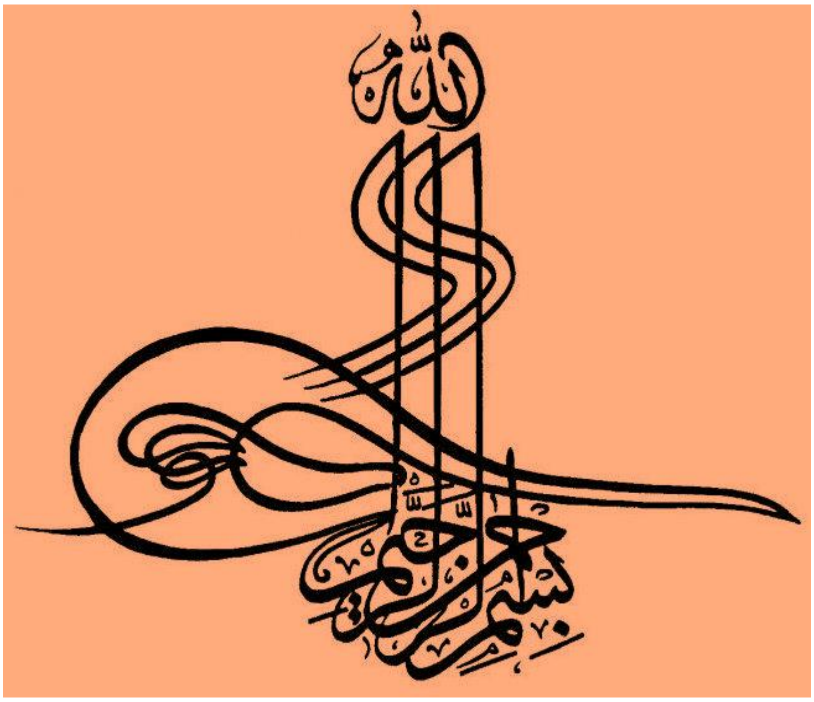


مثلثات

(فصل دوم ریاضی ۱۲ تجربی)

(قابل استفاده برای دانش آموزان کنکوری تجربی و ریاضی فیزیک نظام جدید)

- طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی
- پاسخ کاملا تشریحی
- تمرین‌های برای آمادگی

مؤلف:
حبیب هاشمی

۱۳۹۷

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب کتاب درسی ریاضی دوازدهم تجربی فصل دوم ، مبحث « **مثلثات**» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع‌تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

درس اول :تناوب و تابع تانژانت

مثال: تابع $f(x) = sinx$ را بر R در نظر بگیرید. می دانیم $f\left(\frac{\pi}{۳}\right) = sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

اگر به مقدار $\left(\frac{\pi}{۳}\right)$ مقدار ۲π اضافه شود باز هم مقدار $f(x)$ همین خواهد شد. به عبارتی

$$f\left(\frac{\pi}{۳} + ۲\pi\right) = sin\left(\frac{\pi}{۳} + ۲\pi\right) = sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

یعنی:
$$f\left(\frac{\pi}{۳} + ۲\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{۳}\right)$$

این خاصیت به ازای تمام x ها در دامنه $f(x)$ برقرار است یعنی به ازای هر x

$$\sin(x + ۲\pi) = \sin x$$

در این حالت تابع $f(x) = sinx$ را متناوب گوییم

تابع متناوب: فرض کنیم $f(x)$ با دامنه تعریف D_f در اختیار باشد. تابع f را متناوب گوییم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که :

الف) اگر $x \in D_f$ آنگاه $x \pm T \in D_f$

ب) به ازای همه x های متعلق به دامنه داشته باشیم.

$$f(x \pm T) = f(x)$$

همچنین اگر به $\left(\frac{\pi}{۳}\right)$ مقدار ۴π اضافه شود باز هم مقدار $f(x)$ همین خواهد شد. به عبارتی

$$f\left(\frac{\pi}{۳}+۴\pi\right)=sin\left(\frac{\pi}{۳}+۴\pi\right)=sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

یعنی:
$$f\left(\frac{\pi}{۳}+۴\pi\right)=f\left(\frac{\pi}{۳}\right)$$

درحالت کلی به ازای هر x داریم:

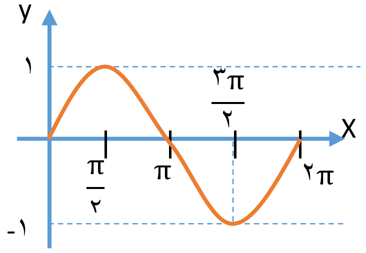
$$\sin(x+۲\pi)=\sin(x+۴\pi)=\sin(x+۶\pi)=\cdots=\sin x$$

مقدار (۲π) را دوره تناوب $\sin(x)$ گوییم .

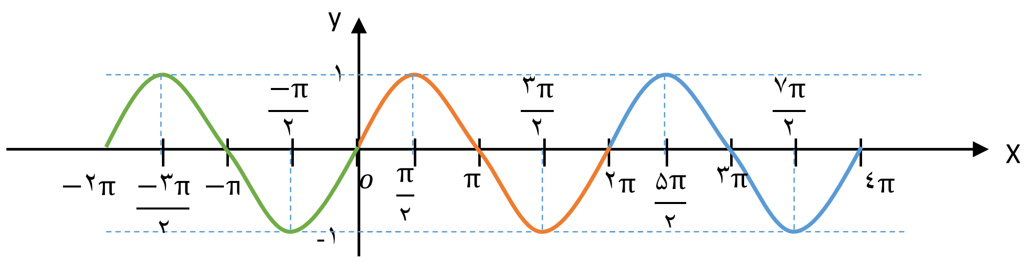
دوره‌ی تناوب: کوچک‌ترین مقدار مثبت T که به ازای آن تساوی $f(x+T)=f(x)$ برای هر $x\in D_f$ برقرار باشد را دوره‌ی تناوب تابع f می‌گوییم.

می‌توان با داشتن هر قسمتی از نمودار $y=\sin x$ در بازه‌هایی به طول $۲\pi, ۴\pi, ۶\pi$ و ... و در کنار هم قرار دادن این نمودار به طور متوالی در کنار هم نمودار $y=\sin x$ را به طور کامل رسم کرد اما ۲π طول کوچک‌ترین قطعه ای از نمودار $y=\sin x$ است که می‌توان با آن نمودار $y=\sin x$ را بازسازی کرد. ۲π را دوره‌ی تناوب تابع $y=\sin x$ می‌گوییم.

نمودار تابع $y=sinx$ به صورت زیر است.

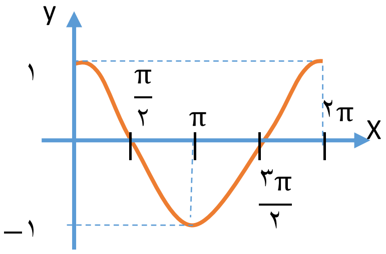


دوره‌ی تناوب تابع $y=\sin x$ برابر $T=۲\pi$ است. با تکرار این نمودار، نمودار تابع $y=\sin x$ روی دامنه‌ی آن، یعنی R به صورت زیر در می‌آید.

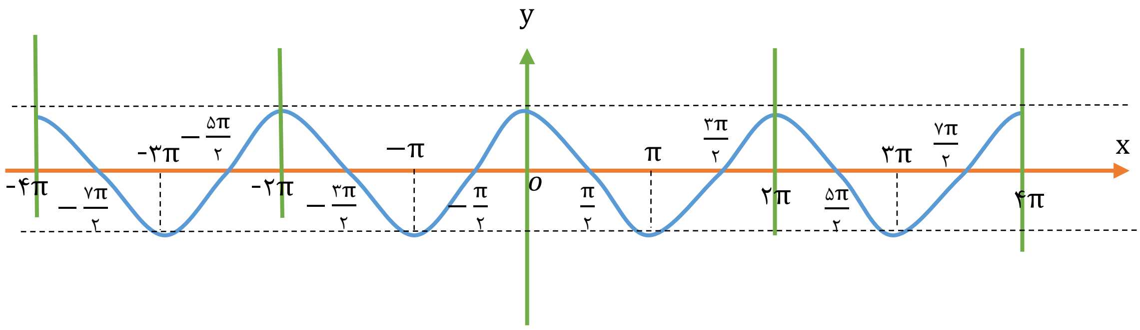


مثال: برای تابع $f(x)=\cos x$ داریم: $\cos(x+۲\pi)=\cos(x+۴\pi)=\cdots=\cos x$

بنابر این $T=۲\pi$ دوره‌ی تناوب تابع $f(x)=\cos x$ می‌باشد.



