}|\neq ۰}{\Leftrightarrow}} \text{Cos}\theta=۰ \overset{۰\leq\theta\leq\frac{\pi}{۲}}{\Leftrightarrow} \hat{\theta}=\frac{\pi}{۲} \Leftrightarrow a\perp b$$

ر : حالت خاص : $i.j=۰$ و $j.k=۰$ و $k.i=۰$

ز : $a.b=a.c \Rightarrow a\perp(b-c)$

ژ : اگر دو بردار بر هم عمود و یا حداقل یکی از آنها صفر باشد آن گاه ضرب داخلی دو بردار صفر است.

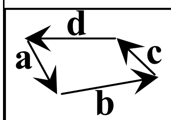
س : $\vec{a}\,.\,\vec{o}=۰$ و $\vec{o}\,.\,\vec{a}=۰$

مثال) ضرب درونی بردارها در فضا کدام ویژگی را دارد؟

۱) بسته بودن ۲) جابجایی ۳) شرکت پذیری ۴) عضوخنثی (کنکور سراسری ریاضی ۷۰)

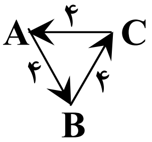
جواب : گزینه ۲ صحیح است.

نکته : اگر برآیند چند بردار صفر باشد، در این صورت نقطه‌ی ابتدایی اولین بردار و نقطه‌ی انتهایی آخرین بردار بر روی هم بوده اند . به عنوان مثال :



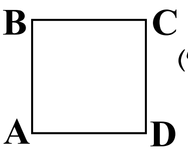
$\Leftrightarrow a+b+c+d=o$

۱۵) در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۴، حاصل $\vec{AB}\,.\,\vec{AC}+\vec{BC}\,.\,\vec{AC}+\vec{AB}\,.\,\vec{BC}$ چه قدر است؟



۱) ۸- ۲) ۲۴ ۳) ۲۴- ۴) ۸ (کنکور آزاد ریاضی۸۹خارج از کشور)

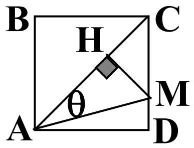
مثال) با توجه به شکل چند نقطه مانند M روی محیط مربع $ABCD$ وجود دارد که $\vec{AM}\,.\,\vec{AC}=\frac{۱}{۲}|AC|^۲$



۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) بیشمار (کنکور آزاد ریاضی صبح ۹۰)

جواب :. گزینه ۳ صحیح است.

$$\vec{AM}\,.\,\vec{AC}=\frac{۱}{۲}|AC|^۲ \Rightarrow |\vec{AM}||\vec{AC}|\cos\theta=\frac{۱}{۲}|AC|^۲ \Rightarrow |\vec{AM}|\cos\theta=\frac{۱}{۲}|AC| \Rightarrow |AH|=\frac{۱}{۲}|AC|$$



پس H تصویر نقاط D و B است. لذا فقط دو نقطه D و B دارای چنین ویژگی هستند.

مثال) اگر $|\vec{a}|=۲$ و $|\vec{b}|=۳$ و $\vec{a}.\vec{b}=۴$ باشد، حاصل ضرب داخلی $(\vec{a}+۲\vec{b}).(۳\vec{a}+\vec{b})$ چقدر است؟

۱) ۲۸ ۲) ۵۸ ۳) ۳۰ ۴) ۵۰ (کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۹)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. $(\vec{a}+۲\vec{b}).(۳\vec{a}+\vec{b})=۳|\vec{a}|^۲+۷\vec{a}.\vec{b}+۲|\vec{b}|^۲=۱۲+۲۸+۱۸=۵۸$

مثال) الف) تحقیق کنید به ازاء هر دو بردار u و $v\ (v\neq ۰)$, بردار $u-\frac{(u.v)v}{|v|^۲}$ بر بردار v عمود است.

جواب : $v.(u-\frac{(u.v)v}{|v|^۲})=v.u-\frac{(u.v)(v.v)}{|v|^۲}=v.u-v.u=۰$

ب) تحقیق کنید به ازاء هر سه بردار غیر صفر a و b و c بردار $b(a.c)-c(a.b)$ بر بردار a عمود است.

جواب : $a.[b(a.c)-c(a.b)]=(a.b)(a.c)-(a.c)(a.b)=۰$

مثال) در کدام حالت حاصل ضرب عددی بردار غیر صفر $\vec{a}$ در مجموع دو بردار غیر صفر $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ صفر نمی باشد؟

۱) بردار $\vec{X}$ قرینه بردار $\vec{Y}$
۲) بردار $\vec{a}$ فقط بر یکی از دو بردار $\vec{X}$ یا $\vec{Y}$ عمود.
۳) سه بردار دو به دو عمود بر هم.
۴) بردار $\vec{a}$ بر صفحه دو بردار $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ عمود. (کنکور سراسری ریاضی ۸۶)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $a\perp X, a\not\perp Y\Rightarrow a.(X+Y)=a.X+a.Y=۰+a.Y\neq ۰$

مثال)اگر a و b دو بردار هم اندازه بوده و دو بردار $a-۲b$ و $۵a+۴b$ بر هم عمود باشند زاویه‌ی بین دو بردار a و b کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $(a-۲b)\perp(۵a+۴b)\Rightarrow(a-۲b).(۵a+۴b)=۰\Rightarrow ۵|a|^۲-۶a.b-۸|b|^۲=۰$

$$\xrightarrow{|a|=|b|}-۶\cos\theta-۳=۰\Rightarrow\cos\theta=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{۲\pi}{۳}$$

مثال) اگر بردارهای a و b قطرهای یک مربع باشند، m چقدر باشد که $۲a-b$ و $a+mb$ قطرهای یک لوزی باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

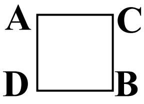
جواب : گزینه ۲ صحیح است. $|a|=|b|$ و $a\perp b\Rightarrow a.b=۰$ و $(۲a-b)\perp(a+mb)\Rightarrow(۲a-b).(a+mb)=۰$

$$۲|a|^۲-m|b|^۲+(۲m-۱)a.b=۰\Rightarrow ۲|a|^۲=m|b|^۲\Rightarrow m=۲$$

۱۶) اگر بردارهای a و b قطرهای یک مربع باشند، m چقدر باشد که $۳a-۲b$ و $۲a+mb$ قطرهای یک لوزی باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مثال) در مربع $ABCD$ به قطر ۲ حاصل $\vec{AB}.\vec{AD}+\vec{AB}.\vec{AB}+\vec{AB}.\vec{AC}$ برابر است با :

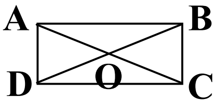


۱) ۸   ۲) ۶   ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $8\sqrt{2}$ (کنکور ریاضی صبح آزاد ۸۴)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$\vec{AB}.\vec{AC}+\vec{AB}.\vec{AB}+\vec{AB}.\vec{AD}=\vec{AB}.(\vec{AC}+\vec{AD}+\vec{AB})=\vec{AB}.2\vec{AB}=2\left|\vec{AB}\right|^2=8$$

مثال) در مستطیل $ABCD$ به اضلاع $AB=12$ و $BC=5$ نقطه O نقطه تلاقی اقطار است حاصل ضرب داخلی $\vec{AO}.\vec{AD}+\vec{AO}.\vec{AB}$ کدام است؟



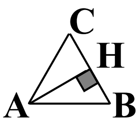
۱) $\frac{169}{2}$ ۲) ۹۷   ۳) ۶۱   ۴) $\frac{97}{2}$ (کنکور ریاضی صبح آزاد ۸۵)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$AC=\sqrt{144+25}=13 \text{ و } AO=\frac{13}{2}$$

$$\vec{AO}.\vec{AB}+\vec{AO}.\vec{AD}=\vec{AO}.(\vec{AB}+\vec{AD})=\vec{AO}.\vec{AC}=|AO||AC|\cos 0=\frac{13}{2}\times 13=\frac{169}{2}$$

۱۷) در مثلث متساوی الاضلاع شکل زیر به ضلع ۲ حاصل $\vec{AH}.\vec{AC}+\vec{AH}.\vec{AB}+\vec{AH}.\vec{AH}$ چقدر است؟



۱) ۹   ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) ۱۲   (کنکور ریاضی عصر آزاد ۸۴)

نکته : اگر a و b و c سه بردار دلخواه و $a+b$ و $a-b$ دو قطر بنا شده روی دو بردار a و b باشند، آنگاه داریم :

الف : $(a+b).(a-b)=|a|^2-|b|^2$ ب : $(a+b)\perp(a-b)\Leftrightarrow |a|=|b|$

پ : $|a\pm b|^2=(a\pm b).(a\pm b)=|a|^2+|b|^2\pm 2a.b$ ت : $|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$

ث : $|a+b|^2-|a-b|^2=4a.b$ ج : $|a+b|\le|a|+|b|$ (نامساوی مثلثی)

چ : فرض کنید a و b دو بردار غیر صفر باشند اگر $\vec{a}\perp\vec{b}$ آنگاه $|a\pm b|^2=|a|^2+|b|^2$

ح : $|a+b+c|^2=|a|^2+|b|^2+|c|^2+2a.b+2a.c+2b.c$

نتیجه : اگر $a+b+c=o$ آنگاه : $a.b+b.c+c.a=-\frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2+|c|^2)$

مثال) اگر e_1 و e_2 دو بردار واحد و $|e_1+e_2|=\sqrt{2}$ باشد حاصل $(e_1-e_2).(3e_1+e_2)$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل : $|e_1+e_2|=\sqrt{2}\Rightarrow |e_1|^2+|e_2|^2+2e_1.e_2=2\Rightarrow e_1.e_2=0$

روش دوم : چون $|e_1|=|e_2|=1$ و $|e_1+e_2|=\sqrt{2}$ پس $e_1\perp e_2$ در نتیجه : $e_1.e_2=0$

$$(e_1-e_2).(3e_1+e_2)=3|e_1|^2-2e_1.e_2-|e_2|^2=3-0-1=2$$

مثال) هرگاه e_a و e_b بردارهای واحد و $e_{a+b}=e_a+e_b$، اندازه‌ی بردار e_a-e_b کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۱/۵

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$|e_{a+b}|^2=|e_a+e_b|^2\Rightarrow 1=|e_a|^2+|e_b|^2+2|e_a||e_b|\cos\theta\Rightarrow 1=1+1+2\cos\theta\Rightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2}$$

$$|e_a-e_b|^2=|e_a|^2+|e_b|^2-2|e_a||e_b|\cos\theta=1+1-2(-\frac{1}{2})=3\Rightarrow |e_a-e_b|=\sqrt{3}$$

۱۸) برای دو بردار غیر صفر a و b که $|a+b|<|a-b|$ و زاویه بین آنها θ است، حدود θ کدام است؟

۱) $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ ۲) $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$ ۴) $\frac{\pi}{2}<\theta\le\pi$

مثال) اگر $a=(1,0,-2)$، $|b|=\sqrt{5}$ و $a.b=-4$ باشد، اندازه بردار $a-b$ چند برابر اندازه بردار $a+b$ است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۲

جواب :گزینه ۳ صحیح است. روش اوّل : $\frac{|a-b|^2}{|a+b|^2}=\frac{|a|^2+|b|^2-2a.b}{|a|^2+|b|^2+2a.b}=\frac{5+5-2(-4)}{5+5+2(-4)}=\frac{18}{2}=9\Rightarrow\frac{|a-b|}{|a+b|}=3$

روش دوم : $|a|=\sqrt{5}$ و $a.b=-4\Rightarrow\sqrt{5}\times\sqrt{5}\cos\theta=-4\Rightarrow\cos\theta=-\frac{4}{5}$

$$|a-b|^2=|a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos\theta=5+5-2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times(-\frac{4}{5})=18\Rightarrow|a-b|=3\sqrt{2}$$

$$|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos\theta=5+5+2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times(-\frac{4}{5})=2\Rightarrow|a-b|=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{|a-b|}{|a+b|}=3$$

۱۹) اگر $a=(-1,1,1)$، $|b|=\sqrt{2}$ و $a.b=-2$ باشد، اندازه بردار $a-b$ چند برابر اندازه بردار $a+b$ است؟

۱) ۹ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲۷

مثال)دوبردار a و b مفروض اند،اگر $|a|^2+|b|^2=15$ و $|a+b|=3|a-b|$،آنگاه حاصل ضرب داخلی دوبردار a و b کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۶- ۴) ۸-

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$|a+b| = 3|a-b| \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 + 2a.b = 9(|a|^2 + |b|^2 - 2a.b)$$

$$\Rightarrow 20a.b = 8(|a|^2 + |b|^2) \Rightarrow 20a.b = 8 \times 15 \Rightarrow a.b = 6$$

مثال) با فرض $|a| = 2$ و $|b| = 3$ و $|c| = \sqrt{7}$ و $a + b + c = 0$ زاویه‌ی بین دو بردار a و b کدام است؟

۱) ۳۰ درجه ۲) ۶۰ درجه ۳) ۱۲۰ درجه ۴) ۱۵۰ درجه

جواب : گزینه۳ درست است.

$$\Rightarrow |a+b|^2 = |-c|^2 \Rightarrow 4 + 9 + 2a.b = 7 \Rightarrow a.b = -3 \Rightarrow \cos\theta = \frac{-3}{2\times 3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120^\circ$$

مثال) اگر a، b و c سه بردار با اندازه های ۴ و ۳ و ۵ باشند به طوری که $a + b + c = o$ حاصل $a.b + b.c$ کدام است؟

۱) -۲۵ ۲) ۱۶ ۳) -۹ ۴) -۱۶

جواب : گزینه ۳ صحیح است.روش اوّل :

$$a.b + b.c = b.(a+c) = b.(-b) = -|b|^2 = -9$$

روش دوم : با توجه به رابطه‌ی

$$a + b = -c \Rightarrow |a+b|^2 = |-c|^2 \Rightarrow a.b = \frac{1}{2}(|c|^2 - |a|^2 - |b|^2)$$

می توان نوشت :

$$a.b + b.c = \frac{1}{2}(|c|^2 - |a|^2 - |b|^2) + \frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2 - |c|^2) = -|b|^2 = -9$$

۲۰) اگر بردارهای $v_1 + v_2$ و $v_1 - v_2$ هر دو بر بردار v_3 عمود باشند و سه بردار هم صفحه باشند و $|v_1| = 4$ و $|v_2| = 3$ حاصل ضرب داخلی $(v_1 - v_2).(v_1 + v_2)$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱ ۴) ۲ (کنکور آزاد ریاضی ۸۲ صبح)

۲۱) اگر بردار $a(m,2,-1)$ و $|b| = \sqrt{41}$، دو بردار $a + b$ و $a - b$ عمود بر هم باشند، مقدار مثبت m کدام است؟

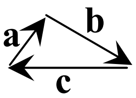
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ (کنکور سراسری ریاضی ۸۵)

۲۲) اگر $|\vec{b}| = |\vec{a}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ باشند، آنگاه زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است؟

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۰ (کنکور سراسری تجربی ۸۸)

مثال)درشکل مقابل اندازه بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به ترتیب برابر ۳ و ۵ و ۶ است.حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

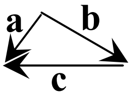
۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲ (کنکور سراسری ریاضی۸۰)



جواب : گزینه۳ درست است.

