



## حد

(فصل سوم ریاضی ۱۲ تجربی)

(قابل استفاده برای دانش آموزان کنکوری تجربی و ریاضی فیزیک نظام جدید)

طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی



پاسخ کاملا تشریحی



تمرین های برای آمادگی



مؤلف:

حبیب هاشمی

۱۳۹۸

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تألیف حبیب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با نوزده سال سابقه تدریس در برگزاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش و پرورش منطقه ۴ تهران و مدرس دانشگاه

با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا به آیدی تلگرام @habib\_hashemi پیام دهید.



جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

تدریس خصوصی و مبحثی ریاضیات

متوسطه

و

تضمینی کنکور

تهران و کرج



## مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب کتاب درسی ریاضی دوازدهم تجربی فصل سوم، مبحث «**حد**» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

- ۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.
  - ۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.
  - ۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.
  - ۴- در این کتاب با نگاهی عمیق تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثالها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.
  - ۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.
  - ۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.
  - ۷- توجه به دانش قبلی دانش آموزان.
  - ۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.
- در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبيب هاشمی



## درس اول: رفع ابهام حد توابع در حالت $\frac{0}{0}$

### حد توابع کسری

با قضیه‌ی زیر از پایه‌ی قبل آشنا هستیم:

قضیه: اگر دو تابع  $f$  و  $g$  در نقطه‌ای به طول  $a$  حد داشته باشند و حد آن‌ها در این نقطه به ترتیب  $l$  و  $m$  باشد به‌طور که  $m \neq 0$  آن‌گاه تابع  $\frac{f}{g}$  نیز در  $a$  حد دارد و این حد برابر  $\frac{l}{m}$  است.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = \frac{12}{6} = 2 \quad \text{مثال:}$$

در سال گذشته دیدیم که برای محاسبه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}$  اگر به  $\frac{0}{0}$  برسیم می‌گوییم جواب حد **مبهم** است یعنی جواب واقعی حد را به دست نیاورده ایم در این صورت دیگر قضیه‌ی بالا برای محاسبه‌ی حد تابع  $\frac{f}{g}$  در  $a$  قابلیت استفاده ندارد. پس باید عملیاتی برای به دست آوردن حد واقعی انجام دهیم تا **رفع ابهام** گردد.

نکته: برای رفع ابهام عامل صفر کننده یعنی  $(x - a)$  را در صورت و مخرج ایجاد می‌کنیم و با ساده کردن آن از صورت و مخرج، مقدار حد را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

$(x - a)$  را عامل صفر کننده گوییم زیرا:

$$x \rightarrow a \Rightarrow x - a \rightarrow 0$$



## بخش اول: رفع ابهام توابع چند جمله ای

## حالت اول: حذف عامل صفر کننده به کمک تجزیه

یادآوری تجزیه چند جمله ای ها: برای تجزیه چند جمله ای ها از دو روش زیر استفاده می کنیم

الف) فاکتورگیری (ب) تجزیه به کمک اتحادها

برای تجزیه یک عبارت ابتدا به سراغ فاکتورگیری می رویم که شرط استفاده از فاکتورگیری وجود یک عبارت مشترک است.

الف) فاکتورگیری: عبارت مشترک با توان کمتر را به عنوان فاکتور در نظر می گیریم و بقیه عبارات را بر فاکتور

تقسیم می کنیم و در پرانتز دیگری قرار می دهیم:

۱) $x^2 - x \xrightarrow{\text{مشترک پس } x \text{ فاکتور}} x(x-1)$ $\frac{x^2}{x} = x, \frac{x}{x} = 1$	۲) $x^3 - 4x^2 + x = x(x^2 - 4x + 1)$
۳) $x^3 - 4x^2 = x^2(x-4)$	۴) $2x^2 - 4x = 2x(x-2)$
۵) $2x - 4 = 2(x-2)$	۶) $5x^2 - 7x = x(5x-7)$
۷) $x^5 - 4x^4 = x^4(x-4)$	۸) $2x^3 + 16 = 2(x^3 + 8)$
۹) $4x - 6 = 2(x-3)$	۱۰) $-15x^2 - 20x^3 = -5x^2(3 + 4x)$
۱۱) $-x^2 - x = -x(x+1)$	۱۲) $-x - 5 = -(x+5)$