نمودار تابع $y=\cos x$ در یک دوره‌ی تناوب به صورت روبه‌رو می باشد. با تکرار این نمودار، نمودار تابع $y=\cos x$ روی دامنه‌ی آن، یعنی R به صورت زیر درمی‌آید:



نکته:دوره‌ی تناوب توابع $y=a\sin(bx)+c$ و $y=a\cos(bx)+c$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|x\text{ضریب}|}=\frac{۲\pi}{|b|}$ می- باشد.

مثال: دوره‌ی تناوب تابع $y=-۱+۴\cos(۳x)$ برابر $T=\frac{۲\pi}{۳}$ است. پس اگر قطعه‌ای از نمودار $y=-۱+۴\cos(۳x)$ را در بازه‌ای به طول $\frac{۲\pi}{۳}$ داشته باشیم، آن‌گاه با تکرار این قطعه به طور متوالی، می‌توان تمام نمودار $y=-۱+۴\cos(۳x)$ را رسم کرد.

مثال:دوره‌ی تناوب هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=۱+۲sin۷x$ جواب: $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۷}$

ب) $y=\sqrt{۳}-cos\frac{\pi}{۲}x$ جواب: $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴$

پ) $y=-\pi\, sin\frac{۱}{۲}(x-۲)$ جواب: $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$

مثال: اگر دوره‌ی تناوب تابع $y=-۴\sin(ax)+۲$ برابر ۵π باشد، مقدار مثبت a را به‌دست آورید.

پاسخ: دوره‌ی تناوب تابع برابر $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ است. طبق فرض $T=۵\pi$ است. بنابر این:

$$\frac{۲\pi}{|a|}=۵\pi \Rightarrow |a|=\frac{۲}{۵}\xrightarrow{a>o} a=\frac{۲}{۵}$$

نکته: در توابع $y=a\sin(bx)+c$ و $y=a\cos(bx)+c$ ماکزیمم برابر $c+|a|$ و مینیمم برابر $c-|a|$ می‌باشد.

تذکر: با قرار دادن اعداد ±۱ به جای $\sin(bx)$ و $\cos(bx)$ نیز می توان بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار را به‌دست آورد.

مثال: دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

آ) $y=-۴\sin(۲x)+۱$ ب) $y=۳\sin(\frac{\pi}{۲}x)-۵$

پاسخ: آ) $a=-۴\,,b=۲\,,c=۱$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۲}=\pi\,,\text{ماکزیمم}=c+|a|=۱+۴=۵ \text{ و } \text{مینیمم}=c-|a|=۱-۴=-۳$$

ب) $a=۳,b=\frac{\pi}{۲},c=-۵$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴,\text{ماگزیمم}=c+|a|=-۵+۳=-۲\,,\text{مینیمم}=c-|a|=-۵-۳=-۸$$

مثال : دوره‌ی تناوب، مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید.

آ) $y=-۳+۴\sin(۲x)$

$$b=۲\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$$

$$max=c+|a|\xlongequal{a=۴\,,c=-۳}-۳+|۴|=۱$$

$min = c - |a| \xrightarrow{a = ۴\,, c = -۳} -۳ - |۴| = -۷$

ب) $y = -۱ + \sqrt{۳}\cos(۳\pi x)$

$$b = ۳\pi \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۳\pi} = \frac{۲}{۳}$$

$max = c + |a| \xrightarrow{a = \sqrt{۳}\,, c = -۱} -۱ + \sqrt{۳},$

$min = c - |a| \xrightarrow{a = \sqrt{۳}\,, c = -۱} -۱ - \sqrt{۳}$

پ) $y = -\frac{۱}{۴}\sin\left(\frac{۴\pi}{۳}x\right)$

$$b = \frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{\frac{۴\pi}{۳}} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

$max = c + |a| \xrightarrow{a = -\frac{۱}{۴}\,, c = ۰} o + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴}$

$min = c - |a| \xrightarrow{a = -\frac{۱}{۴}\,, c = ۰} o - \frac{۱}{۴} = -\frac{۱}{۴}$

ت) $y = \sqrt{۲} + ۳\cos\left(\frac{۳}{۴}x\right)$

x ضریب $= \frac{۳}{۴} \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۸\pi}{۳}$

$max = c + |a| \xrightarrow{a = ۳\,, c = \sqrt{۲}} \sqrt{۲} + ۳$

$min = c - |a| \xrightarrow{a = ۳\,, c = \sqrt{۲}} \sqrt{۲} - ۳$

ث) $y = -\pi\cos(۲x) - ۱$

x ضریب $= ۴ \Rightarrow T = \frac{\pi}{۴}$

$max = c + |a| \xrightarrow{a = -\pi\,, c = -۱} -۱ + \pi$

$min = c - |a| \xrightarrow{a = -\pi\,, c = -۱} -۱ - \pi$

به دست آوردن a وbوc در توابع $y = a\sin(bx) + c$ و $y = a\cos(bx) + c$

وقتی دوره تناوب ، مقادیر ماکزیمم و مینیمم را داشته باشیم.

الف) برای به دست آوردن b مقدار T یعنی دوره تناوب را در فرمول $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ جایگذاری می کنیم و b را به دست می آوریم.

ب) برای به دست آوردن a و c با جایگذاری ماکزیمم و مینیمم در روابط زیر a و c را به دست می آوریم

$$\begin{cases} max = c + |a| \\ min = c - |a| \end{cases}$$

مثال : در سوال زیر دوره تناوب ، مقادیر ماکزیمم و مینمم برای تابع $y = a\cos(bx) + c$ داده شده است.

در هر قسمت ضابطه‌ی تابعی را بنویسید.

الف) $T = ۲\pi$, ماکزیمم $= ۸$, مینیمم $= ۲$

حل) $T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۲\pi \Rightarrow |b| = ۱ \Rightarrow b = \pm ۱$

$$\begin{cases} max = c + |a| = ۸ \\ min = c - |a| = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲c = ۱۰ \Rightarrow c = ۵$$

$$\xrightarrow{c+|a|=۸} ۵ + |a| = ۸ \Rightarrow |a| = ۳ \Rightarrow a = \pm ۳$$

$$a = -۳, b = ۱ , c = ۵ \Rightarrow y = a\cos(bx) + c = -۳\cos(x) + ۵$$

ب) $T = \frac{۱}{۴}$, ماکزیمم $= ۱$, مینیمم $= -۳$

حل) $T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow |b| = ۸\pi \Rightarrow b = \pm ۸\pi$

$$\Rightarrow |a| = ۲ \Rightarrow a = \pm ۲ \begin{cases} c + |a| = ۱ \\ c - |a| = -۳ \end{cases} \Rightarrow ۲c = -۲ \Rightarrow c = -۱ \xrightarrow{c+|a|=۱} -۱ + |a| = ۱$$

$$a = ۲, b = -۸\pi , c = -۱ \Rightarrow y = ۲\cos(-۸\pi x) - ۱$$

مثال: دوره‌ی تناوب، مقادیر ماگزیمم و مینیمم تابع $y = a\sin(bx) + c$ داده شده است. در هر قسمت ضابطه‌ی تابعی را بنویسید.