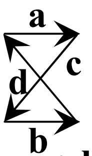
$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}\Rightarrow |a|^{۲}+|b|^{۲}+۲a.b=|c|^{۲}\Rightarrow ۲a.b=۲\Rightarrow a.b=۱$$

۲۳)درشکل مقابل اندازه بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به ترتیب برابر ۳ و ۵ و ۶ است.حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟



۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

مثال) در شکل مقابل، اگر $|a|=|b|=۲$ و $|c|=|d|=۳$ باشند، آنگاه حاصل $a.b-c.d$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۱- ۴) ۵-

جواب : گزینه ۲ درست است. $a+b+c+d=\circ\Rightarrow a+b=-c-d\Rightarrow (a+b).(a+b)=(-c-d).(-c-d)$

$$\Rightarrow |a|^{۲}+۲a.b+|b|^{۲}=|c|^{۲}+۲c.d+|d|^{۲}\Rightarrow ۴+۲a.b+۴=۹+۲c.d+۹\Rightarrow a.b-c.d=۵$$

۲۴) اگر $|\vec{a}|=|\vec{b}|=۶$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=۱۸$ آنگاه $|\vec{a}-\vec{b}|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶ (کنکور نظام قدیم تجربی ۷۵)

مثال)درمتوازی الاضلاعی اندازه دو ضلع مجاورآن ۶ و ۸ و اندازه یکی از قطرهای آن $۲\sqrt{۱۴}$ می باشد اندازه قطر دیگر آن کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $(۲\sqrt{۱۴})^{۲}+x^{۲}=۲(۶^{۲}+۸^{۲})\Rightarrow x^{۲}=۱۴۴\Rightarrow x=۱۲$

مثال) مجموع مربع های طول های دو قطر متوازی الاضلاعی که روی دو بردار a و b با طول های $|a|=۳\sqrt{۲}$ و $|b|=۲\sqrt{۳}$ بنا می شود، کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۴ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $|a+b|^{۲}+|a-b|^{۲}=۲(|a|^{۲}+|b|^{۲})=۲(۱۸+۱۲)=۶۰$

۲۵) اگر $|\vec{b}|=۲|\vec{a}|=۲$ و $\vec{a}\,.\,\vec{b}=۰$ آنگاه $|\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{a}-\vec{b}|$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۵}$ (کنکور سراسری تجربی ۸۶خارج از کشور)

۲۶) اگر a و b دو بردار باشند بطوری که $|a+b| = ۴$ و $|a-b| = ۲\sqrt{۳}$، حاصل $a.b$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲   ۴) ۳

مثال) نقاط $A(۱,۲,-۲)$ و $B(۵,۲,۱)$ مفروضند اگر M نقطه متغیری باشد بگونه ای که $|MA|+|MB|$ کمترین مقدار ممکن باشد $|MA|+|MB|$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۳   ۳) ۵   ۴) ۷

جواب : گزینه ۳ درست است. $|AB| \le |MA|+|MB| \Rightarrow \min = |AB| = \sqrt{۱۶+۰+۹} = ۵$

۲۷) سه بردار a و b و c با اندازه‌ی ۳ و ۴ و ۷ واحددر رابطه‌ی $a+b+c=o$ صدق می کنند، مقدار $a.b+b.c+c.a$ کدام است؟

۱) -۳۷   ۲) -۱۹   ۳) ۱۹   ۴) ۳۷   (کنکور سراسری ریاضی۸۷خارج از کشور)

مثال)فرض کنید a و b بردارهایی باشند به ترتیب به طول های۱ و۳ با این خاصیت که $a+b+۲c=o$. مقدار $a.b+b.c+c.a$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) -۱   ۳) -۵   ۴) ۵

جواب :گزینه ۳ صحیح $a+b+۲c=o \Rightarrow a+b+c=-c \Rightarrow |a|^۲+|b|^۲+|c|^۲+۲(a.b+b.c+c.a)=|-c|^۲$

$\Rightarrow ۱+۹+۲(a.b+b.c+c.a)=۰ \Rightarrow a.b+b.c+c.a=-۵$

مثال) اگر $|a|=۲$ و $|b|=۳$ و $|c|=۶$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=۰$ باشد اندازه $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ کدام است؟

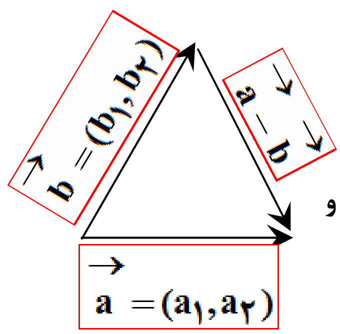
۱) ۱   ۲) ۵   ۳) ۷   ۴) ۹   (کنکور آزاد ریاضی صبح ۸۶)

جواب : گزینه ۳ درست است. $|a+b+c| = \sqrt{|a|^۲+|b|^۲+|c|^۲+۲(a.b+a.c+b.c)} = \sqrt{۴+۹+۳۶} = ۷$

فرض کنید $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲)$ دو بردار غیر صفر و θ $(۰\le\theta\le\pi)$ زاویه‌ی بین آنها باشد آنگاه داریم :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲} \quad \text{و} \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_۱^۲+b_۲^۲}$$

و



$$\vec{a}-\vec{b}=(a_۱-b_۱,a_۲-b_۲) \Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{(a_۱-b_۱)^۲+(a_۲-b_۲)^۲}$$

با استفاده از قضیه کسینوس ها می توان نوشت :

$$|\vec{a}-\vec{b}|^۲ = |\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow (a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow -2(a_1b_1+a_2b_2)=-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow a_1b_1+a_2b_2=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

با انتخاب $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ می توان نوشت : $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

ودرنتیجه

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a.b}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

به طور مشابه ضرب داخلی دو بردار در R^3 نیز قابل تعریف است. (ص۷۸کتاب جدید)

تعریف ضرب درونی مختصاتی: اگر $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در R^3 باشند، دراین صورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a}.\vec{b}$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم. $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

به عبارت دیگر : $\vec{a}.\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

مثال) حاصل ضرب داخلی دو بردار $v_2(2,-1,0)$ و $v_1(-1,3,4)$ برابر است با :

۱) ۶ ۲) ۵- ۳) ۲ ۴) ۵ (کنکور آزاد ریاضی۷۲)

جواب : گزینه ۲ درست است. $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=-1\times 2+3\times(-1)+4\times 0=-5$

۲۸) اگر $a=4i-5j+3k$ و $b=i+2j+3k$ حاصل ضرب داخلی بردار $a+b$ در بردار $a-b$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۳۶ ۴) ۶۴

مثال) اگر $a=(1,2,0)$ و $b=(m,m,-1)$ دو بردار و $|a+b|=|a-b|$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

جواب : گزینه ۲ صحیح است. متوازی الاضلاعی که دو قطرش با هم برابر باشد مستطیل است پس $a\perp b$

و درنتیجه : $a.b=0\Rightarrow m+2m=0\Rightarrow m=0$

۲۹) بردار $a(2,3,6)$ و بردار b موازی با a می باشد اگر $a.b=98$ باشد تصاویر بردار b کدام است؟

۱) $(12,6,4)$ ۲) $(1,8,12)$ ۳) $(4,6,12)$ ۴) $(2,3,6)$

۳۰) دو نقطه‌ی ثابت $A(2,4,-4)$ و $B(-2,-4,4)$ و نقطه‌ی متغیر M را در نظر می گیریم. اگر $\vec{AM}$ بر $\vec{BM}$ عمود باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی M از مبدأ مختصات چند واحد است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۳۶

نتیجه : فرض کنید $a(a_1,a_2,a_3)$ و $b(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند، دراین صورت

$$a,b\neq o \text{ و } a\perp b \Leftrightarrow a.b=0 \Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

به عبارت دیگر :
$$a,b\neq o \text{ و } a\perp b \Leftrightarrow a.b=0 \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$$

مثال) اگر بردارهای $u(-2a,2,-3)$ و $v(-5,2,3a+2)$ بر هم عمود باشند، مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

جواب : گزینه۳ درست است. $u\perp v\Rightarrow 10a+4-9a-6=0\Rightarrow a=2$

مثال) دو بردار a و b با تصویر های $(1,\alpha+1,2\alpha)$ و $(2,0,-1)$ مفروض اند، به ازای کدام مقادیر α بردارهای $a+b$ و $a-b$ عمود بر هم اند؟

۱) ۰/۴ و ۱- ۲) ۰/۶ و ۱- ۳) ۰/۴ و ۱ ۴) ۰/۶ و ۱ (کنکور سراسری ریاضی ۸۹)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل : $(a+b)\perp(a-b)\Rightarrow(a+b).(a-b)=0\Rightarrow|a|=|b|\Rightarrow$

$$\sqrt{1+(\alpha+1)^2+(2\alpha)^2}=\sqrt{4+0+1}\Rightarrow 5\alpha^2+2\alpha+2=5\Rightarrow 5\alpha^2+2\alpha-3=0$$

$$\Rightarrow \alpha=-1 \text{ و } \alpha=-\frac{c}{a}=\frac{3}{5}=0/6$$

روش دوم : $(a+b)=(3,\alpha+1,2\alpha-1)$ و $(a-b)=(-1,\alpha+1,2\alpha+1)\Rightarrow(a+b)\perp(a-b)\Rightarrow$

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0\Rightarrow -3+(\alpha+1)^2+(2\alpha+1)(2\alpha-1)=0\Rightarrow 5\alpha^2+2\alpha-3=0$$

$$\Rightarrow \alpha=-1 \text{ و } \alpha=-\frac{c}{a}=\frac{3}{5}=0/6$$

۳۱) با فرض $a=(3,m,5)$ و $b=(3-m,7,0)$، به ازای یک مقدار m دو بردار $a+b$ و $a-b$ عمود بر هم هستند. زاویه‌ی بین دو بردار a و b در این حالت، چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۵)

مثال) نقاط $A(0,1,2)$ و $B(m,2,3)$ و $C(1,0,2)$ سه راس مثلث ABC هستند که در راس A قائمه است. m کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۲-   ۴) ۱-

جواب : گزینه ۱ صحیح است. $\overrightarrow{AB}(m,1,1)$ و $\overrightarrow{AC}(1,-1,0)$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow m-1+0=0 \Rightarrow m=1$

نتیجه : فرض کنید $a(a_1,a_2,a_3)$ و $b(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند، دراین صورت

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

به عبارت دیگر :

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

۳۲) زاویه‌ی بین دو بردار $\overrightarrow{v_1}(2,3,-3)$ و $\overrightarrow{v_2}(3,2,4)$ چقدر است؟

۱) ۱۲۰ درجه   ۲) ۹۰ درجه   ۳) ۶۰ درجه   ۴) ۳۰ درجه   (کنکور آزاد ریاضی ۶۸)

مثال) زاویه‌ی بین بردارهای واقع بر نیمسازهای دو صفحه xoy و yoz چند درجه است؟

۱) ۳۰   ۲) ۴۵   ۳) ۶۰   ۴) ۹۰

جواب : گزینه ۳ صحیح است. نیمساز های این دو صفحه بردارهای $a(1,1,0)$ و $b(0,1,1)$ می باشد و $|a|=|b|=\sqrt{2}$

$$\cos\theta=\frac{a.b}{|a||b|}=\frac{0+1+0}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\hat{\theta}=60^\circ$$

۳۳) بر روی دو بردار $a=3i+3j$ و $b=i-j-2k$ متوازی الاضلاعی ساخته شده است. کسینوس زاویه‌ی بین دو قطر این متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$ (کنکور سراسری ریاضی ۹۲ خارج از کشور)

نتیجه : اگر نقاط A و B و C سه راس مثلث ABC باشند آنگاه اندازه‌ی زاویه‌ی A به صورت زیر خواهد بود .

$$\cos\hat{A}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|AB||AC|}$$

۳۴) سه نقطه‌ی $A(2,1,0)$، $B(3,-1,2)$ و $C(-1,1,3)$، رأس های مثلثی هستند. $\cos A$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۳)

نکته : هرگاه $a(a_1, a_2, a_3)$ و $b(b_1, b_2, b_3)$ دو بردار دلخواه باشند، آنگاه :

الف) $|a.b| \le |a||b|$ (نامساوی کشی – شوارتز)

ب) (نکته تستی) $|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

پ : $(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$

۳۵) اگر a و b دو بردار و $a.b = -2$ و $|a| = \sqrt{2}$ باشند آنگاه حداقل مقدار $|b|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) $-\sqrt{2}$

۳۶) اگر $ax - y + \sqrt{3}z = 10$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ باشند، در این صورت حدود a کدام است؟

۱) $-4 \le a \le 4$ ۲) $a \le -4$ ۳) $a \ge 4$ ۴) $a \ge 4$ یا $a \le -4$

۳۷) اگر $x + 2y - 2z = 3$ باشد می نیمم مقدار $x^2 + y^2 + z^2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۹

مثال) هرگاه a_1، a_2 و a_3 سه عدد حقیقی باشند حداکثر $\dfrac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

جواب : گزینه ۲ صحیح $(1a_1 + 1a_2 + 1a_3)^2 \le (1+1+1)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \Rightarrow Max(\dfrac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}) = 3$

۳۸) اگر $3x + 4y - 6z = 41$ باشد می نیمم مقدار $9x^2 + 4y^2 + z^2$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۳۱ ۳) ۴۱ ۴) ۵۱

۳۹)سه عددحقیقی x، y و z درتساوی $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ صدق می کنند.بیش ترین مقدار عبارت $۲x-۲y+z$، کدام است؟

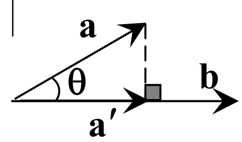
۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۶

۴۰) فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x,۲y,-۲z)$ تا مبدأ مختصات برابر ۶ است بیشترین مقدار $۲x-۴y-۲z$ کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۹   ۳) ۱۸   ۴) ۲۷

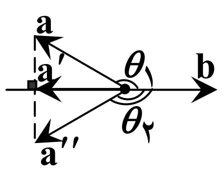
تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$: دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را که زاویه‌ی بین آنها θ است با فرض $۰<\theta<\frac{\pi}{۲}$ در نظر می گیریم. تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ که آن را با $\vec{a}'$ نمایش می دهیم به صورت زیر محاسبه می شود :

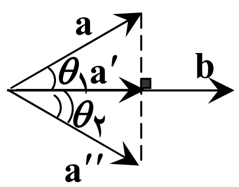
$$\vec{a}'=r\vec{b}\,(\vec{a}-\vec{a}').\vec{b}=۰\Rightarrow(\vec{a}-r\vec{b}).\vec{b}=۰\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}-r\vec{b}.\vec{b}=۰\Rightarrow r=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}$$



$$\Rightarrow\vec{a}'=r\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$$

تصویر و قرینه یک بردار روی یک محور : فرض کنیم a و b دو بردار غیر صفر و θ زاویه‌ی بین آن ها باشد. در این صورت از لحاظ هندسی a' تصویر قائم بردار a روی امتداد بردار غیر صفر b، برداری موازی با بردار b است.





حال اگر $۰\le\theta<\frac{\pi}{۲}$ باشد آنگاه a' موازی و همجهت با b خواهد بود

و اگر $\frac{\pi}{۲}<\theta\le\pi$ باشد آنگاه a' موازی و مختلف الجهت با b خواهد بود.

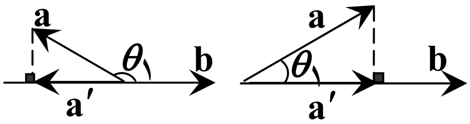
الف) تصویر قائم بردار a روی امتداد بردار غیر صفر b برابر است با :

$$a'=\frac{a.b}{|b|^۲}b$$

ب) قرینه بردار a روی امتداد بردار غیر صفر b برابراست با :

$$a''=۲a'-a=\frac{۲a.b}{|b|^۲}b-a$$

نتیجه : الف : اندازه‌ی تصویر قائم بردار $\mathbf{a}$ روی امتداد بردار نا صفر $\mathbf{b}$ برابر است با $|a'| = \dfrac{|a.b|}{|b|}$



ب : $|a''| = |a|$ یعنی اندازه بردار $\mathbf{a}$ برابر اندازه قرینه بردار $\mathbf{a}$ نسبت به بردار $\mathbf{b}$ است.

پ : $\hat{\theta}_۱ = \hat{\theta}_۲$ یعنی بردار $\mathbf{b}$ نیمساز زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a}$ و a'' است.

ت : $a.a' = a''.a'$

ث : $a' = \dfrac{a + a''}{۲}$ و $a + a'' = ۲a'$

ج : $a = ۲a' - a'' = \dfrac{۲a''.b}{|b|^۲} b - a''$

چ : $a' = \dfrac{a''.b}{|b|^۲} b$

ح : $|a'| = \pm |a| \cos\theta_۱$ و $|a'| = \dfrac{|a''.b|}{|b|}$

خ : $|a'| \le |a|$

د : $a'.a = |a'|^۲ \ge ۰$

مثال : تصویر قائم بردار $\vec{a} = (۲,-۱,۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b} = (۱,-۱,۰)$ بیابید. (ص۸۰کتاب جدید)

حل : $|\vec{b}| = \sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲ + ۰^۲} = \sqrt{۲}$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = ۲\times۱ + (-۱)(-۱) + ۲\times۰ = ۳$

$$\vec{a'} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^۲} \vec{b} = \frac{۳}{۲}(۱,-۱,۰) = (\frac{۳}{۲}, -\frac{۳}{۲}, ۰)$$

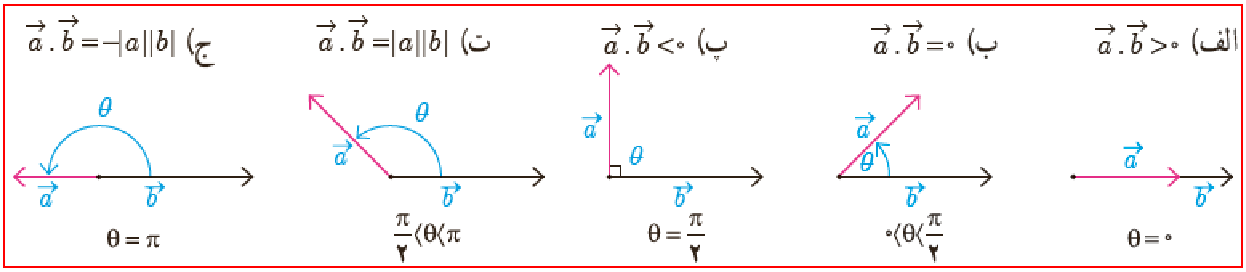
کار در کلاس :

۱) تصویر بردار $\mathbf{i} = (۱,۰,۰)$ بر امتداد بردار $\mathbf{j} = (۰,۱,۰)$ را بیابید.

۲) نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری بردار صفر می شود.

۳) نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند آنگاه تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ برابر خود $\vec{a}$ می شود.

۴) هر یک از حالات زیر را با شکل های داده شده نظیر کنید. (ص۸۰کتاب جدید)



تمرین۱) برای هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ به دست آورید.

الف) $\vec{a} = (۲,-۱,۲)$ و $\vec{b} = \vec{i}$

ب) $\vec{a} = (۲,۳,۱)$ و $\vec{b} = (۳,۲,۱)$

ج) $\vec{a} = (۱,-۱,۰)$ و $\vec{b} = (-۱,۲,۴)$ (ص۸۴کتاب جدید)

تمرین۲) فرض کنید $\vec{b}$ و $\vec{a}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول های۱ و۲ و۳ با این خاصیت که $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$. مقدار $\vec{a} . \vec{b} + \vec{b} . \vec{c} + \vec{c} . \vec{a}$ را محاسبه کنید. (ص۸۴کتاب جدید)

تمرین۳) سه بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a} . \vec{b} = \vec{a} . \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$. (ص۸۴کتاب جدید)

تمرین۴) اگر $\vec{a}=(1,-3,4)$ و $\vec{b}=(3,-4,2)$ و $\vec{c}=(-1,1,4)$ باشند آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید. (ص۸۴کتاب جدید)

مثال) دو بردار a و b با معلومات $|a|=5$ و $|b|=7$ و $a-b=2i+j-3k$ مفروض اند. تصویر قائم بردار b بر روی بردار a، چند برابر بردار a است؟

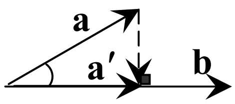
۱) $0/7$ ۲) $0/8$ ۳) $1/2$ ۴) $1/4$ (کنکور سراسری ریاضی ۹۵ خارج از کشور)

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$|a-b|^2=|a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos\theta \Rightarrow 4+1+9=25+49-2\times5\times7\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{60}{70}=\frac{6}{7}$$

اگر زاویه‌ی بین دو بردار a و b یعنی θ حاده باشد داریم : $|b'|=|b|\cos\theta \Leftarrow \cos\theta=\frac{|b'|}{|b|}$ پس: $\frac{|b'|}{|a|}=\frac{7\times\frac{6}{7}}{5}=\frac{6}{5}=1/2$

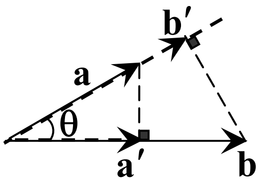
مثال)اگر زاویه‌ی بین دو بردار a و b برابر ۳۰ درجه و a' تصویر قائم بردار a روی امتداد بردار نا صفر b باشد، زاویه‌ی بین دو بردار b و $a-a'$ چند درجه است؟



۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

جواب : گزینه ۴ صحیح است. بدیهی است که بردارهای $a-a'$ و $a'-a$ بر بردار b عمودند.

مثال) اگر a' تصویر قائم بردار a روی امتداد بردار b و b' تصویر قائم بردار b روی امتداد بردار a و θ زاویه‌ی بین دو بردار a و b و $a.b=2$ باشد. حاصل $a'.b'$ کدام است؟



۱) $2\cos^2\theta$ ۲) $\cos^2\theta$ ۳) ۲ ۴) ۱

جواب : گزینه ۱ صحیح است. $\cos\theta=\frac{|a'|}{|a|}\Rightarrow |a'|=|a|\cos\theta$ و $|b'|=|b|\cos\theta$

$$a'.b'=|a'||b'|\cos\theta=|a|\cos\theta\times|b|\cos\theta\times\cos\theta=a.b\cos^2\theta=2\cos^2\theta$$

۴۱) تصویر قائم بردار $(3,6,-3)$ روی امتداد بردار $(2,-1,-2)$، کدام بردار است؟

۱) $(2,-1,-2)$ ۲) $(-2,1,2)$ ۳) $(4,-2,-4)$ ۴) $(1,-3,2)$ (کنکور سراسری ریاضی ۸۲)

نکته : اندازه‌ی جبری تصویر بردار a روی امتداد بردار b برابر است با : $p_b^a=\frac{a.b}{|b|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

۴۲) طول تصویر بردار $\vec{v_1}(1,2,2)$ بر بردار $\vec{v_2}(2,1,2)$ چقدر است؟

۱) $\frac{8}{9}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) ۳   ۴) ۸   (کنکور آزاد ریاضی ۷۵)

مثال) اگر اندازه‌ی تصویر قائم بردار a در راستای بردار $b=(2,-1,2)$ برابر ۳ باشد، مقدار مثبت a.b کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۶   ۳) ۸   ۴) ۹

جواب : گزینه ۴ صحیح است.
$$|a'|=\frac{|a.b|}{|b|}=3\Rightarrow |a.b|=3|b|=3\sqrt{4+1+4}=9$$

تعریف ضرب خارجی (ضرب برداری) : فرض کنیم $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند.

ضرب خارجی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می شود :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$

این تعریف را به صورت زیر نیز نمایش می دهند.

(قطر فرعی- قطر اصلی , قطر اصلی- قطر فرعی, قطر فرعی- قطر اصلی)
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$

مثال) اگر $\vec{v_1}(1,2,3)$ و $\vec{v_2}(2,1,3)$ باشد،اندازه‌ی بردار $\vec{v_1}\times\vec{v_2}$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۳   ۴) ۹   (کنکور آزاد ریاضی۸۶خارج از کشور)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.
$$(\vec{v_1}\times\vec{v_2}=(1,2,3)\times(2,1,3)=(3,3,-3)\Rightarrow|\vec{v_1}\times\vec{v_2}|=\sqrt{9+9+9}=3\sqrt{3}$$

۴۳) اگر $v_1(-1,1,2)$ و $v_2(1,-2,3)$ باشد زاویه بردار $v_1\times v_2$ با کدام محور بزرگتراست؟

۱) xها   ۲) yها   ۳) zها   ۴)باهرسه محوریکسان است.(کنکور ریاضی آزاد عصر۸۲)

مثال) اگر $a=(5,4,2)$ و $b=(2,-1,3)$ تصویر بردار $a\times b$ روی محور yها کدام است؟

۱) ۱۱   ۲) ۱۱-   ۳) ۱۳   ۴) ۱۳-

جواب : گزینه ۲ صحیح است. منظور مؤلفه عرض است.
$$a\times b=(5,4,2)\times(2,-1,3)=(14,-11,-9)$$

خواص جبری ضرب خارجی : فرض کنید a و b و c سه بردار و $\lambda \in R$ است در این صورت داریم :

الف : ضرب خارجی دو بردار بسته است یعنی حاصل ضرب خارجی هر دو بردار یک بردار است.

ب : $a\times b=-b\times a$ (ضرب خارجی در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد.)

پ : $a\times \vec{\circ}=\vec{\circ}$

ت : $\lambda a\times b=a\times \lambda b=\lambda(a\times b)$

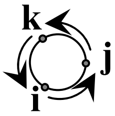
ث : $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ و $(b+c)\times a=b\times a+c\times a$

ج) درحالت کلی $a\times(b\times c)\neq(a\times b)\times c$ (ضرب خارجی در حالت کلی خاصیت شرکت پذیری ندارد.)

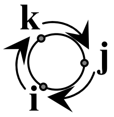
مثال : $i\times(i\times k)\neq(i\times i)\times k$

چ : ضرب خارجی عضو وارون ندارد.)

نکته : الف : $i\times j=k$ و $j\times k=i$ و $k\times i=j$



ب : $j\times i=-k$ و $k\times j=-i$ و $i\times k=-j$



مثال) عمل ضرب برونی دو بردار در مجموعه بردارهای واقع در فضا کدام خاصیت را ندارد؟ (کنکور سراسری ریاضی ۶۹)

۱) بسته بودن ۲) جابجایی ۳) پخش پذیری نسبت به اعداد ۴) پخش پذیری نسبت به جمع بردارها

جواب : گزینه ۲ صحیح است. اگر a و b دو بردار باشند آنگاه : $a\times b=-b\times a$ یعنی ضرب خارجی در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد.

مثال : بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ در $R^{۳}$ در نظر بگیرید. حاصل $\vec{j}\times\vec{i}$ و $\vec{i}\times\vec{j}$ را به دست آورید. (ص۸۱کتاب جدید)

حل :

$$\vec{i}\times\vec{j}=(۱,۰,۰)\times(۰,۱,۰)=(۰\times۰-۰\times۱,۰\times۰-۱\times۰,۱\times۱-۰\times۰)=(۰,۰,۱)=\vec{k}$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=(۰,۱,۰)\times(۱,۰,۰)=(۱\times۰-۰\times۰,۰\times۱-۰\times۰,۰\times۰-۱\times۱)=(۰,۰,-۱)=-\vec{k}$$

مثال) اگر i و j و k بردارهای واحد باشند حاصل $(i\times(i\times j))\times k$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-i$ ۳) j ۴) $-k$ (کنکور سراسری ریاضی ۹۱)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $(i\times(i\times j))\times k=(i\times k)\times k=-j\times k=-i$

۴۴) حاصل $i.(j\times k)-۲j.(k\times i)-۳k.(j\times i)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

مثال) اگر $۲a+b=(۱,۴,۲)$ و $a+۲b=(۲,۲,۱)$ باشند اندازه‌ی ضرب خارجی $|a\times b|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲ (کنکور آزاد ریاضی عصر ۹۱)

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$(۲a+b)\times(a+۲b)=(۱,۴,۲)\times(۲,۲,۱)\Rightarrow ۲a\times a+۴a\times b+b\times a+۲b\times b=(۰,۳,-۶)$$

$$\Rightarrow ۳a\times b=(۰,۳,-۶)\Rightarrow a\times b=(۰,۱,-۲)\Rightarrow |a\times b|=\sqrt{۰+۱+۴}=\sqrt{۵}$$

توجه : $\begin{vmatrix} ۲a & b \\ a & ۲b \end{vmatrix}=۳a\times b$

مثال) اگر $(a\times b).(b\times ۲a)=-۵۰$ باشد اندازه‌ی حاصل ضرب خارجی دو بردار a و b کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۵

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $(a\times b).(b\times ۲a)=-۵۰\Rightarrow (a\times b).(-۲(a\times b))=-۵۰$

$$\Rightarrow -۲(a\times b).(a\times b)=-۵۰\Rightarrow |a\times b|^۲=۲۵\Rightarrow |a\times b|=۵$$

۴۵) اگر $|a\times b|=۴$،اندازه‌ی بردار $(a+b)\times(۳a-b)$ چقدر است؟

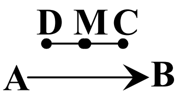
۱) ۸ ۲) صفر ۳) ۱۶ ۴) ۴ (کنکور آزاد ریاضی ۷۸)

مثال) اگر $(a-b)\times(b+a)=۲i-۴j+۴k$ اندازه بردار $a\times b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

جواب : گزینه ۳ درست است. $|(a-b)\times(b+a)|=\sqrt{۴+۱۶+۱۶}\Rightarrow ۲|a\times b|=۶\Rightarrow |a\times b|=۳$

۴۶) اگر CD موازی AB باشد و نقطه M از C به D حرکت کند،بردارضرب خارجی $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AM}$ چگونه تغییر می کند؟



۱) طول آن کم می شود ولی جهت آن تغییر نمی کند. ۲) طول آن ثابت است ولی جهت آن تغییر می کند.

۳) طول و جهت آن ثابت است. ۴) طول و جهت آن تغییر می کند. (کنکور ریاضی آزادعصر۸۳)

قضیه : فرض کنید a و b دو بردار دلخواه باشند. در این صورت $a.(a\times b)=۰$ و $b.(a\times b)=۰\Rightarrow a,b\perp(a\times b)$

نکته : فرض کنید a و b دو بردار دلخواه باشند. هر مضرب غیر صفر از $a\times b$ بر a و b و بر تمام ترکیبات خطی a و b عمود می باشند. به عبارت دیگر $r,m,n\in R, r\neq ۰\Rightarrow r(a\times b).(ma+nb)=۰$

مثال) بردارهای a، b و c با شرط $(a-c)\times b=a\times c$ مفروض اند، الزاماً کدام نتیجه حاصل می شود؟

۱) $a.(b.c)=۰$ ۲) $a.(b\times c)=۰$ ۳) $a\times(b\times c)=o$ ۴)هرسه بردارموازی اند. (کنکورسراسری ریاضی۹۱خارج)

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$(a-c)\times b=a\times c\Rightarrow a\times b-c\times b=a\times c\xrightarrow{a.}a.(a\times b)+a.(b\times c)=a.(a\times c)\Rightarrow a.(b\times c)=۰$$

مثال) اگر $a=b\times c$ و $b=a\times c$ و $c=a\times b$،مقدار $|a||b||c|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۸

جواب : گزینه ۱ صحیح است. $c=a\times b\Rightarrow c\perp a,b$ و $b=a\times c\Rightarrow b\perp a,c$ و $a=b\times c\Rightarrow a\perp b,c$

درنتیجه سه بردار a و b و c دو به دو بر هم عمودند.

$$|c|=|a\times b|=|a||b|\sin ۹۰=|a||b| \text{ و } |b|=|a\times c|=|a||c|\sin ۹۰=|a||c| \text{ و } |a|=|b\times c|=|b||c|\sin ۹۰=|b||c|$$

حال طرفین سه رابطه‌ی قبل را در هم ضرب می کنیم. $|a||b||c|=(|a||b||c|)^۲\Rightarrow |a||b||c|=۱$

مثال) قرینه بردار غیر صفر $a \times b$ نسبت به راستای بردار $a+b$ همواره کدام است؟

۱) بردار صفر ۲) $a \times b$ ۳) $-b \times a$ ۴) $b \times a$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. بردار غیر صفر $a \times b$ بر بردارهای a و b و هر ترکیب خطی از این دو بردار عمود است.

مثال) هرگاه a و b دو بردار ناصفر و ناموازی و $a+b \neq 0$ و $a \times b \neq 0$ آن گاه زاویه بین بردارهای $a \times b$ و $a+b$ کدام است؟

۱) ۳۰ درجه ۲) ۴۵ درجه ۳) ۶۰ درجه ۴) ۹۰ درجه

جواب : گزینه ۴ درست است. $(a+b).(a \times b) = a.(a \times b) + b.(a \times b) = ۰ + ۰ = ۰ \Rightarrow (a+b) \perp (a \times b)$

۴۷) دو بردار با تصاویر $a = (۱,۲,-۱)$ و $b = (۲,۴,m)$ مفروض اند، به ازای کدام مقادیر m، اندازه بردار $(a+b).(a \times b)$ برابر صفر است؟

۱) فقط $m = -۲$ ۲) فقط $m = \pm ۲$ ۳) هیچ مقدار m ۴) هر مقدار m (کنکور سراسری ریاضی ۸۸)

۴۸) اگر $a = ۲i - j + k$ و $b = j - k$ باشند، مساحت مثلثی که بر روی دو بردار $a \times b$ و $a + ۲b$ ساخته شود، کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $۲\sqrt{۳}$

(کنکور سراسری و آزاد ریاضی خارج از کشور ۹۷)

مثال) سه بردار $v_۱ = (۱,-۱,a)$ ، $v_۲ = (۲,b,۱)$ و $v_۳ = (c,۳,۲)$ ، دو به دو عمود بر هم هستند، $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸ (کنکور سراسری ریاضی ۹۳ خارج از کشور)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : چون سه بردار $v_۱$ ، $v_۲$ و $v_۳$ ، دو به دو عمود بر هم هستند، پس حاصل ضرب داخلی دو به دوی آن ها صفر است.

$$v_۱.v_۲ = ۰ \Rightarrow (۱,-۱,a).(۲,b,۱) = ۰ \Rightarrow ۲ - b + a = ۰ \Rightarrow a - b = -۲ \quad (۱)$$

$$v_۱.v_۳ = ۰ \Rightarrow (۱,-۱,a).(c,۳,۲) = ۰ \Rightarrow c - ۳ + ۲a = ۰ \Rightarrow ۲a + c = ۳ \quad (۲)$$

$$v_۲.v_۳ = ۰ \Rightarrow (۲,b,۱).(c,۳,۲) = ۰ \Rightarrow ۲c + ۳b + ۲ = ۰ \Rightarrow ۳b + ۲c = -۲ \quad (۳)$$

$$(۲) - ۲(۱) \Rightarrow \begin{cases} ۲b + c = ۷ \\ ۳b + ۲c = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = ۱۶ \\ c = -۲۵ \end{cases} \xrightarrow{(۱)} a = ۱۴ \Rightarrow a + b + c = ۵$$

روش دوم : چون بردار $v_۱$ بر دو بردار $v_۲$ و $v_۳$ عمود است پس بر صفحه‌ی شامل این دو بردار نیز عمود بوده و در نتیجه بر هر ترکیب خطی از این دو بردار از آن جمله بردار $v_۳ - v_۲$ نیز عمود است. در نتیجه :

$$v_۱.(v_۳ - v_۲) = ۰ \Rightarrow (۱,-۱,a).(c-۲,۳-b,۱) = ۰ \Rightarrow c - ۲ + b - ۳ + a = ۰ \Rightarrow a + b + c = ۵$$

روش سوم : چون بردار $v_۱$ بر دو بردار $v_۲$ و $v_۳$ عمود است پس بر صفحه‌ی شامل این دو بردار نیز عمود بوده و در نتیجه با حاصل ضرب خارجی این دو بردار موازی است. در نتیجه : $v_۲ \times v_۳ = (۲,b,۱) \times (c,۳,۲) = (۲b - ۳, c - ۴, ۶ - bc)$

$$\Rightarrow \frac{۲b - ۳}{۱} = \frac{c - ۴}{-۱} = \frac{۶ - bc}{a} \Rightarrow \begin{cases} ۲b + c = ۷ \\ ۲ab + bc = ۳a + ۶ \Rightarrow \\ ac - bc = ۴a - ۶ \end{cases} \begin{cases} a = ۱۴ \\ b = ۱۶ \\ c = -۲۵ \end{cases} \Rightarrow a + b + c = ۵$$

مثال) زاویه‌ی بین دو بردار $a\times(a+b)$ و $b\times(a-b)$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۹۰ درجه ۳) ۴۵ درجه ۴) ۱۸۰ درجه

جواب : گزینه ۴ درست است.

$a\times(a+b)=a\times a+a\times b=a\times b$ و $b\times(a-b)=b\times a-b\times b=b\times a=-a\times b\Rightarrow\hat{\theta}=۱۸۰^{\circ}$

۴۹) کدام بردار بر دو بردار $a=i-۲k$ و $b=i+۲j$ عمود است؟

۱) $(۲,۱,۱)$ ۲) $(۲,۱,-۱)$ ۳) $(۲,-۱,۱)$ ۴) $(۲,-۱,-۱)$

مثال) اگر $a+b=(۲,-۲,۳)$ و $b-a=(۲,۲,۱)$ باشد قرینه‌ی بردار $a\times b$ نسبت به بردار $۳a-۲b$ کدام است؟

۱) $(۴,۲,-۴)$ ۲) $(۴,-۲,۴)$ ۳) $(۴,-۲,-۴)$ ۴) $(-۴,۲,۴)$

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $۲a=(۰,-۴,۲)\Rightarrow a=(۰,-۲,۱)$ و $۲b=(۴,۰,۴)\Rightarrow b=(۲,۰,۲)$

$a\times b=(۰,-۲,۱)\times(۲,۰,۲)=(-۴,۲,۴)$

چون بردار $a\times b$ بر بردارهای a و b عمود است پس بر صفحه‌ی شامل آنها نیز عمود است و درنتیجه $a\times b$ بر بردار $۳a-۲b$ نیز عمود است بنابراین قرینه‌ی بردار $a\times b$ نسبت به بردار $۳a-۲b$ به صورت $(۴,-۲,-۴)$ می باشد.

۵۰)اگربردار $\vec{a}\,(x,y,z)$ بربردارهای $\vec{b}\,(۱,-۱,۲)$ و $\vec{c}\,(۲,۰,۱)$ عمود باشد و $|\vec{a}|=۲$ باشد $x+y+z$ کدام می تواند باشد؟

۱) $\frac{۱۰}{\sqrt{۱۴}}$ ۲) $\frac{۱۲}{\sqrt{۱۴}}$ ۳) $\frac{۶}{\sqrt{۱۴}}$ ۴) $\frac{۸}{\sqrt{۱۴}}$ (کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۷)

مثال) بردار a به طول ۴، بر محور xها و بردار $(-۱,۲,-۲)$ عمود است. طول تصویر قائم a روی محور yها کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

جواب : گزینه ۱ درست است.فرض کنید $b=(-۱,۲,-۲)$،در این صورت $b\times i=(۰,-۲,-۲)$ بر محور xها و بردار b عمود است. پس $r\in R$ ،$a=r(۰,-۲,-۲)$ و چون $|a|=۴$. در نتیجه $\sqrt{r^{۲}(۰+۴+۴)}=۴\Rightarrow r^{۲}=۲\Rightarrow r=\pm\sqrt{۲}$

و داریم : $a=\pm۲\sqrt{۲}(۰,-۲,-۲)=(۰,\mp۲\sqrt{۲},\mp۲\sqrt{۲})$

قضیه : اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار غیرصفر و θ زاویه بین آنها باشد آنگاه

$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta$$

اثبات :

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=|(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)|^2$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

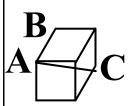
$$=a_2^2b_3^2-2a_2a_3b_2b_3+a_3^2b_2^2+a_3^2b_1^2-2a_1a_3b_1b_3+a_1^2b_3^2+a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2$$

$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

$$=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\theta=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2(1-\cos^2\theta)=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\theta$$

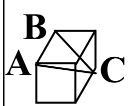
$$\Rightarrow\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$$

مثال) شکل مقابل، مکعبی به طول یال ۲ را نمایش می دهد، اندازه‌ی $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ کدام است؟



۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) 8 ۴) $8\sqrt{2}$

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=|AB||AC|\sin B\hat{A}C=2\sqrt{2}|AC|\times\dfrac{|BC|}{|AC|}=2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=8$



مثال) هرگاه $|a|=2$ و $|b|=3$ و زاویه‌ی بین دو بردار a و b برابر ۱۵۰ درجه باشد. $|a\times(a\times b)|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

جواب : گزینه ۳ صحیح است. چون : $(a\times b)\perp a$ پس :

$$|a\times(a\times b)|=|a||a\times b|\sin 90=|a|(|a||b|\sin 150)\times 1=4\times3\times\frac{1}{2}=6$$

مثال) زاویه‌ی بین دو بردار یکه‌ی a و b برابر $\frac{\pi}{3}$ است. اندازه‌ی بردار $(a+b)\times(a\times b)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 3

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos\frac{\pi}{3}=1+1+2\times1\times1\times\frac{1}{2}=3\Rightarrow|a+b|=\sqrt{3}$

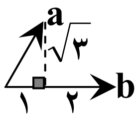
$$|a\times b|=|a||b|\sin\frac{\pi}{3}=1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(a+b)\perp(a\times b)\Rightarrow|(a+b)\times(a\times b)|=|a+b||a\times b|\sin 90=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times1=\frac{3}{2}$$

نکته : هرگاه a و b دو بردار دلخواه با شرایط $a \neq o$ و $b \neq o$ و $a \not\perp b$ باشند داریم :
$$\tan(\widehat{a, b}) = \frac{|a \times b|}{a.b}$$

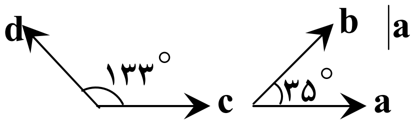
مثال) در شکل مقابل، اندازه‌ی بردار $a \times b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$



جواب : گزینه ۳ صحیح است.
$$|a|^۲ = ۱ + ۳ = ۴ \Rightarrow |a| = ۲ \Rightarrow (a; b) = ۶۰^\circ$$
$$|a \times b| = |a||b|\sin ۶۰ = ۲ \times ۳ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳}$$

مثال) در شکل زیر بردارهای a و b و c و d بردارهای واحد هستند کدام گزینه صحیح است؟



۱) $a.b < c.d$ ۲) $|c + d| > |a + b|$ ۳) $|a - b| > |c - d|$ ۴) $|a \times b| < |c \times d|$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $a.b = |a||b|\cos ۳۵ = \cos ۳۵ > ۰$

و $c.d = |c||d|\cos ۱۳۳ = \cos ۱۳۳ < ۰$ پس $a.b < c.d$ نادرست می باشد،لذا گزینه ۱ نادرست است.

می دانیم اگر زاویه ای افزایش یابد اندازه‌ی مجموع دو بردار کاهش و اندازه‌ی تفاضل آن دو بردار افزایش می یابد لذا گزینه ۲ و ۳ نادرست اند.

$$|a \times b| = |a||b|\sin ۳۵ = \sin ۳۵ \quad \text{و} \quad |c \times d| = |c||d|\sin ۱۳۳ = \sin ۱۳۳ = \sin(۱۸۰ - ۴۷) = \sin ۴۷$$

چون $\sin ۳۵ < \sin ۴۷$ درنتیجه $|a \times b| < |c \times d|$

۵۱) اگر $|a \times b| = \sqrt{۳}a.b$ باشد،زاویه بین دو بردار چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$ (کنکور آزاد ریاضی ۷۹)

مثال) اگر $a + b + c = o$ و $|a| = ۲$ و $|b| = \sqrt{۲}$ مساحت تولید شده توسط دو بردار a و b برابر یک واحد و زاویه‌ی بین این دو بردار حاده باشد،طول بردار c کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

جواب : گزینه ۴ صحیح است.
$$s = \frac{۱}{۲}|a||b|\sin\theta = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۲ \times \sqrt{۲}\sin\theta = ۱ \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\pi}{۴}$$
$$|-c| = |a + b| \Rightarrow |c|^۲ = |a|^۲ + |b|^۲ + ۲|a||b|\cos\theta = ۴ + ۲ + ۲ \times ۲\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱۰ \Rightarrow |c| = \sqrt{۱۰}$$

مثال) اگر دو بردار a و b بر هم عمود بوده و $|a| = ۳$ و $|b| = ۴$ باشد اندازه بردار $(۳a + b) \times (a - ۳b)$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۹۶ ۴) ۱۲۰

جواب : گزینه ۴ درست است.
$$|(۳a + b) \times (a - ۳b)| = ۱۰|b \times a| = ۱۰|b||a|\mathrm{Sin}۹۰ = ۱۰ \times ۴ \times ۳ \times ۱ = ۱۲۰$$

نکته (اتحادلاگرانژ) : برای هر دو بردار غیر صفر a و b همواره داریم :
$$|a \times b|^۲ = |a|^۲|b|^۲ - (a.b)^۲$$

نتیجه : الف : $(a.b)^۲ = |a|^۲|b|^۲ - |a \times b|^۲$ ب : $|a \times b|^۲ + (a.b)^۲ = |a|^۲|b|^۲$

مثال) اگر $|a| = ۱۰$ و $|b| = ۲$ و $a.b = ۱۲$ در این صورت $|a \times b|$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

جواب : گزینه ۳ درست است. $|a \times b|^۲ + ۱۲^۲ = ۱۰^۲ \times ۲^۲ \Rightarrow |a \times b|^۲ = ۲۵۶ \Rightarrow |a \times b| = ۱۶$

مثال) اگر $|a| = ۳$ و $|b| = ۵$ و $|a + b| = \sqrt{۵۸}$ باشد. اندازه‌ی $a \times b$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۱۲

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $|a + b| = \sqrt{۵۸} \Rightarrow |a|^۲ + |b|^۲ + ۲a.b = ۵۸ \Rightarrow ۹ + ۲۵ + ۲a.b = ۵۸ \Rightarrow a.b = ۱۲$

$|a \times b|^۲ = |a|^۲|b|^۲ - (a.b)^۲ = ۹ \times ۲۵ - ۱۴۴ = ۸۱ \Rightarrow |a \times b| = ۹$

۵۲) اگر $|a| = ۳$ و $|b| = ۲۶$ و $|a \times b| = ۷۲$ در این صورت $|a.b|$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

مثال) اگر a و b دو بردار باشند به طوری که $|a \times b| = ۷۲$، $a.b = ۳۰$ و $|a| = ۳$، آنگاه $|b|$ کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۲۴ ۳) ۲۲ ۴) ۲۰

جواب : گزینه ۱ درست است. $|a \times b|^۲ = |a|^۲|b|^۲ - (a.b)^۲ \Rightarrow ۵۱۸۴ + ۹۰۰ = ۹ \times |b|^۲ \Rightarrow |b|^۲ = ۶۷۶ \Rightarrow |b| = ۲۶$

۵۳)زاویه بین دوبردار a و b کمتر از ۹۰ درجه است، $|\vec{a}| = ۶$، $|\vec{b}| = ۵$ و $|a \times (a + b)| = ۱۸$ حاصل $a.(a + b)$ کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۶ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴ (کنکور سراسری ریاضی ۸۵)

نکته مهم : برای هر دو بردار غیر صفر a و b، a با b موازی است اگروفقط اگر $a \times b = o$

نتیجه : اگر $\vec{AB} \times \vec{AC} = o$ باشد آنگاه سه نقطه‌ی A و B و C بر یک استقامتند و بعکس.

مثال) اگر $\vec{v_۱} \times \vec{v_۲} = o$ ($\vec{v_۱} \wedge \vec{v_۲} = o$) و بردارهای $\vec{v_۱}$ و $\vec{v_۲}$ غیرصفر باشند آنگاه الزاماً :

۱) $\vec{v_۱} = -\vec{v_۲}$ ۲) $\vec{v_۱} = \vec{v_۲}$ ۳) $\vec{v_۱} \perp \vec{v_۲}$ ۴) $\vec{v_۱} \parallel \vec{v_۲}$ (کنکور سراسری ریاضی ۷۶)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $\vec{v_۱} \times \vec{v_۲} = o \Rightarrow |\vec{v_۱}||\vec{v_۲}| \sin\alpha = ۰ \Rightarrow \sin\alpha = ۰ \Rightarrow \alpha = ۰$ یا $\pi \Rightarrow \vec{v_۱} \parallel \vec{v_۲}$

۵۴) اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ و $\vec{b} \neq \vec{c}$ آنگاه کدام نتیجه گیری نادرست است؟

۱) $\vec{a}$ عمود بر $\vec{b} - \vec{c}$ ۲) $\vec{a}$ موازی $\vec{b} - \vec{c}$

۳) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = ۰$ ۴) $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ موازی یک صفحه (کنکور سراسری ریاضی ۷۹)

۵۵) اگر $\vec{b}=(1,2,3)$ و $\vec{c}=(-1,1,1)$ چنان باشد که $|\vec{a}|=9$ و $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$، مجموع مؤلفه های بردار $\vec{a}$ کدام عدد می تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۵

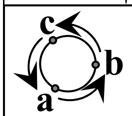
مثال) اگر برای سه بردار $a=(1,2,1)$، $b=(\alpha,1,3)$ و $c=(2,\beta,1)$، رابطه‌ی $a\times b=a\times c$ برقرار باشد، $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $a\times b=a\times c\Rightarrow a\times(b-c)=o\Rightarrow a\,||\,b-c$ و $b-c=(\alpha-2,1-\beta,2)$

$$\Rightarrow\frac{\alpha-2}{1}=\frac{1-\beta}{2}=\frac{2}{1}\Rightarrow\alpha-2=2\Rightarrow\alpha=4 \text{ و } 1-\beta=4\Rightarrow\beta=-3\Rightarrow\alpha+\beta=1$$

نکته : اگر برای سه بردار a و b و c داشته باشیم : $a+b+c=o$ آنگاه : $a\times b=b\times c=c\times a$



مثال) اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند و $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=o$ آنگاه $\vec{a}\times\vec{b}$ برابر کدام است؟

۱) $\vec{c}\times\vec{b}$ ۲) $\vec{a}\times\vec{c}$ ۳) $\vec{b}\times\vec{a}$ ۴) $\vec{c}\times\vec{a}$ (کنکور سراسری ریاضی ۷۴)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $a\times b=a\times(-a-c)=-a\times a-a\times c=c\times a$

۵۶) برای سه بردار a و b و c داریم $a+b+c=0$ و $|b\times c|=2$ در این صورت حاصل $2|a\times b|-3|b\times c|+4|c\times a|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

نکته : اگر بردارهای a و b و c و d در شرایط $a\times b=c\times d$ و $a\times c=b\times d$ صدق کنند آنگاه : $(a-d)\,||\,(b-c)$

۵۷) چهار بردار a، b، c و d در دو رابطه‌ی $a\times c=d\times b$ و $a\times d=c\times b$ صدق می کنند، الزاماً دو بردار غیر صفر $a+b$ و $c+d$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مساوی ۲) قرینه ۳) عمود ۴) موازی (کنکور سراسری ریاضی ۹۳ خارج از کشور)

مثال) اگر $v \times v' = o$ و بردارها ناصفر باشند،آن گاه لزوماً...

۱) $v = -v'$ ۲) $v = v'$ ۳) $v \perp v'$ ۴) $v \parallel v'$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $|v \times v'| = |o| \Rightarrow |v||v'|\sin\theta = ۰ \xrightarrow{v,v' \neq o} \sin\theta = ۰ \Rightarrow \theta = ۰$ یا $۱۸۰ \Rightarrow v \parallel v'$

نتیجه مهم : برای هر بردار غیر صفر a همواره داریم : $a \times a = o$

تعبیرهندسی ضرب برداری : برای هر دو بردار غیر صفر a و b که زاویه بین آنها θ است داریم :

الف) $a, b \perp (a \times b)$ یعنی $a \times b$ بر صفحه شامل دو بردار a و b عمود است.

ب) مساحت متوازی الاضلاعی است که a و b دو ضلع مجاورش می باشند $|a \times b| = |a||b|\sin\theta$

پ) $a \times b = o$ اگروتنهااگر a و b همراستا باشند.

ت) $a \times b$ برداری است که جهت آن از قاعده دست راست بدست می آید،یعنی اگر انگشت اشاره دست راست به طرف a و انگشت وسطی به طرف b باشد،آنگاه انگشت شست جهت $a \times b$ را نشان می دهد.

نتیجه:مساحت متوازی الاضلاعی است که c و d دو قطر آن می باشند. $\frac{۱}{۲}|c \times d| = \frac{۱}{۲}|c||d|\sin\theta'$ که در آن θ' زاویه‌ی بین دو قطر است.

مثال) عدد حاصل ضرب داخلی دو بردار، $\sqrt{۳}$ برابر با مساحت متوازی الاضلاعی است که روی آن دو بردار ساخته می شود. زاویه بین آن دو بردار کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

جواب : گزینه ۱ صحیح است.روش اوّل : $a.b = \sqrt{۳}|a \times b| \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{|a \times b|}{a.b} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۶}$

روش دوم : $a.b = \sqrt{۳}|a \times b| \Rightarrow |a||b|\cos\theta = \sqrt{۳}|a||b|\sin\theta \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{۳}\sin\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۶}$

۵۸) اگر $|a| = ۲$، $|b| = ۴$ و زاویه‌ی بین دو بردار a و b برابر ۱۲۰ درجه باشد،مساحت متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای $۳b + ۵a$ و $۴a + ۶b$ ساخته می شود چقدر است؟

۱) $۳۶\sqrt{۳}$ ۲) $۹۴\sqrt{۳}$ ۳) $۷۲\sqrt{۳}$ ۴) $۱۸۸\sqrt{۳}$

۵۹) اگر $a = (۱, -۲, ۳)$ و $b = (۲, ۰, ۱)$،مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط دو بردار $a + ۳b$ و $۲a + ۵b$،کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) $۵\sqrt{۳}$ (کنکور سراسری ریاضی ۸۷)

۶۰)اگر $|a| = ۲۷$ و $|b| = ۵$ و $a.b = ۸۱$ باشدآنگاه مساحت متوازی الاضلاعی که بردارهای a و b دوضلع مجاور آن هستند کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۶ ۳) ۱۰۸ ۴) ۲۱۶

مثال)اگر $|a| = ۳$ و $|b| = ۵$ و $|a-b| = ۴$،آنگاه مساحت متوازی الاضلاعی که بردارهای a و b دو ضلع مجاور آن هستند کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل : $|a-b|^۲ = |a|^۲ + |b|^۲ - ۲a.b \Rightarrow ۱۶ = ۹ + ۲۵ - ۲a.b \Rightarrow a.b = ۹$

$$\Rightarrow |a||b|\cos\theta = ۹ \Rightarrow ۱۵\cos\theta = ۹ \Rightarrow \cos\theta = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \sin\theta = \frac{۴}{۵} \Rightarrow |a\times b| = |a||b|\sin\theta = ۳\times ۵\times \frac{۴}{۵} = ۱۲$$

روش دوم : $|a-b|^۲ = |a|^۲ + |b|^۲ - ۲a.b \Rightarrow ۱۶ = ۹ + ۲۵ - ۲a.b \Rightarrow a.b = ۹$

$$|a\times b|^۲ = |a|^۲|b|^۲ - (a.b)^۲ = ۳^۲\times ۵^۲ - (۹)^۲ = ۲۲۵ - ۸۱ = ۱۴۴ \Rightarrow s = |a\times b| = ۱۲$$

۶۱) مساحت متوازی الاضلاعی که با دو بردار $i + j - k$ و $i - j + k$ ساخته می شود،کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

مثال) بردار $a = i + ۲j - ۴k$ به صورت ترکیبی از بردارهای واحد محورهای مختصات داده شده است. مساحت متوازی الاضلاعی که بر روی دو بردار a و $a\times k$ ساخته شود کدام است؟

۱) $\sqrt{۸۴}$ ۲) $\sqrt{۹۶}$ ۳) $\sqrt{۱۰۲}$ ۴) $\sqrt{۱۰۵}$ (کنکور سراسری ریاضی۸۶خارج از کشور)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. روش اوّل :

$$a\times k = (۱,۲,-۴)\times(۰,۰,۱) = (۲,-۱,۰) \Rightarrow (a\times k)\times a = (۲,-۱,۰)\times(۱,۲,-۴) = (۴,۸,۵)$$

$$s = |(a\times k)\times a| = \sqrt{۱۶ + ۶۴ + ۲۵} = \sqrt{۱۰۵}$$

روش دوم : $a\times k = (۱,۲,-۴)\times(۰,۰,۱) = (۲,-۱,۰) \Rightarrow s = |a\times(a\times k)| = |a||a\times k|\sin ۹۰ = \sqrt{۲۱}\times\sqrt{۵} = \sqrt{۱۰۵}$

۶۲) اگر بردارهای $(۶,۴,۲)$ و $(۲,۴,۲)$ قطرهای یک متوازی الاضلاع باشند مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۵}$ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۵}$

مثال) اگر بردارهای $a = mi + j + ۲k$ و $b = -۲i + (m+۱)j$ قطرهای یک لوزی باشند،مساحت آن چقدر است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۶\sqrt{۲}$

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $a\perp b \Rightarrow a.b = ۰ \Rightarrow -۲m + m + ۱ = ۰ \Rightarrow m = ۱ \Rightarrow a = (۱,۱,۲)$ و $b = (-۲,۲,۰)$

روش اوّل : $a\times b = (-۴,-۴,۴) \Rightarrow s = \frac{۱}{۲}|a\times b| = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۱۶+۱۶} = ۲\sqrt{۳}$

روش دوم:مساحت هرلوزی برابراست بانصف حاصل ضربدوقطرآن $s = \frac{۱}{۲}|a||b| = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱+۱+۴}\times\sqrt{۴+۴} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴۸} = ۲\sqrt{۳}$

نتیجه : مساحت مثلثی که a و b دو ضلع مجاورش می باشند از دستور زیر بدست می آید. $\frac{۱}{۲}|a\times b|$

نتیجه : مساحت متوازی الاضلاعی است که a یک ضلع و b یک قطر آن می باشند $|a\times b| = |a||b|\sin\theta$

مثال) اگر بردارهای $a=(۱,۲,۲)$ و $b=(-۲,۱,۱)$ به ترتیب یک ضلع و یک قطر متوازی الاضلاعی باشند مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $a\times b=(۱,۲,۲)\times(-۲,۱,۱)=(۰,-۵,۵)\Rightarrow s=|a\times b|=\sqrt{۰+۲۵+۲۵}=۵\sqrt{۲}$

۶۳) مساحت متوازی الاضلاعی که نقاط $A(۱,۰,-۱)$ و $B(۲,۱,۰)$ و $C(۰,۱,-۲)$ سه رأس متوالی آن باشند کدام است؟

۱) ۸ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۹

نکته : اگر نقاط A، B و C سه رأس مثلث ABC باشند آنگاه مساحت این مثلث از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$s_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}\right|$$

نکته : اگر نقاط A، B و C سه رأس مثلث ABC باشند آنگاه مساحت این مثلث از رابطه های زیر به دست می آید.

$$s_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}\left\|\begin{matrix} x_A-x_B & x_A-x_C \\ y_A-y_B & y_A-y_C\end{matrix}\right\|$$

نکته : اگر نقاط A، B و C سه رأس متوالی یک متوازی الاضلاع باشند آنگاه مساحت این متوازی الاضلاع از رابطه های زیر به دست می آید.

$$s_{\text{متوازي الاضلاع}}=\left\|\begin{matrix} x_A-x_B & x_A-x_C \\ y_A-y_B & y_A-y_C\end{matrix}\right\|$$

مثال)دو بردار a و b به طول های ۵ و ۸ واحد مفروض اند مساحت مثلث تولید شده توسط این دو بردار ۱۲ واحد مربع است. اگر زاویه بین دو بردار کمتر از قائمه باشد،اندازه تفاضل دو بردارکدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۶/۵ ۴) ۷/۵ (کنکور سراسری ریاضی ۸۱)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$|a|=۵ \text{ و } |b|=۸ \text{ و } s=\frac{۱}{۲}|a\times b|=\frac{۱}{۲}|a||b|\sin\alpha\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times۵\times۸\sin\alpha=۱۲\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۱۲}{۲۰}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow$$

$$\cos\alpha=\frac{۴}{۵}\Rightarrow|a-b|^۲=|a|^۲+|b|^۲-۲|a||b|\cos\alpha=۲۵+۶۴-۲\times۵\times۸\times\frac{۴}{۵}=۲۵\Rightarrow|a-b|=۵$$

۶۴) دو بردار a و b به طول های ۳ و ۴ واحد با یکدیگر زاویه ۳۰ درجه می سازند مساحت مثلثی که بر روی دو بردار $a-۲b$ و $۳a+۲b$ تولید شود کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۸ (کنکور سراسری ریاضی ۸۴)

مثال) اگر $|\vec{a}| = ۳$ و $|\vec{b}| = ۲$ و $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{۱۸}{۵}$ مساحت مثلثی که روی دو بردار a و b ساخته می شود چقدر است؟

۱) $\frac{۲۴}{۵}$ ۲) $\frac{۱۸}{۵}$ ۳) $\frac{۱۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳۶}{۵}$ (کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۶)

جواب : روش اوّل : $|a\times b|^۲ = |a|^۲|b|^۲ - (a.b)^۲ = ۳۶ - \frac{۳۲۴}{۲۵} = \frac{۵۷۶}{۲۵} \Rightarrow |a\times b| = \frac{۲۴}{۵} \Rightarrow s = \frac{۱}{۲}|a\times b| = \frac{۱۲}{۵}$

روش دوم : گزینه ۳ درست است. $\cos\theta = \frac{\frac{۱۸}{۵}}{۳\times ۲} = \frac{۳}{۵}$ و $\sin\theta = \frac{۴}{۵} \Rightarrow s = \frac{۱}{۲}|a||b|\sin\theta = \frac{۱}{۲}\times ۳\times ۲\times\frac{۴}{۵} = \frac{۱۲}{۵}$

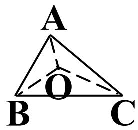
۶۵) مساحت مثلث با سه رأس $A(۱,-۲,۳)$ ، $B(۲,۰,۱)$ و $C(-۳,۲,۱)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳۵}$ ۲) $\sqrt{۴۲}$ ۳) $\sqrt{۵۴}$ ۴) $\sqrt{۶۵}$ (کنکور سراسری ریاضی ۸۹)

مثال) در مثلث ABC اگر $A = (۱,۲,۰)$ و $B = (-۱,۱,۱)$ و $C = (۲,۰,-۱)$ باشد. و O نقطه‌ی دلخواه درون مثلث باشد آنگاه حاصل $|\vec{OB}\times\vec{OC}| + |\vec{OA}\times\vec{OC}| + |\vec{OA}\times\vec{OB}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۷۰}$ ۲) $۲\sqrt{۳۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳۵}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳۵}$

جواب : گزینه ۴ صحیح است.



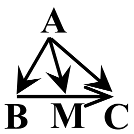
$\vec{AB} = (-۲,-۱,۱)$ و $\vec{AC} = (۱,-۲,-۱) \Rightarrow \vec{AB}\times\vec{AC} = (۳,-۱,۵)$

$$|\vec{OA}\times\vec{OB}| + |\vec{OA}\times\vec{OC}| + |\vec{OB}\times\vec{OC}| = ۲s_{\Delta OAB} + ۲s_{\Delta OAC} + ۲s_{\Delta OBC} = ۲s_{\Delta ABC}$$

$$= |\vec{AB}\times\vec{AC}| = \sqrt{۹+۱+۲۵} = \sqrt{۳۵}$$

مثال) اگر هر یک از اضلاع مثلث ABC را یک بردار و مساحت مثلث ABC را s در نظر بگیریم،حاصل عبارت $|(\vec{AB}+\vec{AC})\times(\vec{AB}+\vec{BC})|$ بر حسب s کدام است؟

۱) s ۲) $۲s$ ۳) $۴s$ ۴) $۸s$



جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل :

$$|(\vec{AB}+\vec{AC})\times(\vec{AB}+\vec{BC})| = |۲\vec{AM}\times\vec{AC}| = ۴\times\frac{۱}{۲}\times|\vec{AM}\times\vec{AC}| = ۴\times\frac{۱}{۲}s = ۲s$$

روش دوم : $|(\vec{AB}+\vec{AC})\times(\vec{AB}+\vec{BC})| = |(\vec{AB}+\vec{AC})\times\vec{AC}| = |\vec{AB}\times\vec{AC}+\vec{AC}\times\vec{AC}| = |\vec{AB}\times\vec{AC}| = ۲s$

تمرین۵) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a} = (1,-3,2)$ و $\vec{b} = (-2,1,-5)$ پیدا کنید. (ص۸۴کتاب جدید)

تمرین۶)سه بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید. (ص۸۴کتاب جدید)

تمرین۷)بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند به طوری که $|\vec{a}| = 3$ و $|\vec{b}| = 26$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را محاسبه کنید.

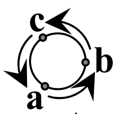
(ص۸۴کتاب جدید)

تمرین۸) مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A = (3,5,7)$ و $B = (5,5,0)$ و $C = (-4,0,4)$ داده شده است را بیابید.
(ص۸۴کتاب جدید)

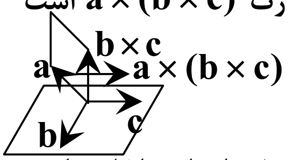
ضرب مختلط عددی (ضرب سه گانه عددی) : فرض کنید a و b و c سه بردار در فضا باشند در این صورت $a.(b \times c)$ را ضرب مختلط (سه گانه) عددی سه بردار a و b و c می نامند.

نکته :
$$a(a_1,a_2,a_3) \text{ و } b(b_1,b_2,b_3) \text{ و } c(c_1,c_2,c_3) \Rightarrow a.(b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

نکته : اگر a و b و c سه بردار در فضا باشند در این صورت $a.(b \times c) = b.(c \times a) = c.(a \times b)$



ضرب مضاعف برداری (ضرب سه گانه برداری) : منظور از ضرب مضاعف (سه گانه) برداری عبارت $a \times (b \times c)$ است که حاصل آن یک بردار است عمود بر صفحه‌ی شامل دو بردار a (بردار بیرون پرانتز) و $(b \times c)$ و همچنین موازی صفحه‌ی شامل دو بردار b و c (بردارهای درون پرانتز) می باشد.



نکته : فرض کنید a و b و c بردارهای دلخواه باشند،ثابت کنید : $a \times (b \times c) = (a.c)b - (a.b)c$ (بردارهای داخل پرانتز را به صورت تفاضل این دو بردار b و c می نویسیم و ضریب هر کدام را ضرب داخلی دو بردار دیگر قرار می دهیم.)

توجه:برای نوشتن حاصل $(b \times c) \times a$ کافیست ابتدا بردار را به صورت $-a \times (b \times c)$ قرینه نموده سپس از دستور بالا استفاده کنیم.

مثال) اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ سه بردار غیر صفر باشند خلاصه شده $(2\mathbf{a}-\mathbf{b}).((\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}))$ کدام است؟

۱) $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ ۲) $2\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ ۳) $3\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ ۴) صفر (کنکور سراسری ریاضی ۹۰)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. روش اوّل : چون $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ سه بردار دلخواه و غیر صفر می باشند پس برای سادگی کار $\mathbf{a}=\mathbf{i}$ و $\mathbf{b}=\mathbf{j}$ و $\mathbf{c}=\mathbf{k}$ در نظر می گیریم. داریم :

$$(2\mathbf{a}-\mathbf{b}).((\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}))=(2,-1,0).((0,1,1)\times(-1,0,1))=(2,-1,0).(1,-1,1)=2+1+0=3$$

از طرفی

$$3\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=3\mathbf{i}.(\mathbf{j}\times\mathbf{k})=3\mathbf{i}.\mathbf{i}=3$$

روش دوم :

$$=(2\mathbf{a}-\mathbf{b}).(\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{c}-\mathbf{c}\times\mathbf{a})=(2\mathbf{a}-\mathbf{b}).(\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}-\mathbf{c}\times\mathbf{a})$$
$$=2\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})-2\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{a})-2\mathbf{a}.(\mathbf{c}\times\mathbf{a})-\mathbf{b}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})-\mathbf{b}.(\mathbf{b}\times\mathbf{a})+\mathbf{b}.(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$$
$$=2\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=3\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

(**توجه** : این تست فقط در حالتی که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ سه بردار غیر صفر متمایز باشند برقرار است.)

مثال) اگر سه بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ مخالف صفر باشند زاویه بین بردار $\mathbf{b}$ و بردار $\mathbf{v}=\mathbf{a}(\mathbf{b}.\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{b}.\mathbf{a})$ چقدر است؟

۱) ۶۰ درجه ۲) ۹۰ درجه ۳) ۳۰ درجه ۴) صفر درجه (کنکور آزاد ریاضی ۷۳)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل :

$$\mathbf{b}.\mathbf{v}=\mathbf{b}.[\mathbf{a}(\mathbf{b}.\mathbf{c})-\mathbf{c}.(\mathbf{b}.\mathbf{a})]=(\mathbf{b}.\mathbf{a})(\mathbf{b}.\mathbf{c})-(\mathbf{b}.\mathbf{c})(\mathbf{b}.\mathbf{a})=0\Rightarrow \mathbf{b}\perp\mathbf{v}\Rightarrow\hat{\theta}=90^\circ$$

روش دوم :

$$\mathbf{v}=\mathbf{a}(\mathbf{b}.\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{b}.\mathbf{a})=\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\perp\mathbf{b},(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$$

مثال) کدام گزینه در مورد بردار $(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{a}$ صحیح است؟

۱) موازی $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ۲) عمود بر $\mathbf{c}$ ۳) عمود بر $\mathbf{b}$ ۴) موازی $\mathbf{a}$

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{a}=\mathbf{c}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$$

مثال) اگر $\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ و $\mathbf{c}=4\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ باشند. تصویر بردار $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ روی محور x ها،کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۲)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل :

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}1\\-2\\0\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}0\\3\\2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4\\-2\\3\end{vmatrix}\Rightarrow(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}-4\\-2\\3\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}4\\1\\-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1\\4\\4\end{vmatrix}$$

روش دوم : با استفاده از ویژگی های ضرب برداری و ضرب مختلط برداری می توان نوشت :

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=-\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=-((\mathbf{c}.\mathbf{b})\mathbf{a}-(\mathbf{c}.\mathbf{a})\mathbf{b})=-((0+3-4)(1,-2,0)-(4-2+0)(0,3,2))=(1,4,4)$$

مثال) اگر $\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ و $\mathbf{c}=4\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ باشند. تصویر بردار $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ روی محور x ها،کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۲)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل :

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}1\\-2\\0\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}0\\3\\2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4\\-2\\3\end{vmatrix}\Rightarrow(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}-4\\-2\\3\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}4\\1\\-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1\\4\\4\end{vmatrix}$$

روش دوم : با استفاده از ویژگی های ضرب برداری و ضرب مختلط برداری می توان نوشت :

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=-\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=-((\mathbf{c}.\mathbf{b})\mathbf{a}-(\mathbf{c}.\mathbf{a})\mathbf{b})=-((0+3-4)(1,-2,0)-(4-2+0)(0,3,2))=(1,4,4)$$

مثال)اگراندازه بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ به ترتیب۲و۲و۳وزاویه های بین دوبه دوی آن ها ۶۰ درجه باشد،حاصل $|\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{6}$ ۲) $6\sqrt{2}$ ۳) ۶ ۴) $3\sqrt{3}$

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$|\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|=|(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}|=|(|\mathbf{a}||\mathbf{c}|\cos 60)\mathbf{b}-(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos 60)\mathbf{c}|$$

$= \left|2\times 3\times \frac{1}{2}b - 2\times 2\times \frac{1}{2}c\right| = |3b - 2c|$

$|3b-2c|^2 = 9|b|^2 + 4|c|^2 - 12|b||c|\cos 60 = 36 + 36 - 12\times 2\times 3\times \frac{1}{2} = 36 \Rightarrow |3b-2c| = 6$

نکته : (اتحاد ژاکوبی) اگر a و b و c بردارهایی دلخواه باشند آنگاه : $a\times(b\times c) + b\times(c\times a) + c\times(a\times b) = o$

مثال) اگر a و b و c سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند،مقدار کدام گزینه با سایرین متفاوت است؟

۱) $a.(c\times b)$ ۲) $a.(b\times c)$ ۳) $b.(a\times c)$ ۴) $(a\times c).b$ (کنکور سراسری ریاضی۸۴)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $(a\times c).b = b.(a\times c) \to a.(c\times b) = b.(a\times c)$

نکته: بردارهای a و b و c درفضاهم صفحه انداگروتنهااگر $a.(b\times c) = 0$ (و یا هر جایگشتی از ضرب سه گانه عددی a و b و c)

شرط آنکه سه برداردریک صفحه باشند: آن است که حجم متوازی السطوح حاصل ازآنهابرابرصفرباشد. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

نکته : اگر مؤلفه های بردارهای a و b و c در فضا نه جمله متوالی یک تصاعد حسابی باشند آنگاه ضرب سه گانه عددی این سه بردار صفر و درنتیجه این سه بردار هم صفحه اند. باید توجه داشت عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست.

نکته : اگر بردار a با یکی از دو بردار b یا c موازی باشد آنگاه : $a.(b\times c) = 0$ یعنی بردارهای a و b و c هم صفحه اند.

نکته : اگر سه بردار a و b و c بردارهایی باشند با این خاصیت که $(a\times b) + (b\times c) + (c\times a) = o$ آنگاه بردارهای a و b و c در یک صفحه قرار می گیرند.

مثال : آیا بردارهای $\vec{a} = (2,3,-1)$ و $\vec{b} = (1,-1,3)$ و $\vec{c} = (1,9,-1)$ در یک صفحه اند؟ (ص۸۴کتاب جدید)

حل : برای این منظور کافی است $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ را به دست آوریم. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی حجم متوازی السطوح تولید شده صفر است و این یعنی سه بردار در یک صفحه اند در غیر این صورت سه بردار در یک صفحه نیستند.

$\vec{b}\times\vec{c} = (-16,14,10) \Rightarrow \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = -32 + 42 - 10 = 0 \Rightarrow$ سه بردار در یک صفحه هستند.

۶۶)بین سه بردار a و b و c رابطه $(a\times b) + (b\times c) + (c\times a) = 0$ برقرار است. وضعیت این سه بردار نسبت به هم چگونه است؟

۱) موازی هم ۲) منطبق بر هم ۳) واقع در یک صفحه ۴) دو به دو عمود بر هم

(کنکور سراسری و آزاد ریاضی خارج از کشور ۹۷)

۶۷) اگر $a(1,-2,0)$ و $b(1,0,1)$ و $c(m,1,1)$ مفروض باشند به ازای کدام مقدار m رابطه‌ی $(a\times b) + (b\times c) + (c\times a) = o$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۵-

مثال) اگر بین سه بردار غیر صفر a و b و c رابطه $a\times b+b\times c=a\times c$ برقرار باشد،آنگاه این سه بردار نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

۱) برابرند.   ۲) هم اندازه اند.   ۳) در یک صفحه اند.   ۴) دو به دو بر هم عمودند.

جواب : گزینه ۳ صحیح است.   سه بردار در یک صفحه اند. $a.(a\times b)+a.(b\times c)=a.(a\times c)\Rightarrow a.(b\times c)=0\Rightarrow$

مثال)به ازای کدام مقدار m رابطه‌ی $a\times b+b\times c=a\times c$ بین سه بردار $a(2,-m,m)$ و $b(1,0,1)$ و $c(0,1,1)$برقرار است؟

۱) ۴   ۲) ۳   ۳) ۲   ۴) ۱

جواب : گزینه ۴ صحیح است.   سه بردار در یک صفحه اند. $a.(a\times b)+a.(b\times c)=a.(a\times c)\Rightarrow a.(b\times c)=0\Rightarrow$

$b\times c=(-1,-1,1)\Rightarrow a.(b\times c)=-2+m+m=0\Rightarrow m=1$

مثال) $\vec{v_1}$، $\vec{v_2}$ و $\vec{v_3}$ سه بردار و $(\vec{v_1}\times\vec{v_2}).\vec{v_3}=0$ کدام گزینه در مورد این سه بردار صحیح است؟

۱) $\vec{v_1}$ بر $\vec{v_2}$ و $\vec{v_2}$ بر $\vec{v_3}$ عمود است.   ۲) $\vec{v_1}\times\vec{v_2}$ موازی $\vec{v_3}$ است.

۳) $\vec{v_1}$، $\vec{v_2}$ و $\vec{v_3}$ در یک صفحه اند.   ۴) $\vec{v_1}$ بر، $\vec{v_2}$ و $\vec{v_3}$ عمود است.   (کنکور سراسری ریاضی ۷۱)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $\vec{v_3}$ بر صفحه شامل $\vec{v_1}$، $\vec{v_2}$ عمود است. $(\vec{v_1}\times\vec{v_2}).\vec{v_3}=0\Rightarrow\vec{v_1}\times\vec{v_2}\perp\vec{v_3}\Rightarrow$

پس $\vec{v_1}$، $\vec{v_2}$ و $\vec{v_3}$ در یک صفحه اند.

نکته:اگر pو qو r و sبردارهای دلخواه باشند،آنگاه بردارهای $a=p\times s$و $b=q\times s$ و $c=r\times s$ در یک صفحه قرار دارند.

مثال) اگر a و b و c و d چهار بردار دلخواه باشند،آنگاه سه بردار $a\times d$، $b\times d$و $c\times d$ نسبت به هم چگونه اند؟

۱) موازی یک صفحه اند.   ۲) موازی هم اند.

۳) دو به دو عمود بر هم اند.   ۴) مجموع آنها برابر صفر است.   (کنکور سراسری ریاضی۸۵خارج از کشور)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : سه بردار $a\times d$، $b\times d$و $c\times d$ همگی عمود بر بردار d هستند و در نتیجه در صفحه ای عمود بر d (صفحه ای که بردار نرمالش d است) قرار می گیرند.

روش دوم : $(a\times d).(b\times d)\times(c\times d)=(a\times d).((b\times d).d)c-(b\times d).c)d)=(b\times d).c)(a\times d).d=0$

مثال) ساده شده عبارت $(a\times i).((b\times i)\times(c\times i))$ کدام است؟

۱) $a.(b\times c)$ ۲) $b.(a\times c)$ ۳) $a\times(b\times c)$ ۴) صفر

جواب : گزینه ۴ صحیح است. با توجه به تمرین کتاب چون بردارهای $(a\times i)$ و $(b\times i)$ و $(c\times i)$ در یک صفحه واقع اند پس :

$(a\times i).((b\times i)\times(c\times i))=0$

۶۸) سه بردار $(1,0,1)$، $(0,2,1)$ و $(m,0,2)$ در یک صفحه اند، m کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۲-   ۳) ۱-   ۴) ۱

۶۹) به ازای کدام مقدار m، بردار $a=(-3,10,m)$ برابر مجموع دو بردار هم راستا با بردارهای $(3,1,2)$ و $(-2,4,1)$ است؟

۱) ۱۰-   ۲) ۸-   ۳) ۹   ۴) ۱۱   (کنکور سراسری ریاضی۹۶خارج از کشور)

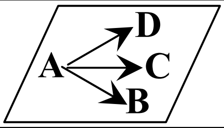
مثال) چند بردار به طول ۲ وجود دارد که بر هر سه بردار $a=(۲,۱,-۱)$ ، $b=(۱,۲,۲)$ و $c=(۰,-۳,-۵)$ عمود باشد؟

۱) صفر　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) بیشمار　　(کنکور آزاد ریاضی صبح ۸۸)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $b\times c=(-۴,۵,-۳), a.(b\times c)=-۸+۵+۳=۰\Rightarrow$ پس سه بردار فوق در یک صفحه اند.

پس دو بردار به طول ۲ وجود دارد که بر هر سه بردار a ، b و c عمود باشد.

نکته : چهار نقطه‌ی دلخواه A ، B ، C و D در یک صفحه واقع اند اگرو تنها اگر $\vec{AB}.(\vec{AC}\times\vec{AD})=۰$



مثال) به ازای چه مقدار m چهار نقطه‌ی $A(۱,۰,۲)$ ، $B(۳,۲,m)$ ، $C(-۱,۱,۱)$ و $D(۲,۱,۳)$ در یک صفحه قرار دارند؟

۱) ۴　　۲) ۴-　　۳) ۳-　　۴) ۳

جواب : گزینه ۱ درست است.
$$\vec{AC}\times\vec{AD}=\begin{vmatrix}۲\\۱\\-۳\end{vmatrix} \text{ و } \vec{AD}\begin{vmatrix}۱\\۰\\۱\end{vmatrix} \text{ و } \vec{AC}\begin{vmatrix}-۲\\۱\\-۱\end{vmatrix} \text{ و } \vec{AB}\begin{vmatrix}۲\\۲\\m-۲\end{vmatrix}$$

$$\vec{AB}.(\vec{AC}\times\vec{AD})=۰\Rightarrow ۴+۲-۳m+۶=۰\Rightarrow m=۴$$

نکته(تعبیر هندسی ضرب مختلط عددی): حجم متوازی السطوحی که a و b و c سه‌یال مجاورآن هستند برابر است با : $|a.(b\times c)|$ و یا هر جایگشتی از ضرب سه گانه عددی a و b و c

مثال:حجم متوازی السطوحی رابه دست آورید که توسط بردارهای $\vec{a}=(۱,۱,۰)$ و $\vec{b}=(۱,۰,۱)$ و $\vec{c}=(۰,۱,۱)$ تولید می شود.

جواب : $\vec{b}\times\vec{c}=(۱,۱,-۱)\Rightarrow V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=|(۱,۱,۰).(۱,۱,-۱)|=|۱+۱+۰|=۲$ (ص۸۳کتاب جدید)

مثال) حجم متوازی السطوحی که با سه بردار $a=i+j+k$ ، $b=i-j+k$ و $c=i+j-k$ ساخته می شود کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۴　　۳) ۶　　۴) ۸

جواب : گزینه۲ درست است. $|a.(b\times c)|=|(۱,۱,۱).(۰,۲,۲)|=|۰+۲+۲|=۴$

مثال) اگر $c=a\times b$ و $|c|=۲\sqrt{۵}$ باشد،حجم متوازی السطوح ساخته شده روی بردارهای a ، b و c کدام است؟

۱) ۲۰　　۲) ۱۵　　۳) ۱۰　　۴) $\frac{۱۰}{۳}$

جواب : گزینه ۱ صحیح است. $v=|c.(a\times b)|=|c.c|=|c|^۲=(۲\sqrt{۵})^۲=۲۰$

۷۰)اگر $a=(۲,-۳,۱)$ و $b=(۱,۲,-۴)$ باشند.حجم متوازی السطوحی که برروی سه بردار a و b و $a\times b$ ساخته شود، کدام است؟

۱) ۲۲۵　　۲) ۲۳۰　　۳) ۲۴۵　　۴) ۲۵۰　　(کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۷)

مثال) اگر سه بردار به تصاویر $(۲,a,۱)$ و $(b,۲,۴)$ و $(۲,۱,c)$ یال های یک مکعب مستطیل باشند،حجم آن کدام است؟

۱) ۳۲　　۲) ۳۶　　۳) ۴۲　　۴) ۴۵　　(کنکور سراسری ریاضی۹۰خارج از کشور)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $v_۱(۲,a,۱)$ و $v_۲(b,۲,۴)$ و $v_۳(۲,۱,c)$

اوّلاً : باید این سه بردار دو به دو بر هم عمود باشند. (یال های مکعب مستطیل

$$\begin{cases} v_1.v_2=0 \\ v_1.v_3=0 \\ v_2.v_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b+2a+4=0 \\ 4+a+c=0 \\ 2b+2+4c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=1 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1=(2,-3,1) \\ v_2=(1,2,4) \\ v_3=(2,1,-1) \end{cases} \Rightarrow v_2\times v_3=\begin{vmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \end{vmatrix}$$

ثانیاً : حجم مکعب مستطیل (متوازی السطوح) قدرمطلق حاصل ضرب مختلط سه بردار است.

$$v=|v_1.(v_2\times v_3)|=|-12-27-3|=42$$

۷۱) حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار واقع بر نیمسازهای سه صفحه xoy و yoz و zox به ترتیب با طول های $\sqrt{2}$ و $2\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ با مؤلفه های غیر منفی ساخته می شود،چند واحد مکعب است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) $8\sqrt{2}$ ۴) $12\sqrt{2}$ (کنکور سراسری ریاضی۸۴خارج از کشور)

مثال)بر روی سه بردار $a=2i-j$ و $b=j+3k$ و $c=4i-k$ یک متوازی السطوح ساخته شده است. اگر قاعده این متوازی السطوح را بردارهای a و b تشکیل دهند،ارتفاع متوازی السطوح کدام است؟

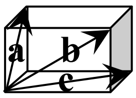
۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲ (کنکور سراسری ریاضی۸۹خارج از کشور)

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$a\times b=\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 \\ -6 \\ 2 \end{vmatrix}\Rightarrow s=|a\times b|=\sqrt{9+36+4}=7 \quad \text{مساحت قاعده}$$

$$v=|c.(a\times b)|=|-12-2|=14 \ \text{حجم متوازی السطوح} \Rightarrow 14=7h\Rightarrow h=2 \ \text{ارتفاع متوازی السطوح}$$

نکته : حجم متوازی السطوحی که a و b و c قطرهای سه وجه مجاور آن هستند برابر است با : $\frac{1}{2}|a.(b\times c)|$



مثال) روی سه بردار $OA=(3,2,-1)$ و $OB=(2,0,1)$ و $OC=(2,-2,1)$ یک متوازی السطوح ساخته شده است. حجم هرم هم حجم با این متوازی السطوح کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{10}{3}$

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$\vec{OB}\times\vec{OC}=\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{vmatrix}\Rightarrow v=|\vec{OA}.(\vec{OB}\times\vec{OC})|=|6+0+4|=10$$

مثال) با سه بردار هم آغاز $\vec{OA}=(1,0,1)$ و $\vec{OB}=(0,2,1)$ و $\vec{OC}=(2,2,0)$ منشوری ساخته می شود که این سه بردار سه‌یال همرس آن می باشند. اگر قاعده این منشور،مثلث OAB باشد،ارتفاع منشور کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

جواب :گزینه ۲ درست است. حجم منشور نصف حجم متوازی السطوحی است که با بردارهای $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ و $\vec{OC}$ ساخته می شود.

$\vec{OA}\times\vec{OB} = \begin{vmatrix}۱\\۰\\۱\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}۰\\۲\\۱\end{vmatrix} = (-۲,-۱,۲) \Rightarrow$ مساحت قاعده $s = \frac{۱}{۲}\left|\vec{OA}\times\vec{OB}\right| = \frac{\sqrt{۴+۱+۴}}{۲} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow$

حجم متوازی السطوح $= \left|\vec{OC}.(\vec{OA}\times\vec{OB})\right| = |-۴-۲+۰| = ۶ \Rightarrow$

حجم منشور $= V = \frac{۱}{۲}\times ۶ = ۳ \Rightarrow V = s\times h \Rightarrow ۳ = \frac{۳}{۲}\times h \Rightarrow h = ۲$

مثال) اگر $a = b\times c = (۱,۲,-۲)$ ،آن گاه حاصل $b.(c\times a)$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۳   ۳) ۵   ۴) ۹

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $b.(c\times a) = a.(b\times c) = a.a = |a|^{۲} = ۱+۴+۴ = ۹$

مثال) اگر $c = a\times b$ و $|c| = ۲\sqrt{۵}$ باشد،حجم متوازی السطوح ساخته شده روی بردارهای a، b و c کدام است؟

۱) ۲۰   ۲) ۱۵   ۳) ۱۰   ۴) ۵

جواب : گزینه ۱ صحیح است. $v = |c.(a\times b)| = |c.c| = |c|^{۲} = (۲\sqrt{۵})^{۲} = ۲۰$

۷۲) اگر $c = a\times b$ و حجم متوازی السطوح ساخته شده روی بردارهای a، b و c برابر ۴۹ واحد حجم باشد، $|a\times b|$ کدام است؟

۱) ۴۹   ۲) ۷   ۳) ۱۴   ۴) ۹۸

مثال) دو بردار $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ و بردار $\vec{OC}$ برابر حاصل ضرب برونی آنها را در نظرمی گیریم. اگر حجم متوازی السطوحی که سه پاره خط OA و OB و OC سه‌یال یک راس آن می باشند ۸۱ سانتیمتر مکعب باشد،اندازه $\left|\vec{OC}\right|$ کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۹   ۳) ۱۲   ۴) ۱۵

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $v = \left|\vec{OC}.(\vec{OA}\times\vec{OB})\right| = \left|\vec{OC}.\vec{OC}\right| \Rightarrow ۸۱ = \left|\vec{OC}\right|^{۲} \Rightarrow \left|\vec{OC}\right| = ۹$

مثال)نقاط $A(۱,۰,۱)$ و $B(۰,۱,۱)$ و $C(۱,۱,۰)$ و $D(۰,۲,۱)$ مفروضند.حجم متوازی السطوح به‌یال های BA و BC و BD کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۴

جواب : گزینه۲ درست است.

روش اوّل : $\vec{BA}\begin{vmatrix}۱\\-۱\\۰\end{vmatrix}$ و $\vec{BC}\begin{vmatrix}۱\\۰\\-۱\end{vmatrix}$ و $\vec{BD}\begin{vmatrix}۰\\۱\\۰\end{vmatrix}$ و $\vec{BC}\times\vec{BD} = \begin{vmatrix}۱\\۰\\۱\end{vmatrix} \Rightarrow V = \left|\vec{BA}.(\vec{BC}\times\vec{BD})\right| = |۱+۰+۰| = ۱$

روش دوم : $\vec{BA}\begin{vmatrix}۱\\-۱\\۰\end{vmatrix}$ و $\vec{BC}\begin{vmatrix}۱\\۰\\-۱\end{vmatrix}$ و $\vec{BD}\begin{vmatrix}۰\\۱\\۰\end{vmatrix} \Rightarrow V = \left|\vec{BA}.(\vec{BC}\times\vec{BD})\right| = \left\|\begin{matrix}۱ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & -۱ & ۰\end{matrix}\right\| = ۱$

نکته : اگر a، b و c سه‌یال همرس یک هرم مثلث القاعده (چهاروجهی) باشند،آنگاه حجم هرم از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$v=\frac{۱}{۶}\left|a.(b\times c)\right|$$

نکته : اگر نقاط A، B، C و D چهار راس یک هرم مثلث القاعده (چهاروجهی) باشند،آنگاه حجم هرم از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$v=\frac{۱}{۶}\left|\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})\right|$$

نکته : هرگاه صفحه π محورهای مختصات را در نقاط $A(p,۰,۰)$ و $B(۰,q,۰)$ و $C(۰,۰,r)$ قطع کند حجم هرم $O-ABC$ از دستور $v=\frac{۱}{۶}\left|pqr\right|$ و مساحت مثلث ABC از دستور $S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}\sqrt{p^۲q^۲+q^۲r^۲+p^۲r^۲}$ و فاصله‌ی مبدأ مختصات از صفحه مثلث ABC از دستور $\frac{۱}{OH^۲}=\frac{۱}{p^۲}+\frac{۱}{q^۲}+\frac{۱}{r^۲}$ به دست می آید. که در آن O مبدأ مختصات و H پای عمودی است که از مبدأ بر صفحه مثلث ABC رسم می شود.

مثال) سه بردار $a=(۱,۲,m-۱)$ و $b=(۲,-۱,۰)$ و $c=(۵,۰,۰)$ مفروض اند اگر حجم چهاروجهی ساخته شده روی این سه بردار برابر ۵ واحد سطح باشد حداقل مقدار m کدام است؟

۱) ۵- ۲) ۷- ۳) ۵ ۴) ۷

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$b\times c=(۲,-۱,۰)\times(۵,۰,۰)=(۰,۰,۵)$$

$$v=\frac{۱}{۶}\left|a.(b\times c)\right|=۵\Rightarrow\frac{۱}{۶}\left|۵(m-۱)\right|=۵\Rightarrow m-۱=\pm۶\Rightarrow m=-۵ \text{ یا } m=۷$$

مثال) مختصات چهار راس هرمی $A(۱,۲,۳)$ و $B(۱,۲,۱)$ و $C(۱,۶,۱)$ و $D(-۱,۲,۴)$ است حجم هرم چقدر است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱۶}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$ (کنکور ریاضی آزاد۸۷ صبح)

جواب : گزینه ۴ صحیح

$$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}۰\\۰\\-۲\end{vmatrix},\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix}۰\\۴\\-۲\end{vmatrix},\overrightarrow{AD}\begin{vmatrix}-۲\\۰\\۱\end{vmatrix},\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}۴\\۴\\۸\end{vmatrix},v=\frac{۱}{۶}\left|\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})\right|=\frac{۱}{۶}\left|۰+۰-۱۶\right|=\frac{۸}{۳}$$

نکته : اگر a، b و c سه‌یال همرس یک منشور مثلث القاعده باشند،آنگاه حجم منشور از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$v=\frac{۱}{۲}\left|a.(b\times c)\right|$$

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲	۲	۴	۳	۱	۲	۳	۲	۲	۴	۱	۱	۱	۳	۴	۳	۱	۴	۲	۲
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴	۲	۲	۴	۱	۱	۱	۳	۳	۳	۳	۲	۳	۱	۱	۴	۱	۳	۴	۳
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۲	۲	۳	۱	۳	۳	۴	۴	۳	۴	۲	۳	۳	۱	۴	۴	۴	۳	۳	۳
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲								
۲	۲	۳	۱	۴	۳	۳	۱	۱	۲	۱	۲								

موفق و سربلند باشید