به نام خدا جزوه مفصل هندسه (فصل ششم) ریاضی ۳ تجربی

ص ۱

دبیرستان: شهید بهشتی - فاطمه الزهرا دبیر: حسین لهراسب

درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

درس دوم: دایره

درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

تفکر تجسمی: تفکر تجسمی همان تصویرسازی ذهنی است. در تفکر تجسمی به جای استفاده از عبارات، کلمات و شیوه‌های زبانی، تصاویری در ذهن ما نقش می‌بندند که باعث می‌شوند که به موضوع یا موقعیت فکر کنیم.

موقعیت‌هایی که تفکر تجسمی می‌تواند تقویت شود عبارتند از:

۱- تجسم ذهنی یک جسم پس از چرخاندن آن در فضا

۲- ترسیم سطح گسترده اجسام هندسی و ترسیم یک جسم سه بعدی

۳- ترسیم نماهای مختلف یک جسم

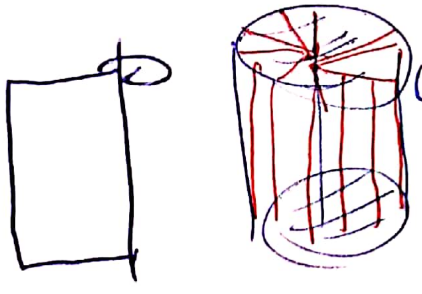
۴- دوران یک جسم حول یک نقطه یا حول یک محور در صفحه و فضا

۵- تجسم اجسام هندسی بعد از برش.

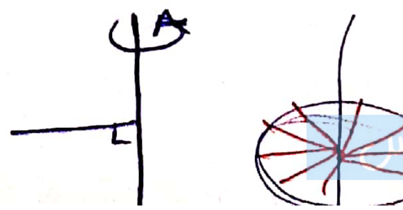
در این درس فقط دو مورد ۴ و ۵ را بررسی می‌کنیم:
۱. دوران اجسام حول یک محور
۲. برش اجسام

۱- دوران حول محور: از دوران شکل‌های هندسی حول یک محور، جسم‌های متفاوتی به دست می‌آید که در اینجا چند مثال از آن‌ها آورده است.

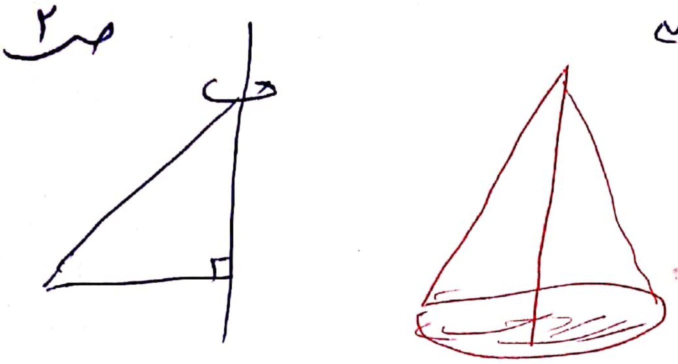
الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض: استوانه



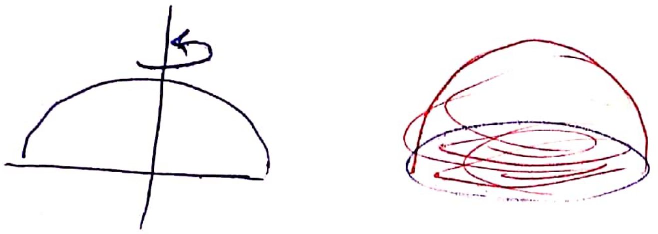
ب) شکل حاصل از دوران یک پاره خط حول پاره خطی دیگر که بر آن عمود است: دایره توپر



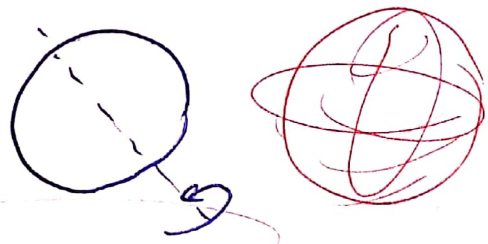
پ) شکل حاصل از دوران یک ~~مثلث~~ مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه: مخروط قائم توخالی زیرا مثلث را رنگ نکرده است.



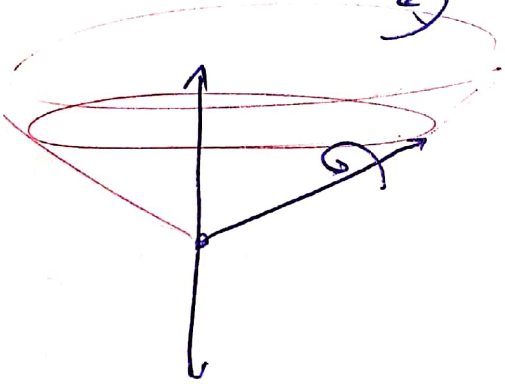
ت) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر قطر آن: نیمکره توخالی



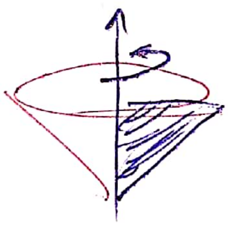
ث) شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن: کره توخالی



ج) شکل حاصل از دوران نیم خط حول محور
مخروط نامتناهی



ح) شکل حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه حول محور
مخروط توپر



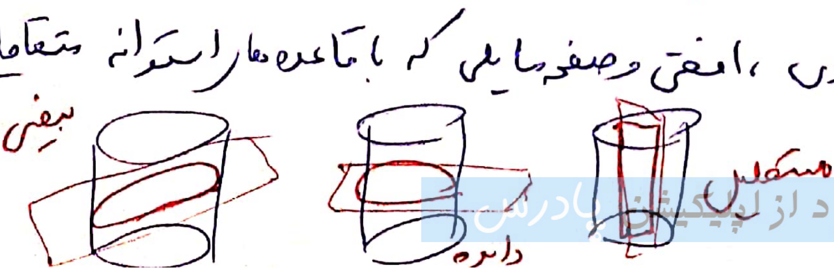
۲) برش: در این مبحث می خواهیم اجسام سه بعدی را برش بزنیم و تغییرات آن را بعد از برش بررسی کنیم.

سطح مقطع: شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود سطح مقطع آن نامیده می شود.