آ) $T = \frac{\pi}{۳}$, ماکزیمم $= ۶$, مینیمم $= ۰$

حل $T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow |b| = ۶ \Rightarrow b = \pm ۶$

$$\begin{cases} max = c + |a| = ۶ \\ min = c - |a| = o \end{cases} \Rightarrow ۲c = ۶ \Rightarrow c = ۳$$

$$\xrightarrow{c+|a|=۶} ۳ + |a| = ۶ \Rightarrow |a| = ۳ \Rightarrow a = \pm ۳$$

یکی از تابع‌هایی که می‌توان نوشت به صورت زیر است:

$$a = -۳\,, b = ۶\,, c = ۳ \Rightarrow y = -۳\sin(۶x) + ۳$$

ب) $T = ۲$, ماکزیمم $= ۵$, مینیمم $= -۵$

حل) $T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۲ \Rightarrow |b| = \pi \Rightarrow b = \pm\pi$

$$\begin{cases} max = c + |a| = ۵ \\ min = c - |a| = -۵ \end{cases} \Rightarrow ۲c = o \Rightarrow c = ۰$$

$$\xrightarrow{c+|a|=۵} ۰ + |a| = ۵ \Rightarrow |a| = ۵ \Rightarrow a = \pm ۵$$

یکی از تابع‌هایی که می‌توان نوشت به صورت زیر است:

$$a = ۵\,, b = \pi\,, c = ۰ \Rightarrow y = ۵\sin(\pi x)$$

مثال: تابع $f(x) = a\cos(bx) + c$ مفروض است. اگر دوره‌ی تناوب تابع ۴π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب ۶ و ۲- باشند، با فرض مثبت بودن a و b ضابطه‌ی تابع f را بنویسید.

پاسخ: دوره‌ی تناوب $= T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۴\pi \Rightarrow \frac{۱}{|b|} = ۲ \Longrightarrow |b| = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{b>o} b = \frac{۱}{۲}$

ماگزیمم $= c + |a| = ۶$, مینیمم $= c - |a| = -۲$

$$\begin{cases} c + |a| = ۶ \\ c - |a| = -۲ \end{cases} \Rightarrow ۲c = ۴ \Rightarrow c = ۲ \xrightarrow{c+|a|=۶} ۲ + |a| = ۶ \Rightarrow a = \pm ۴ \xrightarrow{a>۰} a = ۴$$

بنابر این ضابطه‌ی تابع f به صورت $y = ۴\cos(\frac{۱}{۲}x) + ۲$ می‌باشد

به دست آوردن a و b و c در توابع $y = a\sin(bx) + c$ و $y = a\cos(bx) + c$ وقتی نمودار را داشته باشیم.

الف) برای به دست آوردن b ابتدا با توجه به نمودار دوره تناوب (T) را به دست می آوریم سپس در فرمول دوره تناوب یعنی $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ جایگذاری می کنیم و b را به دست می آوریم.

نکته:فاصله طولی دو مینیمم متوالی یا دو ماکزیمم متوالی برابر دوره تناوب است

نکته: اگرفاصله طولی بین مینیمم و ماکزیمم را دوبرابر کنیم دوره ی تناوب به دست می آید یعنی

$$T = ۲\,|x_{max} - x_{min}|$$

ب) برای به دست آوردن a و c با توجه به نمودار ماکزیمم و مینیمم را مشخص می کنیم و با جایگذاری ماکزیمم و مینیمم در روابط زیر a و c را به دست می آوریم

$$\begin{cases} max = c + |a| \\ min = c - |a| \end{cases}$$

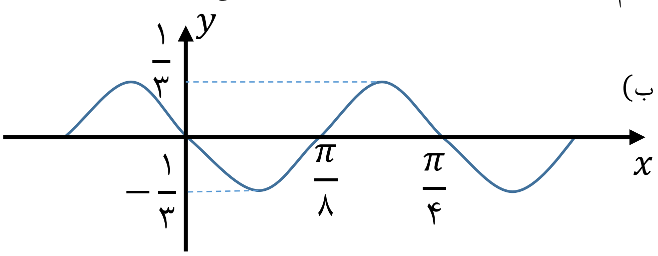
نکته: در صورت نداشتن ماکزیمم یا مینیمم از نقاط برخورد نمودار با محورهای مختصات یا نقاطی از نمودار که طول وعرض آن مشخص باشد استفاده می کنیم به این صورت که مختصات نقاط داده شده را در معادله قرار می دهیم.

بحث روی علامت a و b و c در توابع $y = a\sin(bx) + c$ وقتی نمودار را داشته باشیم.

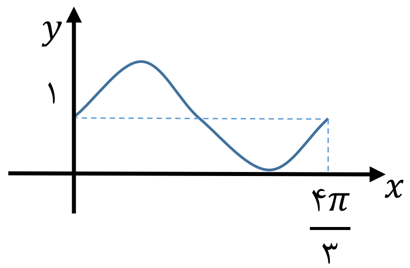
در نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ اگراز نقطه برخورد نمودار با محور yها به سمت راست روی نمودارحرکت کنیم و ابتدا به سمت بالا برویم، (تابع ابتدا اکیداً صعودی باشد.) آنگاه $ab > ۰$ (a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی) در غیر اینصورت $ab < ۰$ (a و b یکی مثبت و دیگری منفی)

مثال: قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ رسم شده است. مقادیر a ،b و c را تعیین کنید.

ب)



آ)



آ) اگر نمودار تابع که در بازه‌ی $\left[۰,\frac{۴\pi}{۳}\right]$ رسم شده است را در کنار هم و به صورت متوالی قرار دهیم، آن‌گاه نمودار تابع سینوسی $y = a\sin(bx) + c$ به طور کامل به‌دست می‌آید. بنابر این دوره‌ی تناوب نمودار تابع برابر $T = \frac{۴\pi}{۳}$ است. از طرفی داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow |b| = \frac{۳}{۲} \Rightarrow b \pm \frac{۳}{۲} \quad y = a\sin\left(\pm\frac{۳}{۲}x\right) + c$$

مقدار تابع به ازای $x = ۰$، برابر ۱ است، یعنی نقطه $(۰,۱)$ در معادله صدق می کندبنابر این:

$$x = ۰ \quad \Rightarrow y = a\sin(۰) + c = ۱ \quad \Rightarrow c = ۱$$

همچنین کم‌ترین مقدار تابع برابر صفر است

$$min = c - |a| \rightarrow ۰ = ۱ - |a| \rightarrow |a| = ۱ \rightarrow a = \pm ۱$$

با توجه به نمودار a و b هم علامتند

با فرض $b=\frac{۳}{۲}$، آنگاه $a=۱$

با فرض $b=-\frac{۳}{۲}$، آنگاه $a=-۱$

ب) دوره‌ی تناوب تابع برابر $\frac{\pi}{۴}$است:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow |b|=۸\Rightarrow b=\pm ۸$$

$$\begin{cases} max=c+|a|=\frac{۱}{۳} \\ min=c-|a|=-\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow ۲c=o\Rightarrow c=o$$

$$\xrightarrow{c+|a|=\frac{۱}{۳}} |a|=\frac{۱}{۳}\Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۳}$$

باتوجه به نمودار a و b هم علامت نیستند یکی از حالت‌ها را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$b=۸\ ,a=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}\sin(۸x)$.

بحث روی علامت a و b و c در توابع $y=a\cos(bx)+c$ وقتی نمودار را داشته باشیم.

همواره $\cos(-x)=\cos x$ است، پس در تابع $y=a\cos(bx)$ می‌توان همواره b را مثبت فرض کرد.