(ب) تجزیه به کمک اتحادها:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

(I) اتحاد مزدوج

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

(II) اتحاد چاق و لاغر

دو جمله باشند

$$x^2 + (a + b)x + a \cdot b$$

سه جمله باشند: اتحاد جمله مشترک ( $x^2$  ضریب یک داشته باشد)



**مثال:** عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

$$۱) x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$$

$$۲) x^2 + x - ۲ = (x - ۱)(x + ۲)$$

$$۳) x - x^2 = x(1 - x)$$

$$۴) 3x - 6 = 3(x - 2)$$

$$۵) -x - ۲ = -(x + ۲)$$

$$۶) x^3 - 4x^2 + x = x(x^2 - 4x + 1)$$

$$۷) 5x^5 - 4x^4 + x^3 = x^3(5x^2 - 4x + 1)$$

$$۸) x^5 - x^4 = x^4(x - 1)$$

$$۹) 4x^5 - x^3 = x^3(4x^2 - 1) = x^3(2x - 1)(2x + 1)$$

$$۱۰) 6x + 8 = 2(3x + 4)$$

$$۱۱) 2 - 4\sqrt{x} = 2(1 - 2\sqrt{x})$$

$$۱۲) x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$$۱۳) x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$۱۴) x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

$$۱۵) x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$$

$$۱۶) x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$۱۷) x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$۱۸) x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

$$۱۹) x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$$

$$۲۰) 8x^3 - 27 = (2x - 3)(4x + 6x + 9)$$

$$۲۱) x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$$



$$۲۴) x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x - 2) = (x - 2)^2$$

$$۲۵) x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$$

$$۲۶) x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

$$۲۷) x^2 - 6x + 5 = (x - 5)(x - 1)$$

$$۲۸) x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

$$۲۹) x^2 - 18x + 72 = (x - 6)(x - 12)$$

$$۳۰) x^2 - 15x + 50 = (x - 10)(x - 5)$$

$$۳۱) x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$$

$$۳۲) 2x^3 - 32x = 2x(x^2 - 16) = 2x(x - 4)(x + 4)$$

**مثال:** حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 6x + 8}$  را به دست آورید.

روش اول: با جایگذاری عدد ۲ به جای  $x$  به  $\frac{0}{0}$  می رسیم که برای رفع ابهام بایستی عامل صفرکننده را در صورت و مخرج درست کنیم و با هم حذف کنیم تا رفع ابهام گردد.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(2)^2 - 4}{(2)^2 - 6(2) + 8} = \frac{0}{0}$$

عامل صفر کننده  $x \rightarrow 2 \Rightarrow x - 2 \rightarrow 0 \Rightarrow x - 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x - 2)}(x + 2)}{\cancel{(x - 2)}(x - 4)} = \frac{2 + 2}{2 - 4} = \frac{4}{-2} = -2$$

**مثال:** حاصل  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x^3 + x^3}{5x^4 - 2x^3 + 3x^2}$  کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x^3 + x^3}{5x^4 - 2x^3 + 3x^2} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(2 + x^2 + x)}{x^2(5x^2 - 2x + 3)} = \frac{2}{5}$$





**مثال:** مقدار  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$  را محاسبه کنید.

**حل:** صورت و مخرج کسر به ازای  $x=1$  برابر صفرند. بنابراین این هم صورت و هم مخرج بر  $(x-1)$  بخش پذیرند. این عامل را به کمک تجزیه، در صورت و مخرج ظاهر و سپس حذف می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

