فصل ٤ درس ٢: مشتق پذیری و پیوستگی

مشتق پذیری تابع :

* مشتق همان شیب خط مماس است پس اگر تابع در یک نقطه شرایط خط مماس (درس ۱) را داشت می گوییم تابع در آن نقطه مشتق پذیر است.

*برای آنکه تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

۱.تابع پیوسته باشد

۲. مشتق چپ و راست موجود و برابر باشد(عددباشد)

مشتق چپ و مشتق راست:

*مشتق چپ: همان شیب نیم مماس چپ در یک نقطه است. که به صورت زیر نمایش می دهیم:

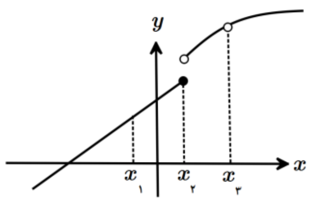
$$f'_-(a) == \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

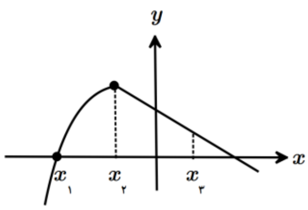
*مشتق راست: همان شیب نیم مماس راست در یک نقطه است. که به صورت زیر نمایش می دهیم:

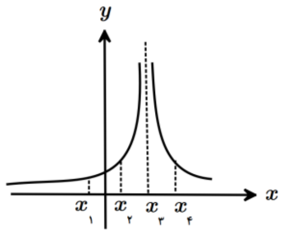
$$f'_+(a) == \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

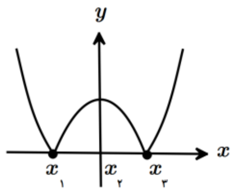
(کار در کلاس ص۸۲)

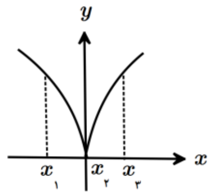
در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق‌پذیر نیست.

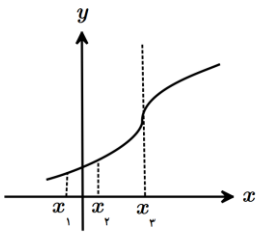












(تمرین ۴ ص ۹۰)

④ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن :

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.	ب) در $x=2$ برابر ۳ شود.
پ) در تمام نقاط مثبت باشد	ت) در تمام نقاط یکسان باشد.
ث) در تمام نقاط منفی باشد.	

مشتق پذیر نبودن تابع به دلیل ناپیوستگی:

اگر تابع در $x = a$ پیوسته نباشد، مشتق هم ندارد (چون نمی توانیم مماس رسم کنیم).بنابراین هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است توابع ناپیوسته مثل:

۱.توابع چند ضابطه ای در نقاط مرزی دامنه

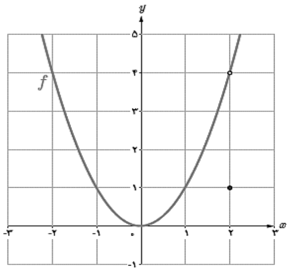
۲.توابع $f(x) = [x]$ در نقاط صحیح

۳.توابع $f(x) = \sqrt{x}$ درصفر

(فعالیت ص۷۷)

با استفاده از تعریف مشتق ،مشتق‌پذیری تابع f را در نقطه $x = ۲$ بررسی کنید.

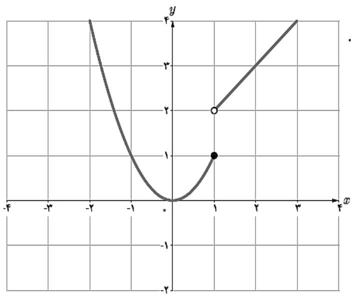
$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \neq ۲ \\ ۱ & x = ۲ \end{cases}$$



(کار در کلاس ص۷۸)

با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع g را در نقطه $x = ۱$ بررسی کنید.

$$g(x) = \begin{cases} x^۲ & x \leq ۱ \\ x + ۱ & x > ۱ \end{cases}$$



(تمرین ۶ و۱۳ ص ۹۱)

⑥ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۳ & x \geq ۱ \\ ۲x & x < ۱ \end{cases}$ را در نقطه $x = ۱$ بررسی کنید.