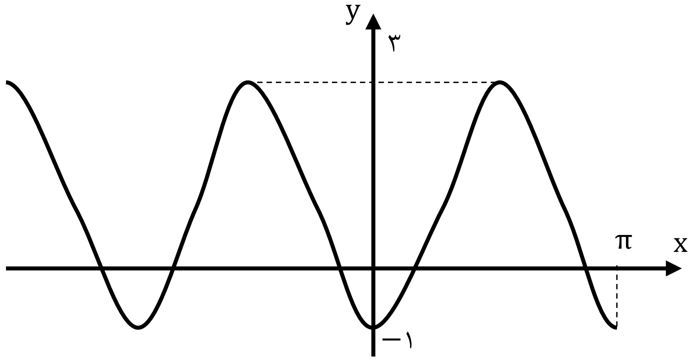
در نمودار تابع $y=a\cos(bx)+c$ اگراز نقطه برخورد نمودار با محور y ها به سمت راست روی نمودارحرکت کنیم ابتدا به سمت بالا برویم. (تابع ابتدا اکیداً صعودی باشد.) آنگاه $a<۰$ در غیر اینصورت $a>۰$

چگونگی تشخیص سینوسی یا کسینوسی بودن نمودار داده شده

نکته: اگر نمودار داده شده دارای ماکزیمم یامینیممی بر روی محور y ها باشد(بر روی محور y ها قله یا گودی داشته باشیم)بانمودار تابع $y = a\cos(bx) + c$ سرو کار داریم در غیر اینصورت با نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ سروکار داریم.

مثال: ضابطه‌ی مربوط به نمودار داده شده به صورت $y = a\cos(bx) + c$ یا $y = a\sin(bx) + c$است.

مقادیر b,a و c را مشخص کنید.



پاسخ: چون نمودار داده شده دارای مینیمم(گودی) بر روی محور y هامی باشد با تابع $y = a\cos(bx) + c$ سرو کار داریم

دوره‌ی تناوب تابع برابر π است بنابر این:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲$$

باتوجه به نمودار a<o است. طبق نمودار، مقادیر ماگزیمم و مینیمم تابع

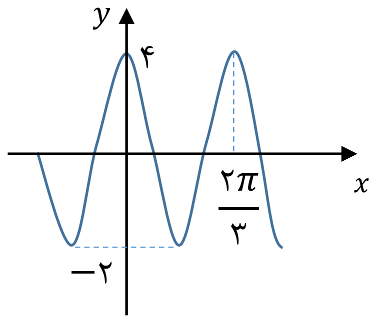
به ترتیب ۳ و ۱- می‌باشند.

$$\text{ماگزیمم} = c + |a| = ۳\,,\ \text{مینیمم} = c - |a| = -۱$$

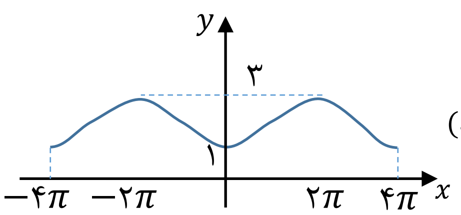
$$\begin{cases} c + |a| = ۳ \\ c - |a| = -۱ \end{cases} \Rightarrow ۲c = ۲ \Rightarrow c = ۱ \xrightarrow{c+|a|=۳} ۱ + |a| = ۳ \Rightarrow a = \pm ۲ \xrightarrow{a<۰} a = -۲$$

مثال: ضابطه‌ی مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده به صورت $y = a\cos(bx) + c$ یا $y = a\,s\,in(bx) + c$ است. ضابطه‌ی آن‌ها را بنویسید.

(آ



(ب



حل) آ) چون نمودار داده شده دارای ماکزیمم(قله) بر روی محور y هامی باشد با تابع

$y = a\cos(bx) + c$ سرو کار داریم

دوره‌ی تناوب تابع $T = \frac{۲\pi}{۳}$ است، بنابر این:

$$T = \frac{۲\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = ۳ \Rightarrow b = \pm ۳$$

چون $\cos(-\theta) = cos\theta$ است، پس:

$$\cos(\pm ۳x) = \cos ۳x$$

بیش‌ترین مقدار و کم‌ترین مقدار تابع به ترتیب ۴ و ۲- می‌باشند:

$$\begin{cases} c + |a| = ۴ \\ c - |a| = -۲ \end{cases} \Rightarrow ۲c = ۲ \Rightarrow c = -$$

$$\xrightarrow{c+|a|=۴} |a| = ۳ \Rightarrow a = \pm ۳$$

با توجه به نمودار a>o پس a=۳ است و در نتیجه ضابطه‌ی تابع به صورت $y = ۳\cos(۳x) + ۱$ است.

ب) $$T = ۴\pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b \pm \frac{۱}{۲}$$

فرض کنیم $b = \frac{۱}{۲}$ باشد.

$$\begin{cases} c+|a| = ۳ \\ c-|a| = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۲c = ۴ \Rightarrow c = ۲$$

$$\xrightarrow{c+|a|=۳} |a| = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$$

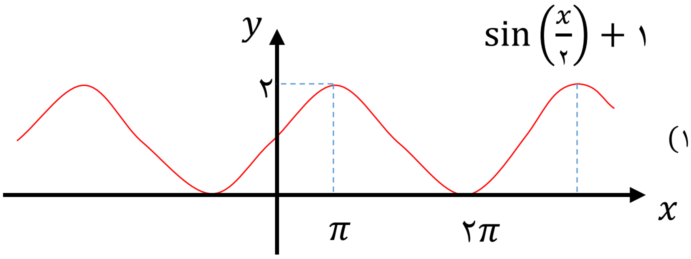
باتوجه به نمودار $a < ۰$

$$a = -۱\,, b = \frac{۱}{۲}\,, c = ۲ \Rightarrow y = -\cos\left(\frac{۱}{۲}x\right) + ۲$$

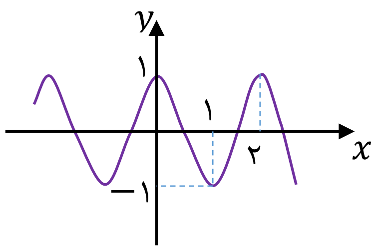
مثال: هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

آ) $y = \cos(\pi x)$ ب) $y = ۲ - \sin(۲x)$ پ) $y = ۲ - \cos\left(\frac{x}{۲}\right)$ ت) $y = \sin\left(\frac{x}{۲}\right) + ۱$

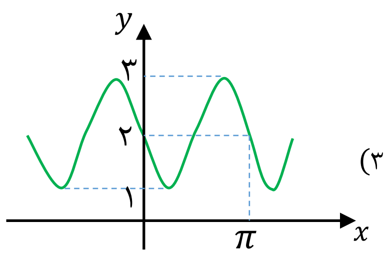
۱)



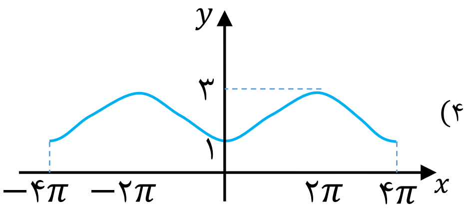
۲)



۳)



۴)



حل) آ) چون با یک نمودار کسینوسی سرو کار داریم پس نمودار های (۱) و (۳) حذف می شوند از طرفی دوره‌ی تناوب $y = \cos(\pi x)$ برابر $T = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$ و مقادیر ماگزیمم و مینیمم تابع به ترتیب ۱ و ۱- هستند. با توجه به نمودارهای داده شده، نمودار(۲)، نمودار $y = \cos(\pi x)$ است.

ب) چون با یک نمودار سینوسی سرو کار داریم پس نمودار های (۲) و (۴) حذف می شوند از طرفی دوره‌ی تناوب تابع $y = ۲ - \sin(۲x)$ برابر $T = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$ و مقادیر ماگزیمم و مینیمم تابع به ترتیب $c + |a| = ۲ + ۱ =$

$c-|a|=۲-۱=۱$ و ۳ می‌باشند. با توجه به نمودارهای داده شده، نمودار(۳)، نمودار تابع $y=۲-\sin(۲x)$ می‌باشد.