**مثال:** حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x^2+3x} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)}{x} = \frac{-6}{-3} = 2 \quad (\text{حل})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{2x-6} \quad (\text{ب}) \quad (\text{نهایی - دی ۹۱})$$

**حل:** عبارت  $x^2 - 9$  را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{3x+3} \quad (\text{پ})$$

**حل:** عبارت  $x^2 + 3x + 2$  را با استفاده از اتحاد حمله‌ی مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{3(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{3} = \frac{-1+2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-x} \quad (\text{ت}) \quad (\text{نهایی - دی ۹۰})$$

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-4)(x-1)}{x(x-1)} = \frac{1-4}{1} = -3 \quad (\text{حل})$$



**مثال:**  $a$  را طوری بیابید که  $\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{x-2a}{x^2-4a^2} = \frac{1}{8}$  باشد. (نهایی - خرداد ۸۶)

$$\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{x-2a}{x^2-4a^2} = \lim_{x \rightarrow 2a} \frac{x-2a}{(x-2a)(x+2a)} = \frac{1}{2a+2a} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{8} \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

**حالت دوم:** تجزیه توابع چند جمله ای به کمک تقسیم

**نکته:** اگر به کمک فاکتورگیری و تجزیه نتوانیم عبارت را تجزیه کنیم به کمک تقسیم تجزیه می کنیم.

تذکر: در حالت های زیر از تقسیم استفاده می کنیم:

حالت اول) سه جمله درجه دو ضریب دار مانند  $2x^2 - 5x - 3$

حالت دوم) عبارت درجه ۳ که بیشتر از دو جمله داشته باشد مانند  $2x^3 + 3x + 4$

**یادآوری تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای:**

مرحله ۱: چند جمله ای مقسوم و چند جمله ای مقسوم علیه را به صورت استاندارد (از توان زیاد به کم)

می نویسیم و تقسیم را به صورت چکشی می نویسیم.

مرحله ۲: جمله ای اول چند جمله ای مقسوم را بر جمله ای اول مقسوم علیه تقسیم می کنیم و آن را در

خارج قسمت می نویسیم.

مرحله ۳: حاصل به دست آمده مرحله قبل را در تک تک جملات مقسوم علیه ضرب می کنیم.

مرحله ۴: جواب به دست آمده در مرحله قبل را قرینه کرده و با مقسوم جمع می کنیم.

مرحله ۵: این روند را آنقدر تکرار می کنیم که درجه ای باقی مانده از مقسوم علیه کمتر شود.

$$(2x^3 - 6x + 9x^2 - 4) \div (1 + 2x)$$

$$\begin{array}{r}
 \text{مرحله ۱: } 2x^3 + 9x^2 - 6x - 4 \quad | \quad \begin{array}{l} 2x + 1 \\ x^2 + 4x - 5 \end{array} \\
 \underline{-2x^3 - x^2} \\
 8x^2 - 6x - 4 \\
 \underline{-8x^2 - 4x} \\
 -10x - 4 \\
 \underline{10x + 5} \\
 1
 \end{array}$$

$$\text{مرحله ۲: } \frac{2x^3}{2x} = x^2$$

$$\text{مرحله ۳: } x^2(2x + 1) = 2x^3 + x^2$$

$$\text{مرحله ۴: } -2x^3 - x^2$$

مرحله ۵: تکرار مراحل قبل

$$\frac{8x^2}{2x} = 4x$$

$$4x(2x + 1) = 8x^2 + 4x$$

$$\underline{-8x^2 - 4x}$$

$$\text{تکرار مراحل قبل } \frac{-10x}{2x} = -5$$

$$-5(2x + 1) = -10x - 5$$

$$10x + 5 \text{ قرینه}$$

درجه باقی مانده از درجه‌ی مقسوم علیه کمتر است پس تقسیم انجام شد.

