

فصل چهارم

مشق

درس اول: آشنایی با مفهوم مشق

درس دوم: مشق پذیری و پیوستگی

درس سوم: آهنگ تغییر

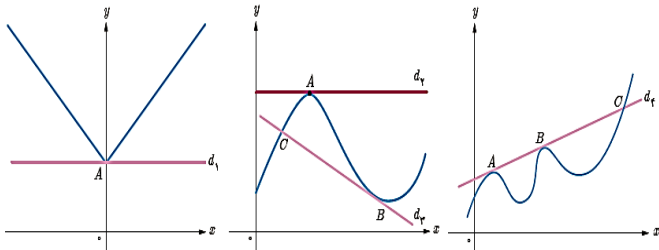
بارم فصل ۳:

شهریور ادی	نوبت دوم	نوبت اول
۵	۵	۳
		تا صفحه ۲۶

فصل ۴ درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق

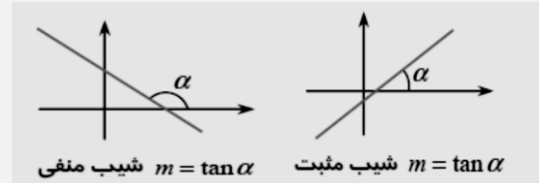
(مثال اسی ۶۷)

خط های d_1 تا d_4 را در نظر بگیرید و خط های مماس را مشخص کنید.



یادآوری شیب خط:

*شیب خط، تانژانت زاویه ای است که خط با جهت مثبت محور Xها می سازد.



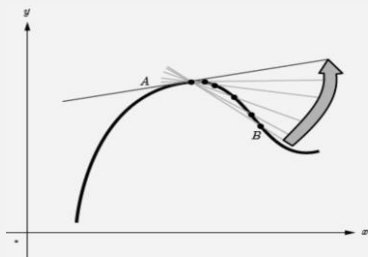
* برای به دست آوردن شیب و معادله خطی که از دو نقطه می گذرد از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad y = m(x - x_1) + y_1$$

شیب خط مماس بر منحنی:

* در نمودار تابع $y = f(x)$ نقطه $A(a, f(a))$ را روی منحنی در نظر می گیریم. خط هایی که از A به نقاط دیگر منحنی وصل می کنیم را یک خط قاطع می نامیم. هرچه نقطه B به A نزدیک تر باشد، خط قاطع AB به خط مماس شبیه تر می شود

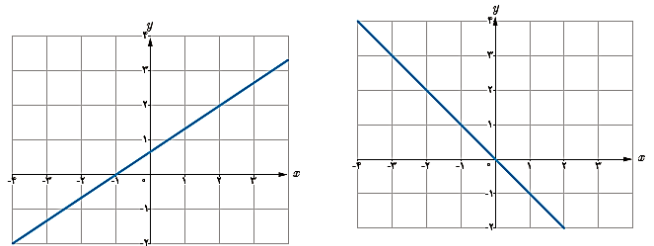
* نزدیک شدن نقطه A به نقطه B، مثل مفهوم میل کردن در حد است. بنابراین خط مماس، حد خط های قاطع است به شرطی که $B \rightarrow A$ میل کند



* شیب خط مماس همان حد شیب خط قاطع است وقتی که $B \rightarrow A$ میل می کند.
* مشتق هم همان شیب خط مماس است

(فعالیت اسی ۶۶)

① شیب هر یک از خط های داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟



خط مماس بر منحنی:

خط مماس دارای شرایط زیر است:

۱. منحنی در نقطه تماس با خط، تیز و گوشه دار نباشد.
۲. منحنی در نقطه تماس با خط، توخالی نباشد. (منحنی پیوسته باشد)
۳. منحنی در نقطه تماس با خط، فقط در یک نقطه مشترک باشد. (مماس قائم نداشته باشد)

ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C

ت) شیب خط AB

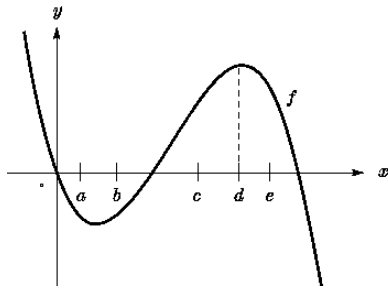
ث) شیب خط $y = 2$

ج) شیب خط $y = x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1 و m_2 و ... و m_6 در نظر بگیرید.

④ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d, e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
۰	
-۰/۵	
۲	
-۰/۵	
-۲	



⑦ نقاط A, B, C, D, E, F را روی منحنی زیر در نظر

می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با

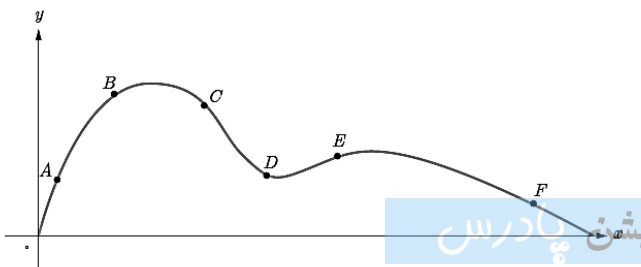
m_A نمایش داده‌ایم)

پ) $m_E < m_B < m_A$

ت) شیب منحنی در نقاط C, D, F و منفی است.