پ) چون با یک نمودار کسینوسی سرو کار داریم پس نمودار های (۱) و (۳) حذف می شوند از طرفی دوره‌ی تناوب تابع $y=۲-\cos\left(\frac{x}{۲}\right)$ برابر $T=\frac{۲\pi}{۱}=۴\pi$ و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع به ترتیب $c+|a|=۲+۱=۳$ و $c-|a|=۲-۱=۱$ می‌باشند. با توجه به نمودارهای داده شده، نمودار(۴)، نمودار تابع $y=۲-\cos\left(\frac{x}{۲}\right)$ می‌باشد.

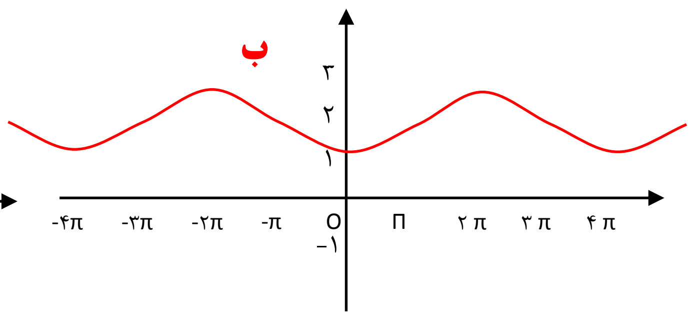
ت) چون با یک نمودار سینوسی سرو کار داریم پس نمودار های (۲) و (۴) حذف می شوند از طرفی دوره‌ی تناوب تابع $y=\sin\left(\frac{x}{۲}\right)+۱$ برابر $T=\frac{۲\pi}{۱}=۴\pi$ و مقادیر ماگزیمم و مینیمم تابع به ترتیب $c+|a|=۱+۱=۲$ و $c-|a|=۱-۱=o$ می‌باشند. با توجه به نمودارهای داده شده، نمودار(۱)، تابع $y=۱+\sin\left(\frac{x}{۲}\right)$ می‌باشد.

مثال: هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

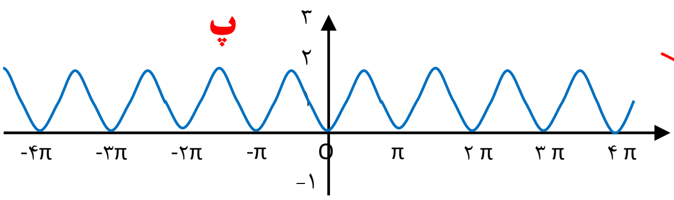
الف) $y=sin\pi x$ ب) $y=۲-cos\frac{۱}{۲}x$ پ) $y=۱-cos۲x$

ت) $y=sin۲x$

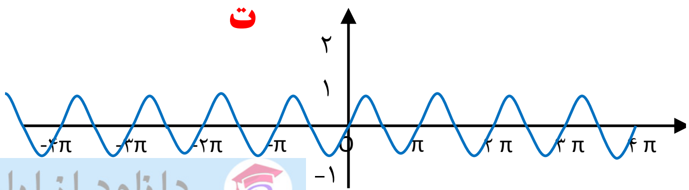
ب



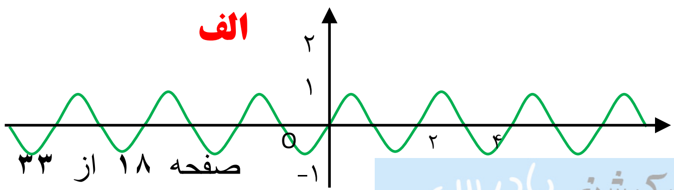
پ



ت



الف



مثال: در جاهای خالی عدد یا کلمه‌ی مناسب قرار دهید.

آ) دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin(۸x)$، ... ... است.

ب) بیش‌ترین مقدار تابع $y = -۴\cos(۲x) + ۱$، ... ... و کم‌ترین مقدار تابع $y = ۳\sin x + ۲$، ... ... است.

پ) تابع $y = \cos x$ در بازه‌ی (o,π)، ... ... است. (یکنوا، غیریکنوا)

حل) آ) $T = \frac{۲\pi}{۸} = \frac{\pi}{۴}$

ب) $c + |a| = ۱ + ۴ = ۵$ $\quad c - |a| = ۲ - ۳ = -۱$

پ) یکنوا

مثال: کدام یک از عبارت‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

آ) اگر به ازای هر $x \in D_f, x \pm ۲ \in D_f$ و $f(x \pm ۲) = f(x)$ آن‌گاه $T = ۲$ دوره‌ی تناوب تابع است.

ب) در تابع $y = a\cos(bx) + c$، ضریب a در دوره‌ی تناوب تابع بی تأثیر است اما در مقادیر ماگزیمم و مینیمم تابع تأثیر گذار است.

حل) آ) نادرست است، زیرا شرایط داده شده نشان می‌دهد که f یک تابع متاوب است اما مشخص نکرده است که عدد ۲ کوچک‌ترین عدد مثبتی است که در این شرایط صدق می‌کند. به عنوان مثال، ممکن است عدد $\frac{۱}{۲}$ نیز برای این تابع در شرایط داده شده صدق کند.

ب) درست است. دوره‌ی تناوب از فرمول $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ به‌دست می‌آید، بنابر این در تعیین دوره‌ی تناوب، فقط b تأثیرگذار است. اما مقادیر ماگزیمم و مینیمم تابع از فرمول‌های $c + |a|$ و $c - |a|$ به‌دست می‌آیند و در نتیجه مقادیر a و c در تعیین مقادیر ماگزیمم و مینیمم تأثیرگذار هستند.

مثال: در یک شهر در ابان ماه به‌طور متوسط در هر شبانه روز حداکثر دما ۳۲ درجه‌ی سانتی‌گراد و حداقل ۲۰ درجه‌ی سانتی‌گراد است یک معادله‌ی سینوسی برای تعیین درجه حرارت در شبانه روز بنویسید.

$$\begin{cases} c + |a| = ۳۲ \\ c - |a| = ۲۰ \end{cases} \Rightarrow ۲c = ۵۲ \Rightarrow c = ۲۶ \xrightarrow{c+|a|=۳۲} |a| = ۶ \Rightarrow a = \pm ۶$$

$$\frac{۲\pi}{b} = ۲۴ \to b = \frac{۲\pi}{۲۴} = \frac{\pi}{۱۲}$$

$$y = ۶\sin\left(\frac{\pi}{۱۲}x\right) + ۲۶$$

مثال: در یک مخزن آب شهری از یک طرف آب وارد می‌شود و پس از تصفیه‌ی آب از راه دیگر خارج می‌شود ارتفاع در این مخزن طبق یک رابطه‌ی سینوسی است که هر روز تکرار می‌شود اگر در ساعت ۳ صبح ارتفاع آن ماگزیمم و برابر ۱۵ متر در ساعت ۱۵ عصر کمترین ارتفاع به اندازه‌ی ۶ متر داشته باشیم معادله‌ی این تابع را بنویسید. در ساعت ۱۲ ارتفاع آب چقدر است؟

$$\begin{cases} c + |a| = ۱۵ \\ c - |a| = ۶ \end{cases} \Rightarrow ۲c = ۲۱ \Rightarrow c = ۱۰/۵ \xrightarrow{c+|a|=۱۵} |a| = ۴/۵ \Rightarrow a = \pm ۴/۵$$

$$T = ۲(۱۵ - ۳) = ۲۴ \to ۲۴ = \frac{۲\pi}{b} \to b = \frac{\pi}{۱۲}$$

$$\max(۳,۱۵) \to ۱۵ = ۴/۵\sin\left(\frac{\pi}{۱۲} \times ۱۵ + \theta\right) + ۱۰/۵ \to ۴/۵\sin\left(\frac{\pi}{۴} + \theta\right) = ۴/۵$$

$$\to \sin\left(\frac{\pi}{۴} + \theta\right) = ۱ = sin\frac{\pi}{۲}$$

$$\frac{\pi}{۴} + \theta = \frac{\pi}{۲} \to \theta = \frac{\pi}{۴}$$

$$\min(۱۵,۶) \to ۶ = ۴/۵\sin\left(\frac{\pi}{۱۲} \times ۱۵ + \propto\right) + ۱۰/۵ \to ۴/۵\sin\left(\frac{۵\pi}{۴} + \theta\right) = -۴/۵$$

$$\to \sin\left(\frac{۵\pi}{۴} + \theta\right) = -۱ = sin\frac{۳\pi}{۲}$$

$\frac{۵\pi}{۴} + \theta = \frac{۳\pi}{۲} \to \theta = \frac{\pi}{۴}$

$$t = ۱۲ \to y = ۴/۵\sin\left(\frac{\pi}{۱۲} \times + \frac{\pi}{۴}\right) + ۱۰/۵ = ۴/۵\left(-sin\frac{\pi}{۴}\right) + ۱۰/۵ = -۴/۵ \times ۰/۷ + ۱۰/۵ = ۷/۳$$