$$\begin{array}{r}
 27x^3 - 8 \quad | \quad \begin{array}{l} 3x - 2 \\ 9x^2 + 6x + 4 \end{array} \\
 \underline{-27x^3 + 18x^2} \\
 18x^2 - 8 \\
 \underline{-18x^2 + 12x} \\
 12x - 8 \\
 \underline{-12x + 8} \\
 \cdot \quad \cdot
 \end{array}$$



بخش پذیری چند جمله‌ای‌ها بر  $(x - a)$  و تجزیه آنها به کمک تقسیم

مثال: چند جمله‌ای  $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$  را بر دو جمله‌ای درجه‌ی اول  $(x - 2)$  تقسیم کنید.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x - 2 \quad | \quad x - 2 \\ -(3x^2 - 6x) \quad | \quad 3x + 1 \\ \hline x - 2 \\ -(x - 2) \\ \hline \cdot \end{array}$$

در این تقسیم چون باقیمانده برابر صفر است. بنابراین این  $f(x)$  بر  $(x - 2)$  بخش پذیر است.

بنابر رابطه‌ی تقسیم داریم:

$$f(x) = 3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + 1) + 0$$

$$\rightarrow f(x) = 3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + 1)$$

همانگونه که دیده می‌شود،  $f(x)$  به صورت حاصل ضرب عامل‌های اول نوشته شده است.

مثال: چند جمله‌ای  $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$  را بر دو جمله‌ای درجه‌ی اول  $(x - 3)$  تقسیم کنید.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 1 \quad | \quad x - 3 \\ -(2x^2 - 6x) \quad | \quad 2x + 1 \\ \hline x + 1 \\ -(x - 3) \\ \hline 4 \end{array}$$

بنابر رابطه‌ی تقسیم داریم:

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 1 = (x - 3)(2x + 1) + 4$$

چون باقیمانده صفر نشده پس نمی‌توان  $f(x)$  را به صورت حاصل ضرب عامل‌های اول نوشت.

$$\begin{array}{r} f(x) \quad | \quad x - a \\ \hline \quad \quad Q(x) \\ R \end{array}$$

اکنون می‌خواهیم در حالت کلی چند جمله‌ای دلخواه  $f(x)$  را بر دو جمله‌ای درجه‌ی اول  $(x - a)$  تقسیم کنیم. فرض کنیم خارج قسمت این تقسیم، چند جمله‌ای  $Q(x)$  و باقیمانده‌ی آن عدد ثابت  $R$  باشد: رابطه‌ی تقسیم به صورت زیر است:

$$f(x) = (x - a)Q(x) + R$$

این رابطه، اگر باقیمانده  $R$  برابر صفر شود (یعنی مقسوم بر مقسوم علیه بخشپذیر باشد) آنگاه خواهیم داشت:

$$f(x) = (x - a)Q(x)$$

یعنی،  $f(x)$  به صورت **حاصل ضرب عامل‌های اول** نوشته شده است.



به دست آوردن باقیمانده تقسیم چندجمله ای  $f(x)$  بر  $(x - a)$  بدون انجام تقسیم

مثال: چند جمله ای  $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$  را بر دو جمله ای درجه ی اول  $(x - 3)$  تقسیم کنید.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 1 \quad | \quad x - 3 \\ -(2x^2 - 6x) \quad \quad 2x + 1 \\ \hline x + 1 \\ -(x - 3) \\ \hline 4 \end{array}$$

-در تقسیم بالا، باقیمانده را با  $R$  نشان می دهیم و برابر ۴ است.

مقسوم علیه  $(x - 3)$  را مساوی صفر قرار می دهیم و در مقسوم  $(2x^2 - 5x + 1)$  قرار می دهیم داریم:

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$f(3) = 2(9) - 5(3) + 1 = 18 - 15 + 1 = 4$$

-مقدار  $f(3)$  و باقیمانده با هم برابرند یعنی  $f(3) = R$

$$\begin{array}{r} f(x) \quad | \quad x - a \\ \hline \quad \quad Q(x) \\ R \end{array}$$