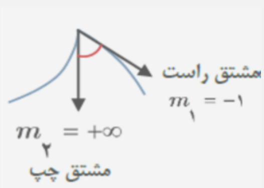
⑬ اگر $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \leq ۰ \\ x & x > ۰ \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(۰)$ و $f'_-(۰)$ موجودند ولی $f'(۰)$ موجود نیست.

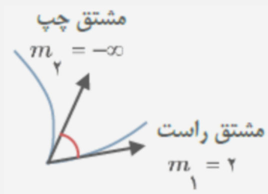
مشتق پذیر نبودن تابع به دلیل داشتن گوشه یا مماس قائم:

* هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است ولی هر تابع پیوسته، مشتق پذیر نیست.یعنی توابعی وجود دارند که پیوسته اند ولی مشتق پذیر نیستند. و مشتق چپ و راست آنها به صورت زیر است:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند(نقطه گوشه ای)

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه ای)





پ) هر دو نامتناهی باشند.

(مثال ص ۷۹)

مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\left|x^2-1\right|$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.معادله نیم مماس‌های راست و چپ در $x=1$ را بنویسید.

(کار در کلاس ص۷۹)

نشان دهید که مشتق تابع $f(x)=\left|x^2-1\right|$ در $x=-1$ موجود نیست. معادله نیم مماس‌های راست و چپ را بنویسید.

(تمرین۸ص ۹۱)

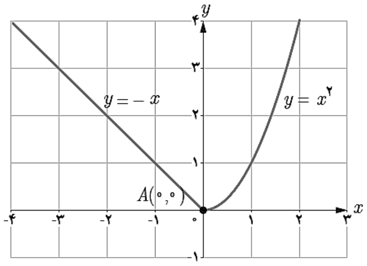
⑧اگر $f(x)=\left|x^2-4\right|$ به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲- بررسی کنید.

(تمرین۱ص ۹۰)

①دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

(تمرین ۲ ص ۹۰)

② با محاسبه مشتق راست و چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.

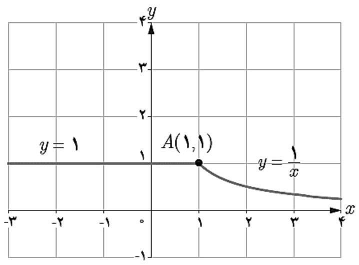


(الف)

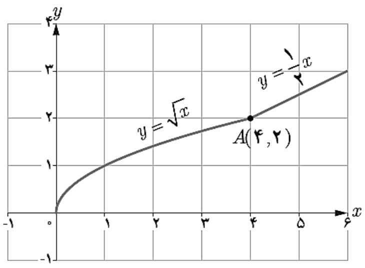
☑حل:

$$A(0,0)$$

$$\begin{cases} f'_-(0)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{-x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1 \\ \\ f_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0 \end{cases} \to f'(0)=\text{وجود ندارد}$$



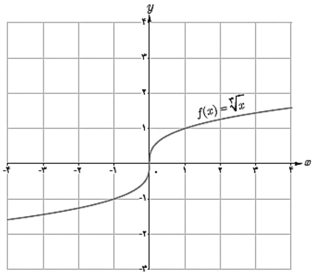
(ب)



(پ)

(مثال ص ۸۰)

مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.



(تمرین۹ ص ۹۱)

⑨ مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را به‌دست آورده و مشخص کنید در چه نقطه‌ای مماس قائم دارد؟

دامنهٔ مشتق:

اگر $y=f(x)$ تابعی حقیقی باشد،آنگاه تابع مشتق به صورت زیر تعریف می شود:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ومجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آن ها f' موجود باشد را دامنه f' می نامیم.

$$D_{f'}=D_f-\{\text{نقاط مشتق ناپذیر}\}$$

(فعالیت ص ۸۲)

اگر $f(x)=x^2$،

الف) تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید.

ب) نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

(مثال ص ۸۴)

اگر $f(x)=\frac{1}{x}$،

الف)نمودار f را رسم کنید.

ب)تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید.

پ) $f'(3)$ را با استفاده از تابع مشتق وسپس تعریف مشتق بیابید

(کار در کلاس ص ۸۴)

اگر $f(x)=\begin{cases}5x & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$

الف) دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید

ب) ضابطه f' را به‌دست آورید.