مثال: جمعیت نوعی از حیوانات طبق معادله‌ی $p(t) = ۲۰۰۰cos\frac{\pi t}{۵} + ۸۰۰۰$ می‌باشد که $p(t)$ تعداد یا جمعیت در سال t می-باشد دوره‌ی تناوب جمعیت چند سال است ماگزیمم و می‌نیمم جمعیت چقدر است؟ نمودار آن‌را رسم کنید. (در یک دوره تناوب) معادله را بر حسب سینوس بنویسید.

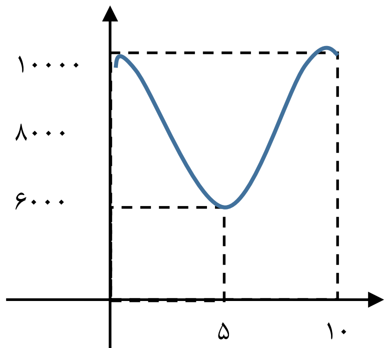
$T = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۵}} = ۱۰$ زمانی ماکزیمم رخ می‌دهد که کسینوس عدد ۱ برگرداند

یا هرمضربی از ۱۰
$$\begin{cases} t = o \to cos\frac{\pi t}{۵} = ۱ \to p(۰) = ۲۰۰۰ \times ۱ + ۸۰۰۰ = ۱۰۰۰۰ \\ t = ۱۰ \to cos\frac{\pi t}{۵} = cos۲\pi = ۱ \to p(۱۰) = ۲۰۰۰ \times ۱ + ۸۰۰۰ = ۱۰۰۰۰ \end{cases}$$

می‌نیمم زمانی رخ می‌دهد که کسینوس کمترین مقدار خود یعنی ۱- برگرداند یعنی در نقاط ۱۰k+۵

$t = ۵ \to cos\frac{\pi t}{۵} = cos\pi = -۱ \to p(۵) = ۲۰۰۰ \times -۱ + ۸۰۰۰ = ۶۰۰۰$

$p(t) = ۲۰۰۰\sin\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi t}{۵}\right) + ۸۰۰۰$



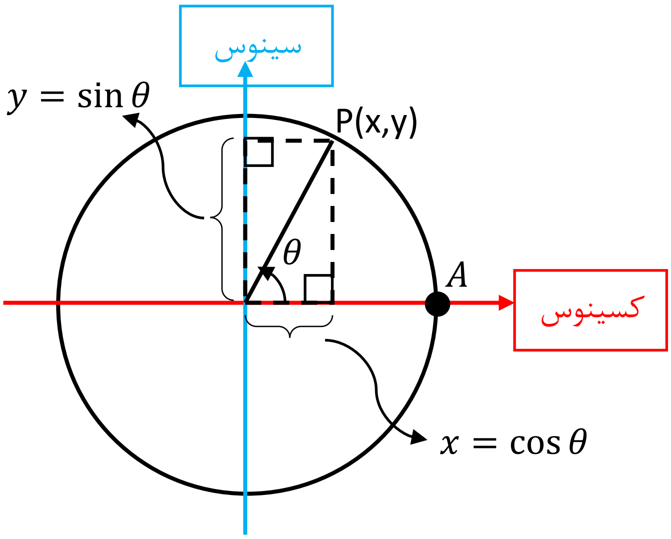
مثال: معادله ولتاژ یک دستگاه خانگی بر حسب تابع cos نسبت به زمان دارای فرکانس (دوره‌ی تناوب) $\frac{۱}{۶۰}$ می‌باشد به‌طوری‌که تغییرات ولتاژ در بازه‌ی [۱۷۰ , ۱۷۰-] است معادله‌ی این ولتاژ را بنویسید.

$y = p(t) = a\cos(bt) + c , \frac{۲\pi}{b} = \frac{۱}{۶۰} \to b = ۱۲۰\pi$

$$\begin{cases} c + |a| = ۱۷۰ \\ c - |a| = -۱۷۰ \end{cases} \Rightarrow ۲c = ۰ \Rightarrow c = ۰ \xrightarrow{c+|a|=۱۷۰} |a| = ۱۷۰ \Rightarrow a = \pm۱۷۰$$

$p(t) = ۱۷۰\cos(۱۲۰\pi t)$

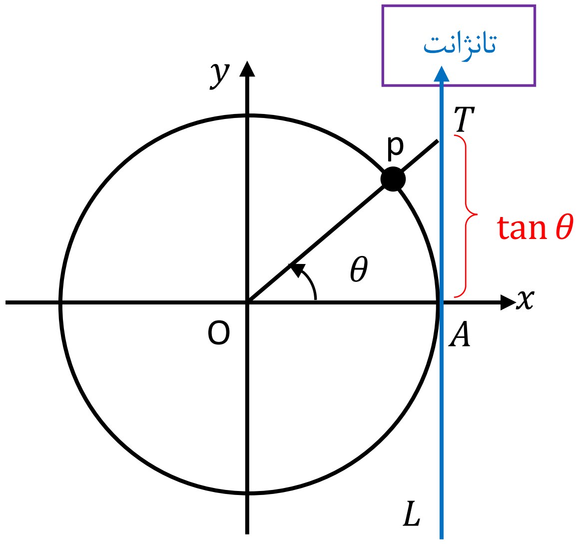
محور سینوس و کسینوس و تانژانت



در دایره‌ای به شعاع ۱ (دایره‌ی مثلثاتی)، به ازای هر مقدار حقیقی زاویه‌ی θ نقطه‌ی $p(\cos\theta , \sin\theta)$ دوران یافته‌ی نقطه‌ی $A(۱, o)$ تحت دوران θ حول مبدا می‌باشد. بنابر این اگر نقطه‌ی $p(x, y)$ روی دایره‌ی مثلثاتی باشد، آن‌گاه:

$$(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

بنابراین محور xها، محور کسینوس‌ها و محور yها، محور سینوس‌ها می‌باشد.



خط که در نقطه‌ی A (مبدأ دایره‌ی مثلثاتی) و عمود بر محور xها (مماس بر دایره‌ی مثلثاتی) رسم می‌شود را محور تانژانت‌ها می‌نامیم. فرض کنیم θ یک زاویه‌ی دلخواه در موقعیت استاندارد و p انتهای کمان زاویه‌ی θ باشد، پاره خط op را امتداد می‌دهیم تا خط L (محور تانژانت) را در نقطه‌ی T قطع کند در مثلث OAT داریم:

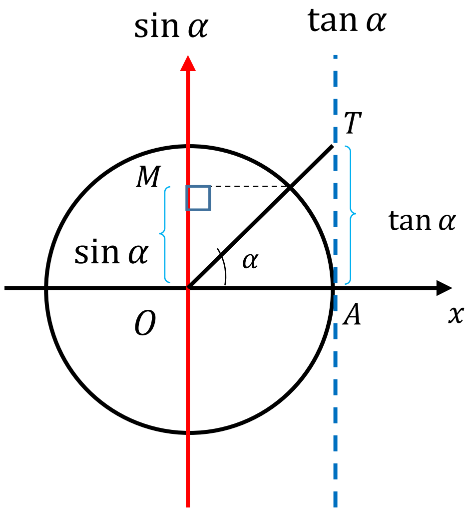
$$\tan\theta = \frac{AT}{OA} \xrightarrow{OA=۱} \boxed{\tan\theta = AT}$$

توجه: اگر T بالای محور xها باشد، مقدار $\tan\theta$ عددی مثبت و اگر T پایین محور xها قرار بگیرد مقدار $\tan\theta$ عددی منفی است.