اکنون می خواهیم در حالت کلی چند جمله ای دلخواه  $f(x)$  را بر دو

جمله ای درجه ی اول  $(x - a)$  تقسیم کنیم. فرض کنیم خارج قسمت این

تقسیم، چند جمله ای  $Q(x)$  و باقیمانده ی آن عدد ثابت  $R$  باشد: رابطه ی

تقسیم به صورت زیر است:

$$f(x) = (x - a)Q(x) + R$$

این رابطه، به ازای تمام مقادیر  $x$  درست است؛ از جمله به ازای  $x=a$  با قرار دادن  $a$  به جای  $x$  در دو طرف

رابطه ی فوق خواهیم داشت:

$$f(a) = \underbrace{(a - a)Q(a)}_0 + R \Rightarrow f(a) = R$$



قضیه: در تقسیم چند جمله‌ای  $f(x)$  بر دو جمله‌ای درجه‌ی اول  $(x - a)$  باقی مانده‌ی تقسیم برابر  $f(a)$  است.

به زبان ساده تر: برای به دست آوردن باقیمانده تقسیم  $f(x)$  بر  $(x - a)$  بدون انجام تقسیم مقسوم علیه یعنی  $(x - a)$  را مساوی صفر قرار می دهیم و عدد به دست آمده را در مقسوم یعنی  $f(x)$  قرار می دهیم.

نتیجه: اگر  $f(a)$  برابر صفر باشد آنگاه  $f(x)$  بر  $(x - a)$  بخش پذیر است.

مثال: نشان دهید چند جمله‌ای  $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$  بر دو جمله‌ای  $x + 2$  بخش پذیر است.

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - 3(-2) - 10 = -16 + 20 + 6 - 10 = 0 \Rightarrow \boxed{R = 0}$$

مثال: الف) نشان دهید چند جمله‌ای  $f(x) = 2x^2 + x^2 + 1$  بر دو جمله‌ای  $x + 1$  بخش پذیر است.

ب) به کمک تقسیم،  $f(x)$  را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

سوال ۱: الف)

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

$$f(-1) = 2(-1)^2 + (-1)^2 + 1 = -2 + 1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{R = 0}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + x^2 + 1 \\ \underline{-(2x^2 + 2x^2)} \\ -x^2 + 1 \\ \underline{-(-x^2 - x)} \\ x + 1 \\ \underline{-(x + 1)} \\ \cdot \end{array}$$

ب)

$$f(x) = (x + 1)(2x^2 - x + 1)$$



**مثال:** چند جمله‌ای  $g(x) = 2x^3 + x^2 + 1$  را در نظر بگیرید.

الف) آیا  $g(x)$  بر  $(x + 1)$  بخش پذیر است؟ بله چرا؟

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \rightarrow g(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 + 1 = 0$$

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 + 1 \quad | \quad x + 1 \\ \underline{-(2x^3 + 2x^2)} \quad \quad \quad 2x^2 - x + 1 \end{array}$$

پ)  $g(x)$  را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

$$-x^2 + 1$$

$$\underline{-(-x^2 - x)}$$

$$x + 1$$

$$\underline{-(x + 1)}$$

.

$$g(x) = (x + 1)(2x^2 - x + 1)$$

**مثال:** باقی مانده‌ی تقسیم  $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 14x - 20$  را بر  $x + 2$  را به دست آورید.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \rightarrow f(-2) = 3(-2)^3 - 5(-2)^2 + 14(-2) - 20 = -24 - 20 - 28 - 20 = -92$$

مثال: نشان دهید چند جمله‌ای  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$  بر  $x - 1$  بخش پذیر است و سپس

$f(x)$  را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

حل) اگر  $f(1) = 0$  شود، آن‌گاه  $f(x)$  بر  $x - 1$  بخش پذیر است:

$$f(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 - 5(1) + 6 = 2 - 3 - 5 + 6 = 0$$