پ)نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

(تمرین ۳ ص ۹۰)

③تابع $f(x)=\begin{cases} 5x-4 & x<0 \\ x^2 & 0\le x\le 3 \\ x+6 & x>3 \end{cases}$ داده شده است .

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) با توجه به نمودار تابع f بگویید که چرا $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند؟

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

محاسبه مشتق بدون استفاده از تعریف مشتق(قواعد مشتق):

۱. مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f(x)=c\to f'(x)=0$$

۲. توان را در ضریب ضرب و یکی از توان کم می کنیم

$$f(x)=ax^n\to f'(x)=nax^{n-1}$$

۳.(مشتق زیر رادیکال) ÷(رادیکال × ۲)

$$f(x)=\sqrt{ax+b}\to f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

۴. $\dfrac{\text{مشتق زیر رادیکال}}{3\times\sqrt[3]{(\text{رادیکال})^2}}$

$$f(x)=\sqrt[3]{x}\to f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

۵. مشتق اولی ± مشتق دومی

$$f(x)=f\pm g\to f'(x)=f'\pm g'$$

۶.ضریب در مشتق ضرب می شود.

$$f(x)=kf(x)\to f'(x)=kf'(x)$$

۷.مشتق اولی در دومی+مشتق دومی در اولی

$$f(x)=f.g\to f'(x)=f'.g+g'.f$$

۸.مشتق اولی در دومی+مشتق دومی در اولی

$$f(x)=f.g\to f'(x)=f'.g+g'.f$$

۹.(مشتق صورت در مخرج – مشتق مخرج در صورت)

÷مخرج به توان ۲

$$f(x)=\frac{f}{g}\to f'(x)=\frac{f'.g+g'.f}{g^2}$$

(مثال ص۸۵ و۸۶ و۸۷)

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

$f(x)=\frac{-۲}{۵}$

$f(x)=۷$

$f(x)=x^{۲}$

$f(x)=x^{۳}$

$f(x)=\frac{۱}{x}$

$f(x)=\sqrt{x}$

$f(x)=-\frac{۲}{۳}x^{۴}$

$g(x)=x^{۵}+۴x^{۳}-\sqrt{۲}x+۱$

$h(x)=\left(۲x^{۳}+۱\right)\left(-x^{۲}+۷x-۲\right)$

$t(x)=\frac{x^{۲}-۴}{۳x+۱}$

(کار در کلاس ص۸۷و تمرین ۱۴ ص۹۲)

① مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{۱}{x-۴}$

ب) $g(x)=\sqrt{x}\,(۳x^{۲}+۵)$

پ) $h(x)=\frac{x}{۲x^{۲}+x-۱}$

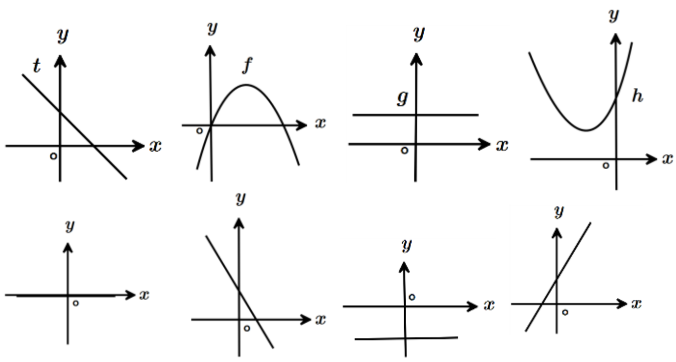
ب) $f(x)=\frac{x^{۲}-۳x+۱}{-۳x+۲}$

ت) $f(x)=\frac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$

② اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(۲)=۳$ ، $f'(۲)$ ، $g(۲)=۸$ و $g'(۲)=-۶$ مقدار $(fg)'(۲)$ و $(\frac{f}{g})'(۲)$ را به‌دست آورید.

(تمرین ۵ و۷ و۱۰ و۱۱ و۱۲ ص ۹۱ و ۹۲)

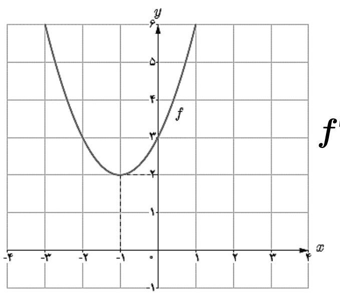
⑩ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



⑦ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

⑤ الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^{۲}+۲x+۳$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

$f'(۲)$ و $f'(-۱)$ و $f'(۰)$ و $f'(۳)$

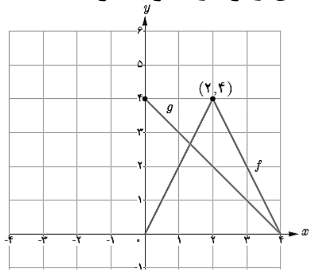


ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x)=x^{۲}+۲x+۳$ بررسی کنید.

پ) تابع مشتق را رسم کنید.

⑫ اگر $f'(1)=3$ و $g'(1)=5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$

⑪ نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.



الف) اگر $h(x)=f(x).g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ ،$h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(1)$ ،$k'(2)$ و $k'(3)$

مشتق تابع مرکب- قاعده زنجیری:

*قاعده زنجیری (یعنی شروع از داخلی ترین تابع و مثل زنجیر، مشتق ها را در هم ضرب می کنیم)

*رابطه مشتق تابع fog :

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

$$y=f(u)\Rightarrow y'=u'f'(u)$$

(کار در کلاس ص۸۸ و تمرین ۱۴ ص ۹۲)

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $f(x)=(x^2+1)^3(5x-1)$

۲) $g(x)=\left(\dfrac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8$

۳) $f(x)=(3x^2-4)(2x-5)^3$

۴) $f(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

مشتق‌پذیری روی یک بازه:

*تابع f روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر است هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

*تابع f روی بازه $[a,b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه در بازه (a,b) مشتق پذیر باشد ودر نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

*اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر باشد، گوییم f روی بازه $(-\infty,+\infty)$ مشتق‌پذیر است.

(کار در کلاس ص ۸۹)

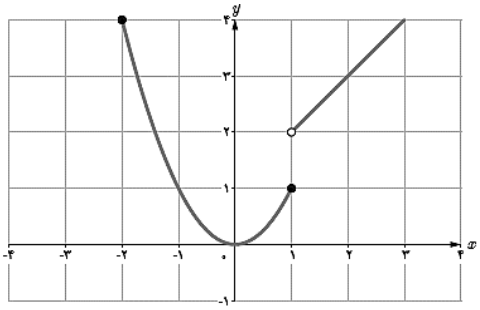
مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ را به طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a,b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه ....

تابع f روی بازه $(a,b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه ....

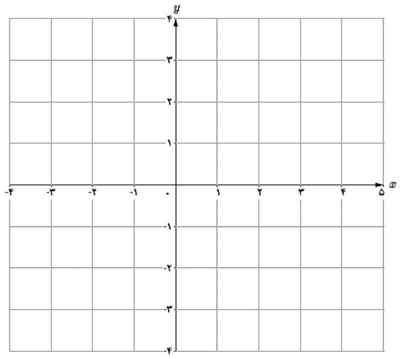
(مثال ص ۸۹)

اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲ & -۲\le x\le ۱ \\ x+۱ & x>۱ \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه‌های $[-۲,۱]$، $(۱,+\infty)$ و $[۱,۲]$ بررسی کنید.



(کار در کلاس ص ۸۹)

اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^۲-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه‌های $[-۱,۱]$، $(۲,۵)$ و $[-۲,۰]$ بررسی کنید.



مشتق مرتبه دوم:

* از تابع $y=f(x)$:

۱.اگریک بار مشتق بگیریم،مشتق مرتبه اول به دست می آید و داریم: $y'=f'(x)$ و می خوانیم اف پریم.

۲.اگردو بار مشتق بگیریم،مشتق مرتبه دوم به دست می آید و داریم: $y''=f''(x)$ و می خوانیم اف زگوند.

(مثال ص ۹۰ و تمرین ۱۵ ص ۹۲)

در تابع $f(x)=۳x^۴+۲x^۲-۱$ حاصل $f''(x)$ را بیابید.

15 اگر $f(x)=۵x^۳-۴x^۲-۳x$، مقدار $f''(-۱)$ را به‌دست آورید.