مثال: با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید.

آ) $o < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ ب) $\pi < \alpha < \frac{۳\pi}{۲}$

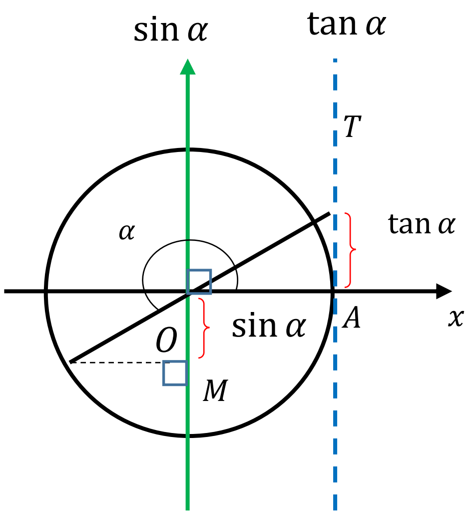
حل) آ) زاویه‌ی دلخواه α را در ناحیه‌ی اول مشخص می‌کنیم و مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه می‌کنیم.



$$OM = \sin\alpha \ , \ AT = \tan\alpha$$

$$AT > OM \Rightarrow \tan\alpha > \sin\alpha$$

ب) زاویه‌ی دلخواه α را در ناحیه‌ی سوم در نظر می‌گیریم.



$$\left.\begin{array}{l} OM = \sin\alpha < o \\ AT = \tan\alpha > o \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\alpha > \sin\alpha$$

دامنه‌ی تانژانت

تابع کسری $y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ به ازای xهایی که $\cos x=0$ شود تعریف نشده است و می‌دانیم $\cos x$ به ازای $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$ و... برابر صفر است. این مقادیر را می‌توان از فرمولی $k\pi+\frac{\pi}{2}$ که در آن $k\in Z$ است، به دست آورد. بنابر این:

۱). دامنه‌ی تابع $y=\tan x$ به صورت $R-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\middle|k\in Z\right\}$ است.

۲). دامنه‌ی تابع $y=a+b\tan u$ با حل نامعادله‌ی $u\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ به‌دست می‌آید.

$$D_y=R-\left\{u=k\pi+\frac{\pi}{2}\middle|k\in Z\right\}$$

مثال: دامنه‌ی تابع $y=\tan(2x)$ را به‌دست آورید.

پاسخ: باید جواب‌های معادله‌ی $2x=k\pi+\frac{\pi}{2}(K\in Z)$ رااز R حذف کنیم تا دامنه‌ی تابع به‌دست بیاید:

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\,,k\in Z\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\,,k\in Z\Rightarrow D_y=R-\left\{\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\middle|k\in Z\right\}$$

مثال: دامنه‌ی تابع $y=4\tan(x+\frac{\pi}{3})$ را به‌دست آورید.

پاسخ: باید جواب‌های معادله‌ی $x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}(K\in Z)$ رااز R حذف کنیم تا دامنه‌ی تابع به‌دست بیاید:

$$x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}\,,k\in Z\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z\Rightarrow$$

$$D_y=R-\left\{k\pi+\frac{\pi}{6}\middle|k\in Z\right\}$$

مثال: دامنه‌ی تابع $y=3\tan(5x)-1$ را به‌دست آورید.

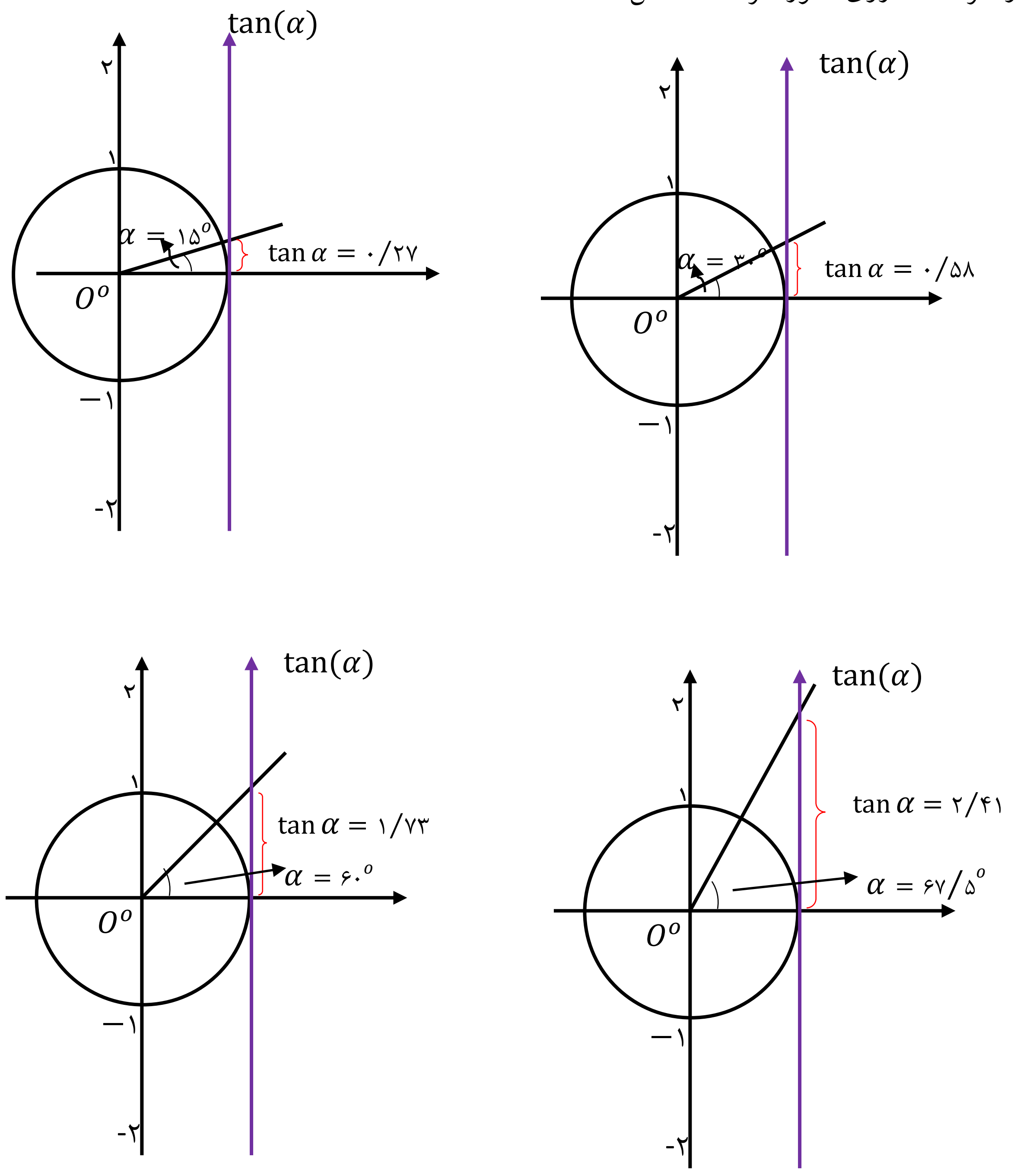
پاسخ: باید جواب‌های معادله‌ی $5x=k\pi+\frac{\pi}{2}(K\in Z)$ رااز R حذف کنیم تا دامنه‌ی تابع به‌دست بیاید:

$$5x=k\pi+\frac{\pi}{2}\,,k\in Z\Rightarrow x=\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\,,k\in Z\Rightarrow D_y=R-\left\{\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\middle|k\in Z\right\}$$

یکنوایی $y = tan\ x$ و نمودار تابع در بازه‌ی $[0, ۲\pi]$

در دایره‌های مثلثاتی زیر و از چپ به راست، زاویه‌ی α در حال افزایش است و اندازه‌ی آن به ۹۰^o نزدیک می‌شود

و تانژانت آن روی محور تانژانت مشخص شده است.