ث) $m_F < m_D < m_C$

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$



*شیب خط مماس مورب (مایل):

۱) اگر خط مماس با جهت مثبت محور x زاویه تند بسازد، شیب مثبت است و هر چه خط عمودی تر شود شیبش بیشتر می‌شود

۲) اگر خط مماس با جهت مثبت محور x زاویه باز بسازد، شیب منفی است و هر چه خط عمودی تر شود شیبش کمتر می‌شود

*شیب خط مماس قائم (موازی محور y):

اگر خط با جهت مثبت محور x زاویه قائمه (90°) بسازد، شیب تعریف نشده است

*شیب خط مماس افقی (موازی محور x):

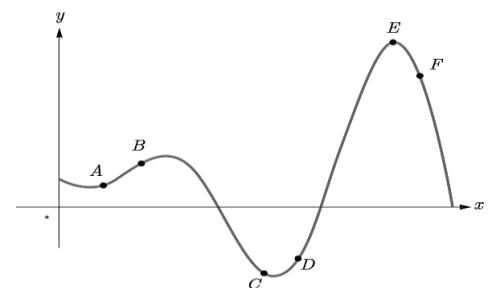
اگر خط با جهت مثبت محور x زاویه نیم صفحه (180°) بسازد، شیب صفر است

(تقریبی ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۷ و ۷۵)

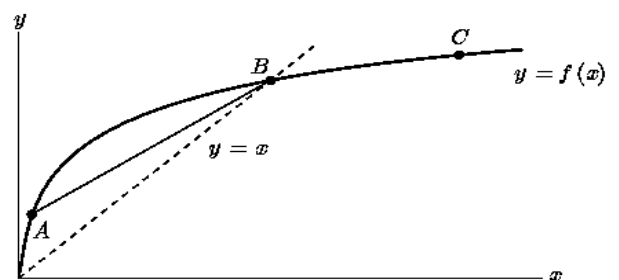
② نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده

در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	
-۱	
۰	
۱	
-۲	
۱	
۲	



③ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A

(مثال ص ۷۲)

مشتق تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه ای به طول $x = 3$ به دست آورید.

✓حل:

$$\text{مقدار تابع: } f(3) = -3^2 + 10(3) = -9 + 30 = 21$$

$$\text{مشتق تابع: } f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 10x - 21}{x - 3} \xrightarrow{x=3} \frac{0}{0}$$

$$\text{رفع ابهام: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(-x+7)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (-x+7) = 4$$

$$\rightarrow \boxed{f'(3) = 4}$$

(مثال ص ۷۳)

اگر $f(x) = x^2$ ، $f'(3)$ را به دو روش به دست آورید.

✓حل: روش اول:

$$\text{مقدار تابع: } f(3) = 3^2 = 9$$

$$\text{مشتق: } f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{0}{0}$$

$$\text{رفع ابهام: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

$$\rightarrow \boxed{f'(3) = 6}$$

روش دوم:

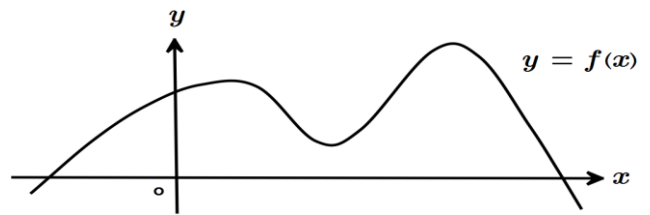
$$\begin{cases} f(3) = 3^2 = 9 \\ f(3+h) = (3+h)^2 = h^2 + 6h + 9 \end{cases}$$

$$\text{مشتق: } f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h + 9 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h}{h} = \frac{0}{0}$$

$$\text{رفع ابهام: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+6) = 6$$

$$\rightarrow \boxed{f'(3) = 6}$$

⑤ نقاطی مانند F, E, D, C, B, A و G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

الف) A ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط F و E نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

تعریف مشتق تابع f در نقطه a :

* مشتق تابع f در نقطه a که آن را با $f'(a)$ نشان می‌دهیم برابر است با شیب خط مماس بر منحنی تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ مقدار آن را از رابطه‌های زیر می‌یابیم:

$$* f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

* در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد.

* حدهای تعریف مشتق همیشه دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است و باید آن را رفع ابهام کنیم.

$$\text{رفع ابهام: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(-x+8)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (-x+8) = 6$$

$$\rightarrow \boxed{f'(2) = 6}$$

حالا با توجه به شیب (۶) و نقطه (۲, ۱۶) معادله خط مماس را می نویسیم:

$$y = 6(x-2) + 16 \rightarrow \boxed{y = 6x + 4}$$

(گزار در کلاسی ص ۷۲)

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در

نقطه‌ای به طول ۲- بنویسید.

(تمرین ۱ و ۸ ص ۷۵)

① اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و

معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع

بر آن بنویسید.

(تمرین ۶ ص ۷۶)

⑥ اگر $f(x) = x^2 - 2$ ، $f'(-1)$ را به دست آورید.

معادله خط مماس بر منحنی:

* معادله خط مماس بر منحنی شبیه معادله خط می باشد بنابراین:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

عرض نقطه
طول نقطه
شیب مماس (مشتق)

(مثال ص ۷۲)

معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ را

در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

☑ حل: ابتدا باید شیب مماس که همان مشتق تابع است را بیابیم.

$$\text{مقدار تابع: } f(2) = -2^2 + 10(2) = -4 + 20 = 16$$

$$\text{مشتق تابع: } f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 10x - 16}{x - 2} \xrightarrow{x=2} \frac{\circ}{\circ}$$

⑧ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4) = 1/5$ و

$f(4) = 25$ با توجه به شکل مختصات نقاط A, B, C را

بیابید.