پس  $f(x)$  بر  $x - 1$  بخش پذیر است.  $f(x)$  را بر  $x - 1$  تقسیم می‌کنیم:



$$2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 \left| \frac{x-1}{2x^2 - x - 6} \right.$$

$$\frac{-2x^3 + 2x^2}{-x^2 - 5x + 6}$$

$$-x^2 - 5x + 6$$

$$\frac{x^2 - x}{-6x + 6}$$

$$-6x + 6$$

$$\frac{6x - 6}{0}$$

بنابر رابطه‌ی تقسیم، داریم:

$$2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = (x-1)(2x^2 - x - 6)$$

عبارت درجه‌ی دوم  $2x^2 - x - 6$  به صورت  $(2x+3)(x-2)$  تجزیه می‌شود و در نتیجه داریم:

$$2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = (x-1)(2x+3)(x-2)$$

**مثال:** اگر  $f(x) = x^4 + ax^2 + 4x + 5$  بر  $x-1$  بخش‌پذیر باشد، مقدار  $a$  را به دست آورید.

حل)  $f(x)$  بر  $x-1$  بخش‌پذیر است، پس:

$$f(1) = 0$$

$$f(1) = 1^4 + a(1)^2 + 4(1) + 5 = a + 10 = 0 \Rightarrow a = -10$$

**مثال:** اگر  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$  بر  $x-2$  بخش‌پذیر باشد و باقی مانده‌ی تقسیم  $f(x)$  بر

$x+1$  برابر  $-18$  باشد، مقدار  $f(1)$  را به دست آورید.

حل)  $f(x)$  بر  $x-2$  بخش‌پذیر است، بنابر این  $f(2) = 0$  است:

$$f(2) = 2^3 + a(2)^2 + b(2) - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 4a + 2b = -2 \xrightarrow{\div 2} 2a + b = -1 \quad (1)$$

باقی مانده‌ی تقسیم  $f(x)$  بر  $x+1$  برابر  $-18$  است، پس مقدار  $f(-1)$  برابر  $-18$  است:

$$f(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) - 6 = -18 \Rightarrow a - b = -11 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} ۲a + b = -۱ \\ a - b = -۱۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳a = -۱۲ \Rightarrow a = -۴ \xrightarrow{۲a+b=-۱} -۸ + b = -۱ \Rightarrow b = ۷$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 6 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 4(1)^2 + 7(1) - 6 = -2$$

**مثال:** اگر باقی مانده‌ی چند جمله‌ای  $f(x) = ۲x^۴ + mx + ۲$  بر  $x + ۱$  برابر ۲ باشد. باقی مانده‌ی

تقسیم آن بر  $x - ۱$  را بیابید. (نهایی - دی ۹۲)

$$\text{حل} \quad x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \rightarrow f(-1) = 2 \Rightarrow 2(-1)^4 + m(-1) + 2 = 2 \Rightarrow m = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^4 + 2x + 2$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \rightarrow f(1) = 2(1)^4 + 2(1) + 2 = 6$$

**مثال:** حد تابع  $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + 8}$  را در نقطه‌ی  $x = -2$  در صورت وجود به دست آورید.

**حل:** در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای  $x = -2$  برابر صفرند. باید عامل  $(x + 2)$  را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. مخرج را می‌توانیم به کمک اتحاد چاق و لاغر به حاصل ضرب عامل‌های اول تجزیه کنیم. اما برای

تجزیه‌ی صورت، آن را بر  $(x + 2)$  تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 + 4 \quad | \quad x + 2 \\ \underline{-(2x^3 + 4x^2)} \quad \quad \quad 2x^2 - x + 2 \\ \quad \quad \quad \underline{-x^2 + 4} \\ \quad \quad \quad \quad \underline{-(-x^2 - 2x)} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2x + 4 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{-(2x + 4)} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

بنابر رابطه‌ی تقسیم می‌توان نوشت

$$2x^3 + 3x^2 + 4 = (x + 2)(2x^2 - x + 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x^2-x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{8+2+2}{4+4+4} = 1$$