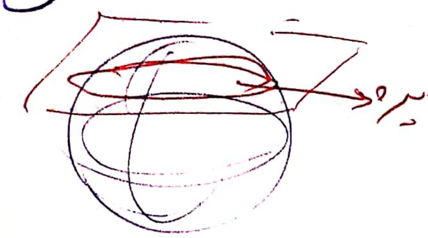
مثال: الف) برش یک مکعب مستطیل با یک صفحه موازی قاعده ← مربع
با قاعده مربع

ب) برش یک مکعب مستطیل با یک صفحه موازی قطر مکعب (اندر بره از قطر) ← مستطیل

پ) سطح مقطع استوانه با صفحه ی عمودی، افقی و صفحه مایلی که با قاعده های استوانه متقاطع نباشد چه شکلی است؟



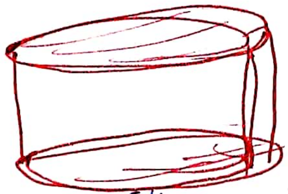
ت) سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره چه شکلی است؟ دایره



در چه حالتی این سطح مقطع بیش ترین مساحت ممکن را دارد؟

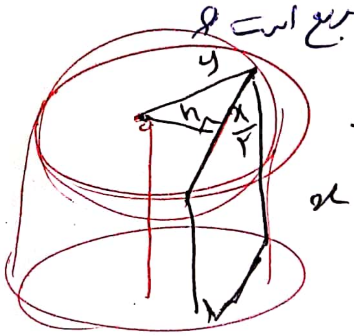
وقتی که شامل مرکز دایره باشد (از مرکز عبور کند)

مثال: مستطیلی را حول عرض آن دوران داده‌ایم.



الف) شکل حاصل را رسم کنید. استوانه

ب) سطح مقطع حاصل از برخورد یک استوانه و یک صفحه در چه حالتی مربع است؟



فیثاغورس

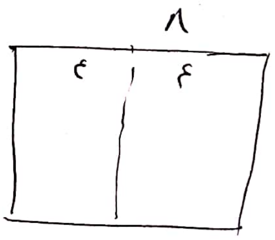
$$h = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}x^2}$$

باید فاصله‌ی صفحه قاطع تا محور دوران h باشد

پ) اگر ابعاد مستطیل ۳ و ۴ باشد مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه موازی با قاعده‌ی این استوانه چقدر است؟

$r = 4 \Rightarrow S = \pi r^2 = \pi \times 4^2 = 16\pi$

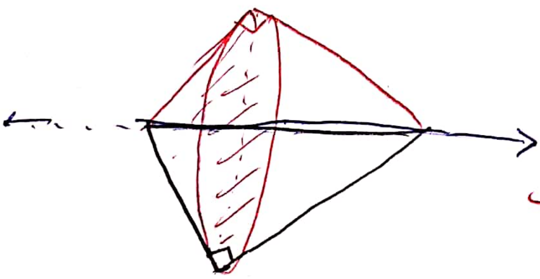
ت) در حالت پ، اگر صفحه‌ای عمود بر قاعده‌ی استوانه آن را قطع کند، بیش‌ترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟



اگر صفحه عمود بر قاعده‌ی استوانه آن را قطع کند شکل حاصل یک مستطیل است که طول آن ۸ و عرض آن ۳ است.

$S = 8 \times 3 = 24$

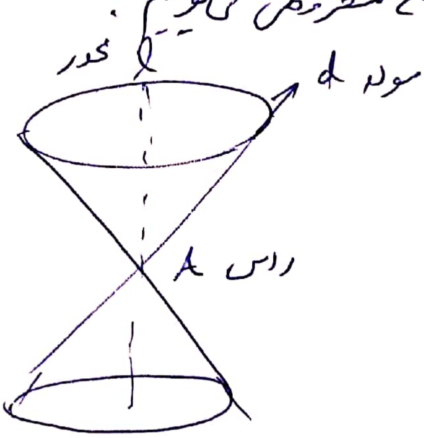
مثال: شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن چیست؟



دو مخروط با قاعده‌ی مشترک

آشنایی با مقاطع مخروطی:

اگر خط l را حول محور d دوران دهیم شکل حاصل یک سطح مخروطی است که به خط l محور، d مولد، نقطه A راس سطح مخروطی می‌گوییم.

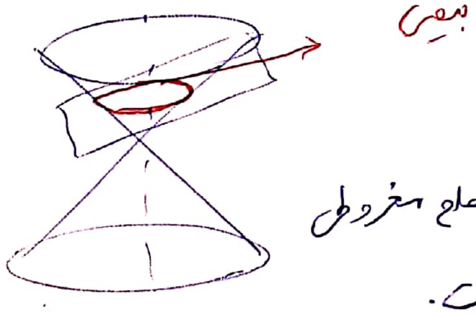


وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش دهیم منحنی‌هایی ایجاد می‌شود که به آن‌ها مقاطع مخروطی می‌گوییم.

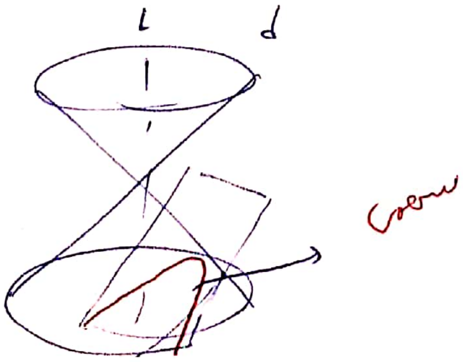
مقاطع مخروطی عبارتند از: دایره - بیضی - سهمی - هذلولی.

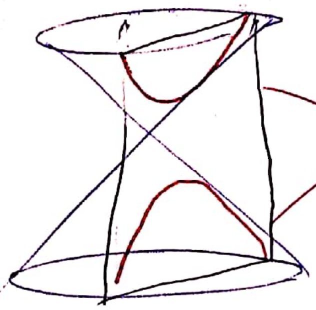
۱- اگر صفحه P بر محور عمود باشد (از راس عبور نکند) ⇐ شکل حاصل دایره است

۲- اگر صفحه P بر محور عمود نباشد و با مولد موازی نباشد (از راس نگذرد) شکل حاصل بیضی خواهد بود.



۳- اگر صفحه P با مولد موازی باشد در یک قسمت سطح مخروطی و از راس عبور نکند. شکل حاصل سهمی است.

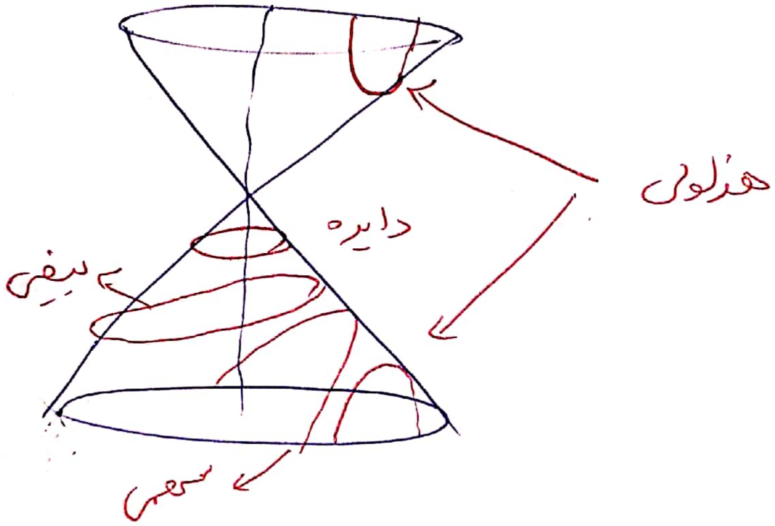




۴- اگر صفحه P سطح مخروطی را در دو قسمت بالا یا پایین قطع کند و از رأس عبور نکند هذلولی

شکل حاصل هذلولی است.