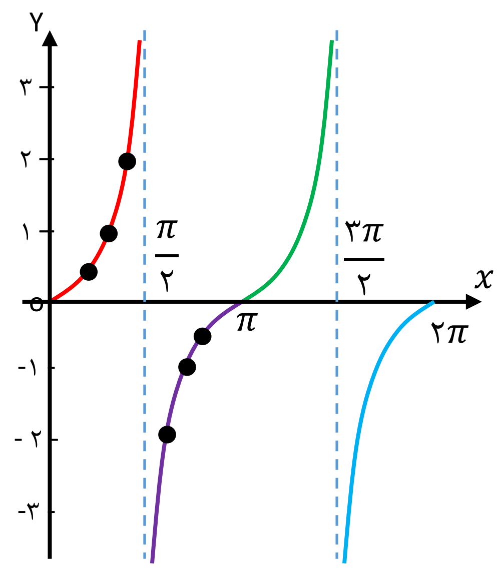
∝	۱۵^o یا $\frac{\pi}{۱۲}$	۳۰^o یا $\frac{\pi}{۶}$	۶۰^o یا $\frac{\pi}{۳}$	$۶۷/۵^o$ یا $\frac{۳\pi}{۸}$
tan ∝	۰/۲۷	۰/۵۸	۱/۷۳	۲/۴۱

همانگونه که از روی دایره‌ی مثلثاتی و هم چنین جدول بالامشاهده می‌شود، وقتی که α از ۰ تا ۹۰^o در حال افزایش است، مقدار $\tan\alpha$ نیز در حال افزایش است. بنابر این تابع $y=\tan x$ در بازه‌ی $\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)$ یعنی ناحیه‌ی اول اکیداً صعودی است.

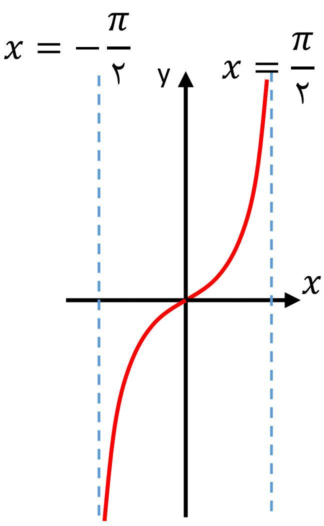
به همین ترتیب، مشخص می‌شود که تابع $y=\tan x$در سه ناحیه‌ی دیگر نیز صعودی می‌باشد.

در جدول زیر، برخی از مقادیر $y=\tan x$ مشخص شده است. همچنین نمودار این تابع رسم شده است.

θ	o	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
$\tan\theta$	o	۰/۵۸	۱	۱/۷۳	−۱/۷۳	−۱	−۰/۵۸	o	۰/۵۸	۱	۱/۷۳	−۱/۷۳	−۱	−۰/۵۸	o

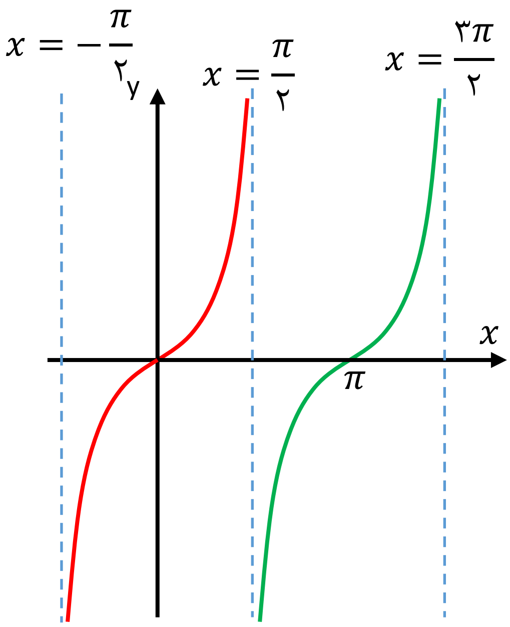


توجه مهم: به خط‌های $x=\frac{\pi}{۲}, x=\frac{۳\pi}{۲}$ و... در نمودار توجه کنید. تابع در این نقاط تعریف نشده است ولی وقتی x به این اعداد خیلی نزدیک می‌شود. مقادیر تابع به $+\infty$ یا $-\infty$ (مقدارها دائماً در حال افزایش یا کاهش هستند.) میل می‌کنند و هیچ‌گاه نمودار تابع این خطوط را قطع نمی‌کند.



مثال: نمودار تابع $y=\tan x$ در یک دوره‌ی تناوب $\left(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right)$ به صورت روبه‌رو است:

مثال: نمودار تابع $y=\tan x$ در بازه $\left(-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right)$ به صورت زیر است



نکته: با توجه به نمودار $y=\tan x$ تابع در بازه‌های $\left(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right),\left(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right)$ ... و $\left(\frac{(۲k-۱)\pi}{۲},\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}\right)$ اکیداً صعودی می‌باشد.

یادآوری: در فاصله‌ای که یک تابع **اکیداً صعودی** است، **با حرکت روی نمودار (از چپ به راست) همواره روبه بالا خواهیم رفت.**

نکته: با توجه به نمودار $y=\tan x$ تابع در هر بازه‌ای که شامل هر یک از مقادیر $\pm\frac{\pi}{۲},\pm\frac{۳\pi}{۲}$ و ... باشد، غیر یکنوا خواهد شد.

مثال: تابع در بازه‌ی (o,π) که شامل $x=\frac{\pi}{۲}$ است، نه اکیداً صعودی و نه اکیداً نزولی است .

مثال:کدام یک از عبارت‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در هر بازه‌ای که در آن تعریف شده باشد، اکیداً صعودی است.

ب) بازه‌ای وجود دارد که تابع تانژانت در آن اکیداً نزولی باشد.

پ) بازه‌ای وجود دارد که تابع تانژانت در آن غیر صعودی است.

الف) درست است.

با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $\left(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right)$، $\left(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right)$و .... که تابع در آن تعریف شده است، اکیداً صعودی است.

ب) نادرست است.

پ) درست است. با توجه به نمودار، تابع در بازه‌ی (o,π)غیر صعودی است.

دوره تناوب تانژانت

با توجه به این که $\tan(x+\pi)=\tan x$ می‌باشد، $T=\pi$ دوره‌ی تناوب تابع $y=\tan x$ است. هم چنین دوره‌ی تناوب تابع $y=a\tan(bx)+c$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ می‌باشد که b ضریب x است.

مثال: دوره‌ی تناوب هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=۱+۲tan۷x$ جواب: $T=\frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{۷}$

ب) $y=\sqrt{۲}-tan\frac{\pi}{۳}x$ جواب: $T=\frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{۳}}=۳$

پ) $y=-\pi\ tan\frac{۱}{۲}(x-۴)$ جواب: $T=\frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{\frac{۱}{۲}}=۲\pi$

ت) $y=-\pi+\sqrt{۲}tan۳x$ جواب: $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{\pi}{۳}$

درس دوم بخش اول :نسبت های مثلثاتی 2α

یادآوری روابط بین نسبت های مثلثاتی

الف)رابطه ی بین سینوس و کسینوس

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

تذکر: از این فرمول وقتی استفاده می کنیم که سینوس

توجه:

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

و

تضمینی کنکور

تهران و کرج