**مثال:** حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 4}{2x^2 - 3x - 20} \quad (\text{الف})$$

(حل) با قرار دادن عدد ۴ به جای  $x$ ، کسر به صورت  $\frac{0}{0}$  در می‌آید. بنابراین چند جمله‌ای‌های  
 $x^3 - 5x^2 + 3x + 4$  و  $2x^2 - 3x - 20$  بر  $x - 4$  بخش‌پذیرند و با تقسیم این چند جمله‌ای‌ها بر  $x - 4$   
 عبارت‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 4 = (x - 4)(x^2 - x - 1)$$

$$2x^2 - 3x - 20 = (x - 4)(2x + 5)$$

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x^2 - x - 1)}{(x - 4)(2x + 5)} = \frac{4^2 - 4 - 1}{2(4) + 5} = \frac{11}{13}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 + 4x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x^2 + x - 1)}{(x - 5)(x + 5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x - 1}{x + 5} = \frac{25 + 5 - 1}{10} = \frac{29}{10}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4} \quad (\text{پ})$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x + 4)(x - 1)}{(x + 4)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x - 1}{x^2 + 1} = \frac{-5}{17}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 5x^2 - 12x + 4}{x^2 + 8} \quad (\text{ت})$$

(حل) با تقسیم  $x^3 - 5x^2 - 12x + 4$  بر  $x + 2$  داریم:

$$x^3 - 5x^2 - 12x + 4 = (x + 2)(x^2 - 7x + 2)$$

عبارت  $x^2 + 8$  را به کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$a^2 \pm b^2 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$



$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 7x + 2)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{(-2)^2 - 7(-2) + 2}{(-2)^2 - 2(-2) + 4} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1} \quad (\text{ث})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x - \frac{1}{2})(4x - 2)}{(2x + 2)(x - \frac{1}{2})} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(4x - 2)}{(2x + 2)} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1} \quad (\text{ج})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x(x - \frac{1}{2})}{2(x - \frac{1}{2})(2x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x}{(2x + 1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$



## بخش دوم: رفع ابهام توابع رادیکالی با استفاده از گویا کردن

تذکر: گاهی صورت یا مخرج تابع  $\frac{f}{g}$  شامل یک عبارت رادیکالی است و

لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل  $(x - a)$  یا عبارتی که موجب صفر شدن  $f$  و  $g$  شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

**حالت اول:** درمخرج یا صورت کسر رادیکال

توجه:

جهت تهیه ادامه ی این جزوه (فصل سوم ریاضی دوازدهم تجربی) به شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ و یا به آیدی تلگرام

@habib\_hashemi پیام دهید. (جزوه کامل ۷۵ صفحه می باشد)

هزینه جزوه کامل ۱۰ هزار تومن می باشد. **۵۰ درصد تخفیف** برای ۵۰۰ نفر اول

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف حبیب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با نوزده سال سابقه تدریس دربرگزاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش و پرورش منطقه ۴ تهران و مدرس دانشگاه

با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا به آیدی تلگرام @habib\_hashemi پیام دهید.

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour



# تدریس خصوصی و مبحثی ریاضیات

متوسطه

و

تضمینی کنکور

تهران و کرج



موفق بودن در ریاضی ادرصد استعداد و ۹۹ درصد پشتکار

## تدریس خصوصی ریاضیات

### تهران و کرج

متوسطه اول و متوسطه دوم

کنکور - تقویتی

گروهی / انفرادی

به صورت تخصصی و کاملاً مفهومی با جزوه اختصاصی

مشاهده جزوات در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

دبیر رسمی آموزش و پرورش با ۱۹ سال سابقه تدریس

کارشناس ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

مؤلف شش کتاب در زمینه کنکور

نویسنده برتر استان

معلم نمونه شهرستان و استان

نفر اول استان در جشنواره الگوهای برتر تدریس

نفر اول کشور در جشنواره الگوهای برتر تدریس

شماره تماس: ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱