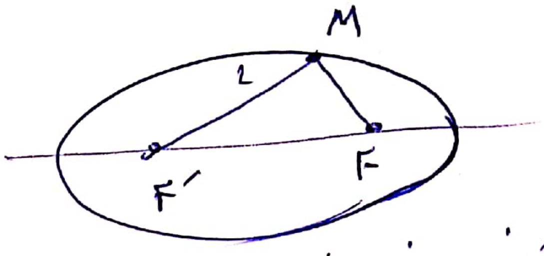
پس مقاطع مخروطی عبارتند از ۱- دایره ۲- بیضی ۳- سهمی ۴- هذلولی



بیضی :

تعریف: مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن ها از دو نقطه ثابت واقع در صفحه برابر مقدار ثابت است.

روش رسم بیضی به کمک یک نخ: نخی به طول L در نظر بگیریم. دو سر نخ را روی یک صفحه ثابت کنیم. (طول نخ از فاصله بین این دو نقطه ثابت باید بیشتر باشد). در ادامه مداد را در حالتی که نخ از دو طرف کاملاً کشیده شده است حرکت می دهیم شکل ایجاد شده بیضی است



به این دو نقطه ثابت ← کانون های بیضی

کانون های بیضی را با F و F′ نشان می دهیم

اگر M یک نقطه دلخواه روی محیط بیضی باشد بنا به تعریف بیضی داریم:

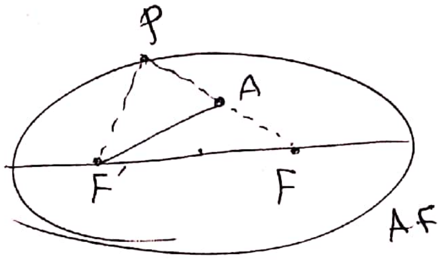
$MF + MF' =$ طول نخ $= L$ مقدار ثابت

تذکر: اگر نقطه B بیرون بیضی باشد مجموع فواصل آن از F و F′ بیشتر از L و اگر A داخل بیضی باشد مجموع فواصل آن از F و F′ کمتر از L خواهد بود.

ص ۶

حالت اول: فرض کنید A درون بیضی باشد می خواهیم نشان دهیم

$$AF + AF' < L$$



نامساوی مثلث

$$\overset{\triangle}{PAF'} \Rightarrow AF' < PF' + PA$$

$$AF' + AF < PF' + \underbrace{PA + AF}_{PF}$$

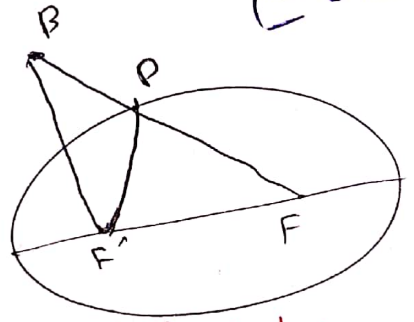
$\xrightarrow{AF + \text{دو طرف}}$

$$\longrightarrow AF' + AF < L$$

P روی محیط بیضی است پس $PF' + PF = L$

حالت دوم: فرض کنید B در بیرون بیضی باشد می خواهیم نشان دهیم

$$BF' + BF > L$$



نامساوی مثلث

$$\overset{\triangle}{BDF'} \Rightarrow BF' + BD > DF'$$

$\xrightarrow{DF + \text{دو طرف}}$

$$DF + BF' + BD > \underbrace{DF' + DF}_{L}$$

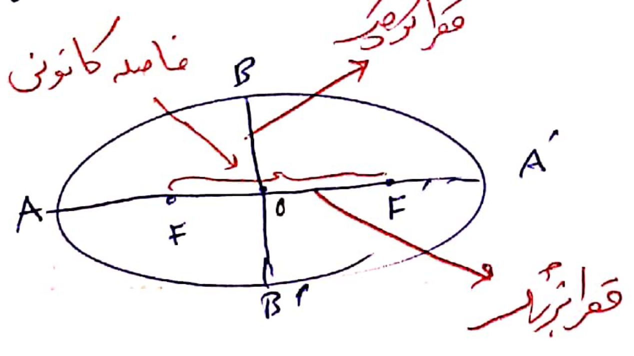
$$BF$$

چون D روی محیط بیضی است

پس $DF' + DF = L$

$$\Rightarrow BF + BF' > L$$

در بیضی مقابل داریم:



F و F' ⇐ کانون ها بیضی

FF' ← فاصله کانونی

O ← وسط FF' ← مرکز بیضی

AA' ← قطر بزرگ یا قطر کانونی

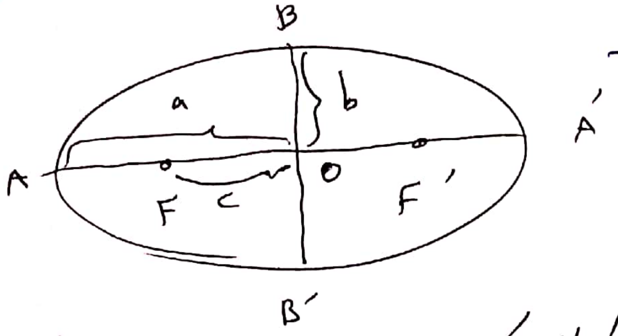
BB' ← قطر کوچک یا قطر ناکانونی

نکته:

۱_ بیضی افقی ← اگر قطر بزرگ بیضی افقی باشد ← بیضی افقی

۲_ بیضی قائم ← اگر قطر بزرگ بیضی قائم باشد ← بیضی قائم

نکته بسیار مهم: مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با $2a$ یا طول قطر بزرگ بیضی



اثبات: بیضی روبه‌رو را در نظر بگیرید.

اندازه پاره خط OB را b
OA را a در نظر بگیرید.
OF را c

هدف این است که نشان دهیم مجموع فواصل هر نقطه از دو کانون مقدار ثابت $2a$ یا طول قطر بزرگ بیضی است.

A روی محیط بیضی است پس داریم:

$AF + AF' =$ مقدار ثابت

می‌دانیم $AF' = AF + FF'$ پس با جایگذاری داریم:

$\Rightarrow AF + (AF + FF') =$ مقدار ثابت $\Rightarrow \boxed{2AF + FF' = \text{مقدار ثابت}}$ (1)

A' روی محیط بیضی است پس داریم:

$A'F' + A'F =$ مقدار ثابت

می‌دانیم ($A'F = A'F' + FF'$) پس با جایگذاری داریم:

$A'F' + (A'F' + FF') =$ مقدار ثابت $\Rightarrow \boxed{2A'F' + FF' = \text{مقدار ثابت}}$ (2)

از رابطه (1) و (2) داریم:

$2AF + \cancel{FF'} = 2A'F' + \cancel{FF'} \Rightarrow 2AF = 2A'F' \Rightarrow \underline{AF = A'F'}$ (3)

$\underbrace{AF + AF'}_{(3)} = A'F' + AF' =$ طول قطر بزرگ $= 2a$

سوال: با توجه به تساوی $AF = A'F'$ نشان دهید که مرکز بیضی قطر بزرگ آن را نصف می‌کند و در آن نتیجه بگیرید طول قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است.

$AF = AO - OF \Rightarrow OF = OA - AF \xrightarrow[FF' \text{ وسط}]{O \text{ نقطه میانی}} OA - AF = OA' - A'F'$

$A'F' = OA' - OF' \Rightarrow OF' = OA' - A'F'$

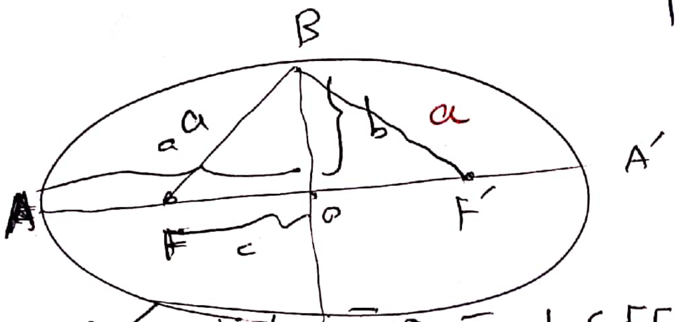
$AF = A'F' \Rightarrow OA = OA' = a \Rightarrow AA' = OA + OA' = a + a = 2a$

رابطه ی بین a و b و c در بیضی:

اگر در بیضی اندازه نیم قطر بزرگ را a
اندازه نیم قطر کوچک را b
نصف فاصله کانونی c

$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2$$

اثبات:



نقطه ی B روی محیط بیضی قرار دارد.

o وسط پاره خط FF' است از طرفی

BB' بر AA' عمود است پس OB هم بر FF' عمود است و هم آن را نصف می کند

OB عمود منصف FF' است.

هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک فاصله است $\longrightarrow BF=BF'$

B روی محیط بیضی است $\longrightarrow BF+BF'=2a$

$$\begin{cases} BF=BF' \\ BF+BF'=2a \end{cases} \Rightarrow BF=BF'=a$$

در مثلث $B\hat{O}F$ داریم (از رابطه ی فیثاغورس)

$$BF^2=OB^2+OF^2 \Rightarrow \boxed{a^2=b^2+c^2}$$

مثال: در یک بیضی $a=5$ و $b=3$ در این صورت اندازه فاصله کانونی آن را بیابید.

$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=5^2-3^2=25-9=16 \Rightarrow c=4$$

$$FF'=2c \rightarrow FF'=2\times4=8$$

مثال: در یک بیضی اندازه قطر بزرگ ۸ و اندازه قطر کوچک ۶ است. فاصله کانونی را بیابید.

$$a=\frac{8}{2}=4,\quad b=\frac{6}{2}=3 \rightarrow c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=4^2-3^2=16-9=7 \rightarrow c=\sqrt{7}$$

$$FF'=2\sqrt{7}$$

مثال: در یک بیضی فاصله ی کانونی $2\sqrt{5}$ و اندازه قطر کوچک ۴ است. اندازه قطر بزرگ را بیابید.

$$FF'=2c=2\sqrt{5} \Rightarrow c=\sqrt{5}$$

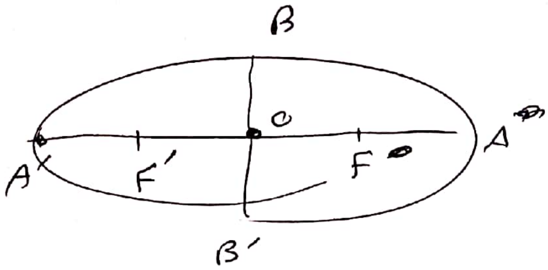
$$b=\frac{4}{2}=2$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=4+5=9 \rightarrow a=3$$

پس اندازه قطر بزرگ $2\times3=6$

نکته مهم: مختصات دو راس قطر بزرگ - قطر کوچک - کانون ها - راس ها

یعنی در حالتی که مرکز $(0,0)$ باشد.



۱- بیضی افقی

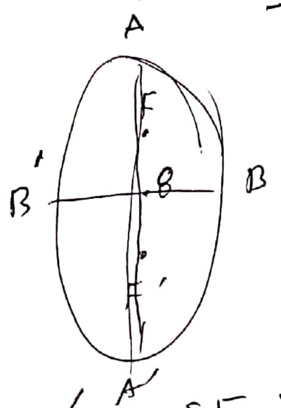
$O(0,0)$

$F(c,0)$ $\quad F'(-c,0)$

$A(a,0)$ $\quad A'(-a,0)$

$B(0,b)$ $\quad B'(0,-b)$

در بیضی افقی عرض کانون ها و راس های بزرگ یکسان هستند.



۲- بیضی قائم

$O(0,0)$

$F(0,c)$ $\quad F'(0,-c)$

$A(0,a)$ $\quad A'(0,-a)$

$B(b,0)$ $\quad B'(-b,0)$

در بیضی قائم طول کانون ها و راس های بزرگ یکسان هستند.

ب) در حالتی که مرکز (α, β) باشد در این صورت تمام نقاط بالا به طول α و به عرض β اضافه کنید. (حفظ کردن دیگر لازم نیست) فقط α و β را اضافه کنید.

۱) بیضی افقی

$O(\alpha, \beta)$

$F(c+\alpha, \beta)$ $\quad F'(-c+\alpha, \beta)$

$A(a+\alpha, \beta)$ $\quad A'(-a+\alpha, \beta)$

$B(\alpha, b+\beta)$ $\quad A'(\alpha, -b+\beta)$

۲- بیضی قائم

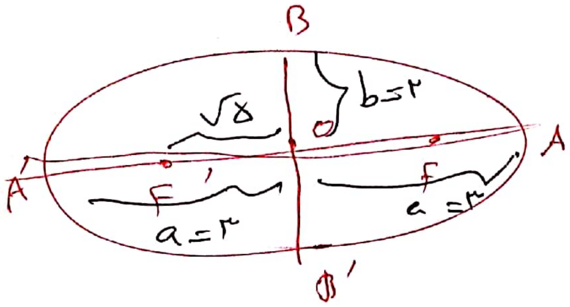
$O(\alpha, \beta)$

$F(\alpha, c+\beta)$ $\quad F'(\alpha, -c+\beta)$

$A(\alpha, a+\beta)$ $\quad A'(\alpha, -a+\beta)$

$B(b+\alpha, \beta)$ $\quad B'(-b+\alpha, \beta)$

مثال: در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و طول قطر کوچک ۴ واحد است.
اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(4,5)$ باشد



الف) فاصله کانونی را بیابید.

$2a=6 \Rightarrow a=3$ $\qquad 2c=2\sqrt5$

$2b=4 \Rightarrow b=2$

$\boxed{c^2=a^2-b^2=3^2-2^2=5 \Rightarrow c=\sqrt5}$

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و کانون‌های بیضی را بنویسید.

$O(4,5)$, $\alpha=4$, $\beta=5$

$A(a+\alpha,\beta) \Rightarrow A(3+4,5)=(7,5)$

$A'(-a+\alpha,\beta) \rightarrow A'(-3+4,5)=(1,5)$

$F(c+\alpha,\beta) \longrightarrow F(\sqrt5+4,5)$

$F'(-c+\alpha,\beta) \longrightarrow F'(-\sqrt5+4,5)$

$B(\alpha,b+\beta) \longrightarrow B(4,2+5)=(4,7)$

$B'(\alpha,-b+\beta) \qquad B'(4,-2+5)=(4,3)$

خروج از مرکز:

در بیضی مقدار a از b و c همیشه بیشتر است

$a^2=b^2+c^2 \rightarrow a^2>b^2 \rightarrow a>b$

$\qquad\qquad\qquad \searrow a^2>c^2 \Rightarrow a>c$

مقدار $e=\frac{c}{a}$ خروج از مرکز بیضی می‌نامند. (میزان کشیدگی بیضی را نشان می‌دهد)

$0<c<a \xrightarrow{\div a}$

مقدار خروج از مرکز همواره عددی بین ۰ و ۱ است.

$\frac{0}{a}<\frac{c}{a}<\frac{a}{a} \Rightarrow 0<e<1$

نکته: هرچه مقدار $\frac{c}{a}$ به یک نزدیک شود شکل بیضی کشیده‌تر شده و شکل حاصل به پاره خط نزدیک می‌شود

$e=\frac{c}{a}\longrightarrow 1 \Rightarrow c\simeq a \Rightarrow b\rightarrow 0$ بیضی به پاره خط شبیه می‌شود

$b^2=a^2-c^2$

نکته: هرچه مقدار $\frac{c}{a}$ به صفر نزدیک شود کشیدگی شکل بیضی کمتر شده و شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر می‌شود.

$e=\frac{c}{a}\rightarrow 0 \Rightarrow c\rightarrow 0 \Rightarrow a\simeq b$ بیضی به دایره نزدیک می‌شود

$c^2=a^2-b^2$

در بیضی طول قطر کوچک $2\sqrt{3}$ و فاصله کانونی ۲ است. خروج از مرکز این بیضی را بیابید.

$$2b=2\sqrt{3} \Rightarrow b=\sqrt{3}$$
$$2c=2 \Rightarrow c=1$$
$$a^2=b^2+c^2$$
$$a^2=\sqrt{3}^2+1^2=4$$
$$\to a=\sqrt{4}=2$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$$

مثال: خروج از مرکز بیضی $\frac{3}{4}$ است اگر طول قطر کوچک $2\sqrt{7}$ باشد. طول قطر کانونی و فاصله کانونی را بیابید (بیضی افقی)

$$2b=2\sqrt{7} \Rightarrow \boxed{b=\sqrt{7}}$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{4} \to 3a=4c \Rightarrow \boxed{c=\frac{3}{4}a}$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=7+\frac{9}{16}a^2 \Rightarrow a^2-\frac{9}{16}a^2=7$$

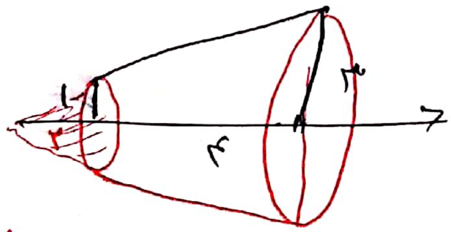
$$\to \frac{\cancel{7}}{16}a^2=\cancel{7} \Rightarrow a^2=16 \to \boxed{a=4} \to c=\frac{3}{4}a=\frac{3}{4}\times 4=3$$

قطر کانونی $=2a=2\times 4=8$

فاصله کانونی $=2c=2\times 3=6$

حل تمرین‌ـــ آ فردرس

۱. در شکل روبه‌رو می‌خواهیم ذوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.



الف) حجم شکل حاصل را بیابید.

مخروط بزرگ — مخروط کوچک

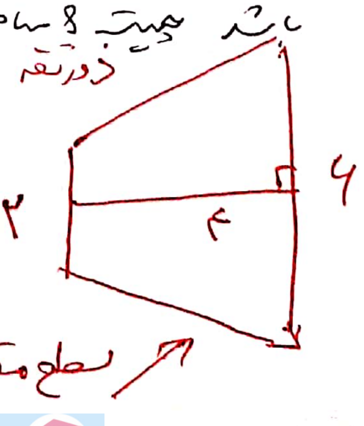
$$V=V_{\text{کل}}-V_{\text{ریز}}=\frac{1}{3}\pi(3)^2\times 6-\frac{1}{3}\pi(1)^2\times 2$$
$$=18\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{52\pi}{3}$$

حجم مخروط $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد چیست؟ مساحت آن چقدر است؟

$$S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{1}{2}(a+b)\times h$$

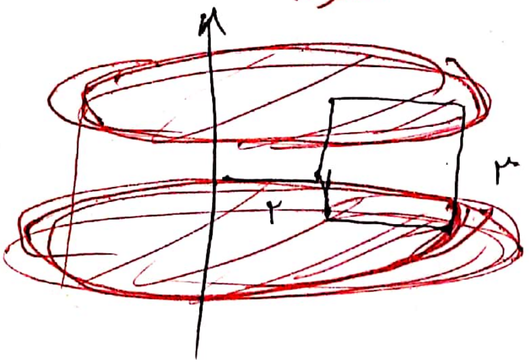
$$\frac{1}{2}(2+6)\times 4=16$$



$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h$

۲ـ مربعی به ضلع ۳ واحد در فاصله ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.

الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم کنید و حجم آن را حساب کنید.



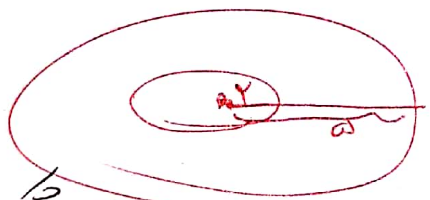
ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه ای موازی با قاعده توصیف کنید.

حجم شکل = حجم استوانه بزرگ − حجم استوانه کوچک

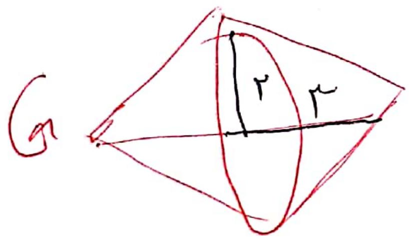
$$\pi \times 5^2 \times 3 - \pi \times 2^2 \times 3 = 3\pi(5^2 - 2^2)$$

$$= 3\pi(\underbrace{25 - 4}_{21}) = 63\pi$$

ب) سطح مقطع در برخورد با صفحه ای موازی با قاعده یک دایره توخالی شعاع خارجی ۵ و شعاع داخلی ۲ است.



۳ـ از یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده می‌شود. حجم شکل حاصل چقدر است؟ ۲ تا مخروط با قاعده مشترک



$$2 \times \frac{1}{3}\pi r^2 h = 2 \times \frac{1}{3}\pi \times 2^2 \times 3$$

$$= 8\pi$$

۴ـ کانون‌های یک بیضی نقاط (۳ و ۱) و (۵− و ۱) است. O وسط FF' است.

الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله های قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

$$O\left(\frac{1+1}{2}, \frac{3-5}{2}\right) = (1, -1)$$

معادله قطر بزرگ $x = 1$

معادله قطر کوچک $y = -1$

$$2c = |FF'| \Rightarrow 2c = |3-(-5)| = 8 \Rightarrow c = \frac{8}{2} = 4$$

ب) اگر $a=6$ باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$$

$$\rightarrow c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

خروج از مرکز $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{6}$

ص ۱۳

۵- خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ در مرکز آن $(-4,-1)$ $\alpha\ \beta$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را بیابید

$2b=6 \Rightarrow \boxed{b=3}$

$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5} \Rightarrow c=\frac{4}{5}a$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow (\frac{4}{5}a)^2=a^2-b^2 \Rightarrow b^2=a^2-\frac{16}{25}a^2=\frac{9}{25}a^2$

$\Rightarrow b=\frac{3}{5}a \xRightarrow{b=3} 3=\frac{3}{5}a \Rightarrow \boxed{a=5}\ ,\ c=\frac{4}{5}\times 5=\boxed{4}$

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

بیضی افقی

$A(a+\alpha,\beta)=A(5-4,-1)=(1,-1)$

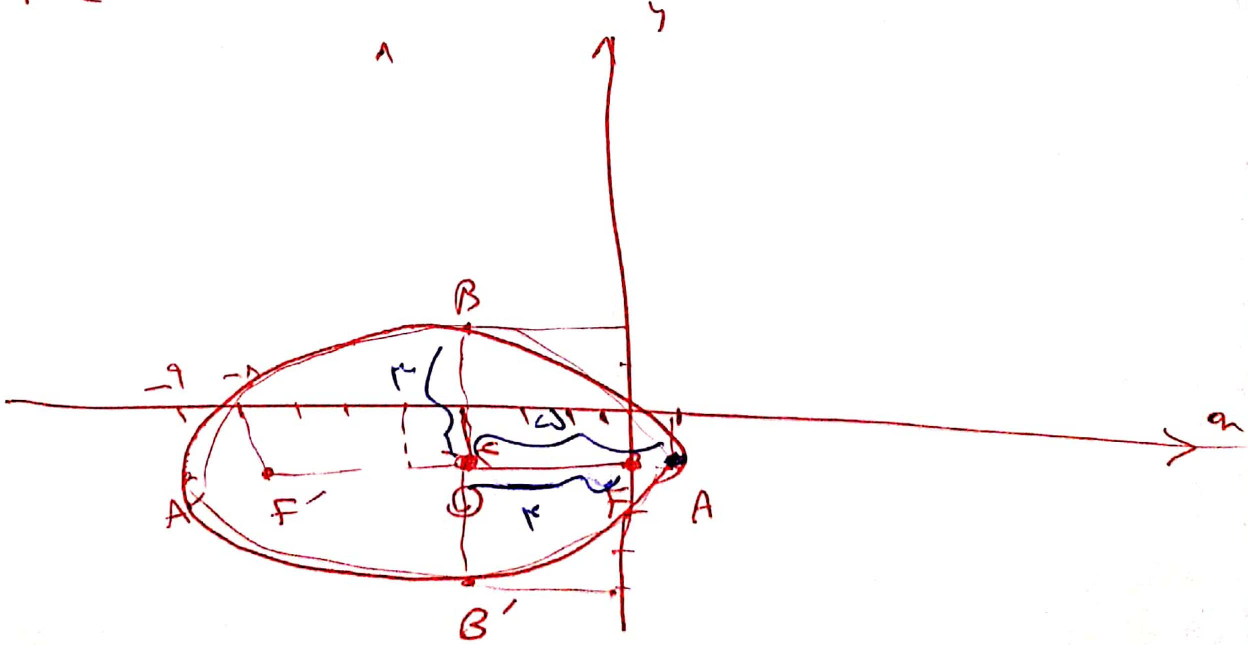
$A'(-a+\alpha,\beta)=A(-5-4,-1)=(-9,-1)$

$F(c+\alpha,\beta)=F(4-4,-1)=(0,-1)$

$F'(-c+\alpha,\beta)=F'(-4-4,-1)=(-8,-1)$

$B(\alpha,b+\beta)=B(-4,3-1)=(-4,2)$

$B'(\alpha,-b+\beta)=B'(-4,-3-1)=(-4,-4)$



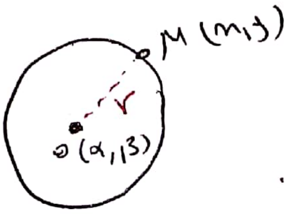
درس دوم
دایره:

تعریف دایره: مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه ثابتی در همان صفحه، مقدار ثابت و مثبتی باشد. این نقطه ثابت ← مرکز دایره   مقدار ثابت ← اندازه شعاع دایره

تذکر: دایره C را به مرکز O و شعاع r معمولاً با نماد C(O,r) نمایش می‌دهیم.

معادله دایره:

دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ در نظر بگیرید و شعاع r است. نقطه‌ی $M(x,y)$ روی محیط دایره قرار دارد.



فاصله‌ی دو نقطه‌ی O و M از همدیگر برابر شعاع است.

$$OM=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=r \xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

نکته مهم: معادله دایره به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در صفحه مختصات که به معادله‌ی استاندارد دایره معروف است به صورت زیر است:

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2}$$

نکته:

۱. اگر یک نقطه روی محیط دایره باشد فاصله‌ی آن تا مرکز برابر شعاع دایره است.

۲. اگر یک نقطه درون دایره باشد فاصله‌ی آن تا مرکز کمتر از شعاع دایره است.

۳. اگر یک نقطه بیرون دایره باشد فاصله‌ی آن تا مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است.

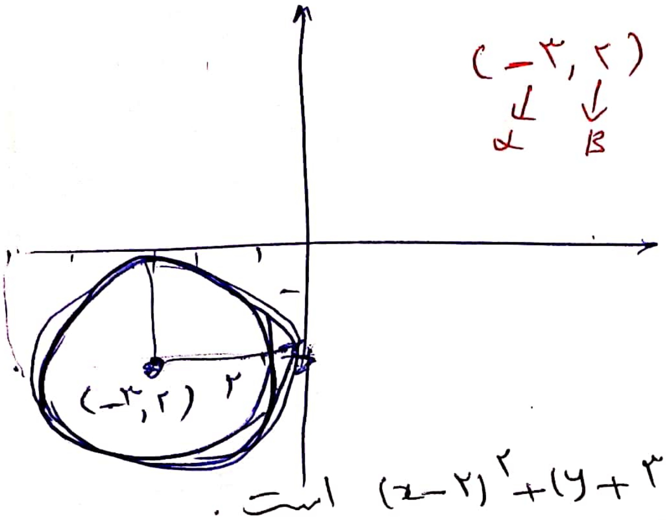
بنابر ۳ نکته‌ی فوق داریم:

(۱) نقاطی که در معادله‌ی $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ صدق کنند روی دایره هستند

(۲) نقاطی که در معادله‌ی $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2<r^2$ صدق کنند ← درون دایره هستند.

(۳) نقاطی که در معادله‌ی $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2>r^2$ صدق کنند بیرون دایره هستند

مثال: اگر مرکز دایره‌ای (۲و۳-) باشد و شعاع آن ۲ باشد معادله این دایره را بنویسید.



$(-3,2) \quad r=2$

$\alpha \quad \beta$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

$(x+3)^2+(y-2)^2=4$

مثال: معادله دایره‌ای به صورت $(x-2)^2+(y+3)^2=9$ است. مختصات مرکز و شعاع دایره را به دست آورید.

$(x-2)^2+(y+3)^2=9$

$\sqrt{9}=3 \rightarrow \boxed{r=3}$

مرکز $O(2,-3)$

مثال: معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن مبدا مختصات و شعاع ۲ باشد.

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \rightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=2^2$

$x^2+y^2=4$

$O(0,0)$

$r=2$

مثال: معادله دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع r بنویسید.

$(x-0)^2+(y-0)^2=r^2 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=r^2}$

مثال: معادله دایره‌ای بنویسید که از نقطه (۳و۱-) بگذرد و مرکز آن (۱-و۲) باشد.

مرکز دایره را $O(2,-1)$ را داریم باید شعاع دایره را به دست آوریم. ما داریم نقطه $(-1,3)$ روی دایره است پس فاصله این نقطه تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است.

$r=\sqrt{(2-(-1))^2+(-1-3)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$O(2,-1)$, $r=5$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

$\boxed{(x-2)^2+(y+1)^2=25}$

نکته: برای مشخص کردن وضعیت یک نقطه نسبت به دایره (نقطه‌ای A)
فاصله‌ی آن نقطه را تا مرکز بدست می‌آوریم و با شعاع مقایسه می‌کنیم ۳ حالت زیر را داریم

$OA = r \Leftarrow$ A روی دایره است

$OA < r \Leftarrow$ A درون دایره است

$OA > r \Leftarrow$ A بیرون دایره است.

مثال: وضعیت هر نقطه را نسبت به دایره مشخص کنید.

$(x+2)^2+(y-3)^2=4$ نقاط $A(1,1)$ $B(0,3)$ $C(-2,4)$

$(x+2)^2+(y-3)^2=4 \rightarrow O(-2,3)$, $r=\sqrt{4}=2$

$OA=\sqrt{(1+2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$ $\quad OA>r=2$

$OB=\sqrt{(0+2)^2+(3-3)^2}=\sqrt{4}=2$ $\quad OB=2=r$

$OC=\sqrt{(-2+2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{1}=1$ $\quad OC<2=r$

پس A بیرون دایره، B روی دایره، C درون دایره

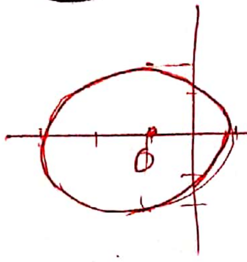
وضعیت نقاط $A(1,1)$ و $B(0,3)$ و $C(-2,4)$ را نسبت به دایره‌ای به مرکز $O(1,-2)$ و شعاع ۳ بررسی کنید.

$OA=\sqrt{(1-1)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{9}=3 \Rightarrow OA=r$
A روی دایره

$OB=\sqrt{(1-0)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{1+25}=\sqrt{26} \Rightarrow OB>r$
B بیرون دایره

مثال: معادله دایره‌ای به شکل $(x+1)^2+y^2=4$ باشد.

الف) مختصات مرکز و شعاع دایره را بنویسید.



$(x+1)^2+y^2=4 \rightarrow O(-1,0)$

$r=2$

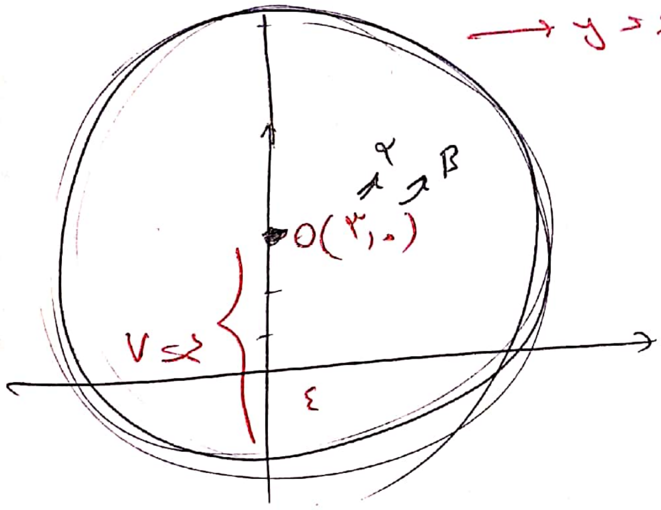
ب) مختصات محل برخورد (نقاط تقاطع) این دایره با محورهای مختصات پیدا کنید.

محل برخورد با محور xها $\Rightarrow y=0 \Rightarrow (x+1)^2+0^2=4 \Rightarrow (x+1)^2=4$ ریشه بگیر

$x+1=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x+1=2 \Rightarrow x=1 \\ x+1=-2 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$

محل برخورد با محور yها $\Rightarrow x=0 \Rightarrow (0+1)^2+y^2=4 \Rightarrow 1+y^2=4 \Rightarrow y^2=3$

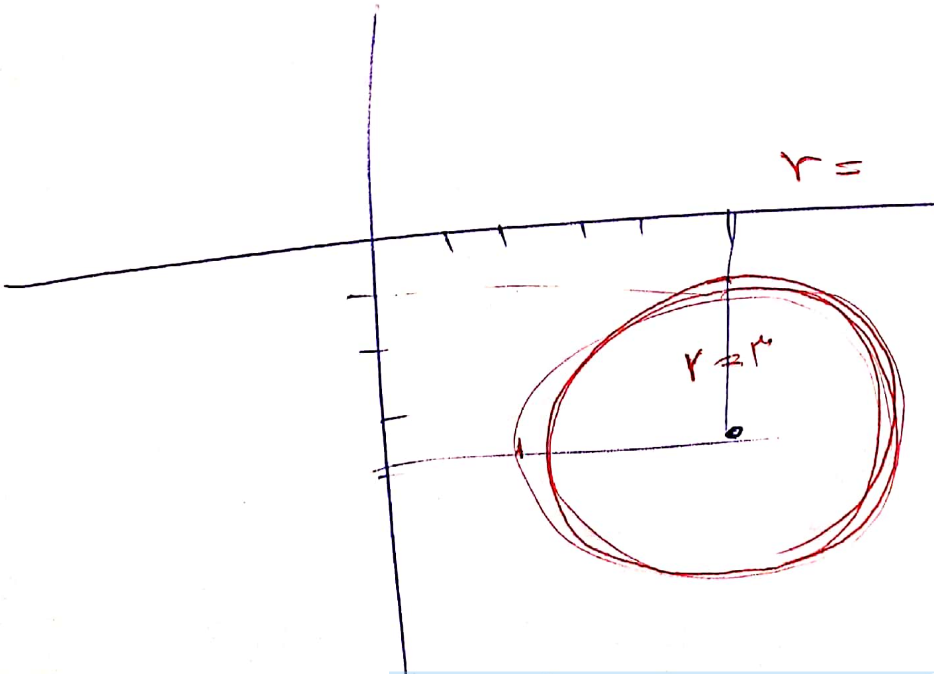
$\rightarrow y=\pm\sqrt{3}$



مثال: معادله دایره‌های زیر را بنویسید.

$(x-3)^2+(y-0)^2=4^2$

$(x-3)^2+y^2=16$



$r=$ ، $O(5,-4)$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

$(x-5)^2+(y+4)^2=9$

معادله‌ی گسترده‌ی دایره ، (معادله ضمنی دایره)

مثال: معادله‌ی دایره‌ی $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ را در نظر بگیرید و آن را به کمک اتحادها ساده کنید

$$(x-3)^2+(y-2)^2=4 \Rightarrow x^2-6x+9+y^2-4y+\cancel{4}=\cancel{4}$$

$$\rightarrow x^2+y^2-6x-4y+9=0$$

معادله‌ی گسترده دایره (معادله‌ی ضمنی دایره)

تذکر: معادله‌ی استاندارد و معادله‌ی گسترده به یکدیگر تبدیل می‌شوند.

مثال: معادله‌ی گسترده‌ی دایره‌ی زیر را به روش مربع کامل کردن به معادله‌ی استاندارد تبدیل کنید و سپس شعاع و مرکز آن را بدست آورید.

$$x^2+y^2-4x+6y+12=0$$

$$(x^2-4x)+(y^2+6y)+12=0$$

$$(x^2-4x+4-4)+(y^2+6y+9-9)+12=0$$

$$(x-2)^2-4+(y+3)^2-9+12=0$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2-1=0$$

$$\rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=1$$

$O(2,-3)\ ,\ r=1$

در مربع کامل کردن b را نصف می‌کنیم به توان ۲ می‌رسانیم و کم و زیاد می‌کنیم:

$\frac{-4}{2}=-2 \rightarrow (-2)^2=4$

$\frac{6}{2}=3 \rightarrow 3^2=9$

نکته مهم: اگر $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله‌ی گسترده‌ی دایره باشد، مختصات مرکز و شعاع دایره به صورت زیر است:

$$O\left(-\frac{a}{2}\ ,\ -\frac{b}{2}\right)$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$$

اثبات: مراجعه شود به ص ۳۷ کتاب درسی

نکته: معادله‌ی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله‌ی دایره است $\Longleftrightarrow$ $a^2+b^2>4c$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$$

عبارت زیر رادیکال ≥ 0

$$a^2+b^2-4c\geq 0 \Rightarrow a^2+b^2\geq 4c$$

مثال: معادله گسترده دایره‌ای به شکل $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ است.

مختصات مرکز این دایره و شعاع آن را پیدا کنید و معادله دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

$$x^2+y^2-2x-4y+4=0 \Rightarrow a=-2,\ b=-4,\ c=4$$

$$O\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)=\left(\frac{+2}{2},\frac{+4}{2}\right)=(+1,2)$$

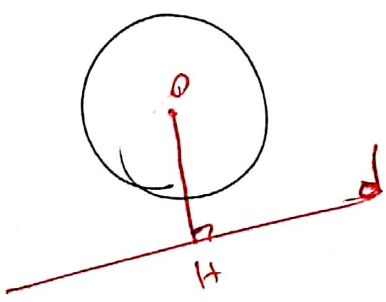
$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-4)^2-4(4)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4+36-24}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=\frac{1}{2}\times 4=2$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=4$$ معادله استاندارد

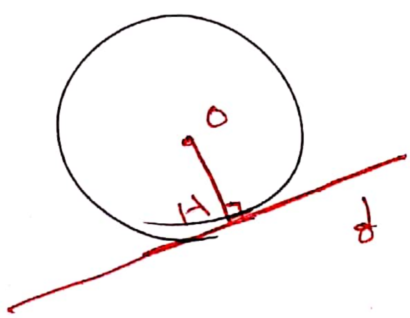
اوضاع نسبی خط و دایره

خط و دایره می‌توانند یک یا دو نقطه اشتراک یا هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند.



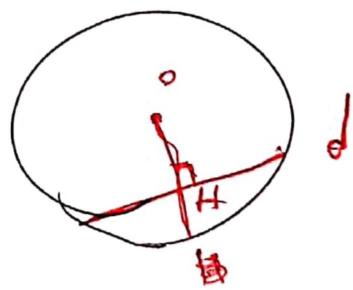
$OH>r$

خط d، دایره را قطع نکند.



$OH=r$

خط d بر دایره مماس است.



$OH<r$

خط با دایره متقاطع است.

دو نکته مهم:

۱ـ خط مماس در نقطه تماس با دایره، بر شعاع آن دایره عمود است.

۲ـ فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

نکته: برای مشخص کردن وضعیت خط نسبت به دایره، فاصله‌ی مرکز دایره تا خط را به دست می‌آوریم و آن را با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم.

$OH = r$ ← خط بر دایره مماس است (در یک نقطه قطع می‌کند)

$OH < r$ ← خط دایره متقاطع است (۲ نقطه)

$OH > r$ ← خط دایره را قطع نمی‌کند (۰ نقطه)

مثال: وضعیت خط $x+y=2$ نسبت به دایره $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ مشخص کنید.

$x^2+y^2-4x+2y+4=0$

مرحله اول $O\left(\frac{4}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (3, -1)$

$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(2)^2-4(4)} = \frac{1}{2}\sqrt{36+\cancel{4}-24}$ 16

$= \frac{4}{2} = 2$

مرحله دوم فاصله نقطه‌ی مرکز $(3, -1)$ از خط $x+y=2$ را پیدا می‌کنیم.

$x+y-2=0$

$(3, -1)$

$x_0 \quad y_0$

$$d = \frac{|3-1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 0$$

$0 < 2$

خط دایره را با دایره متقاطع است. چون $d=0$ پس خط از مرکز می‌گذرد.

مثال: وضعیت خط $x+y=1$ و دایره $x^2+y^2+2x+2y-1=0$ را مشخص کنید.

$$O\left(\frac{-2}{2},\frac{-2}{2}\right)=(-1,-1)$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2-4(-1)}=\frac{1}{2}\sqrt{12}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

فاصله‌ی $(-1,-1)$ تا خط $x+y-1=0$

$$d=\frac{|-1-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$d>r$ پس فاصله مرکز تا خط بیشتر از شعاع دایره است پس خط دایره را قطع نمی‌کند.

مثال: وضعیت خط $y=-1$ و دایره $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ را مشخص کنید.

$O(2,-3)$ $\quad r=2$

$y+1=0$

$O(2,-3)$

$$d=\frac{|-3+1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=2$$

$d=r$ پس فاصله‌ی مرکز تا خط با شعاع دایره یکسان است پس خط بر دایره مماس است.

مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x+4y-1=0$ مماس بوده و مرکز آن $C(1,2)$ است.

چون خط بر دایره مماس است پس فاصله‌ی مرکز تا خط برابر شعاع دایره است.

$C(1,2)$

$3x+4y-1=0$

$$r=\frac{|3(1)+4(2)-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$$

$r=2$

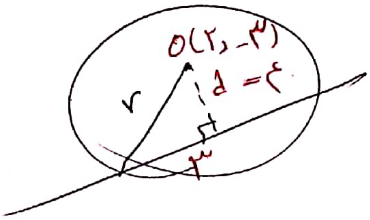
$(1,2)$: α, β

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

$$\boxed{(x-1)^2+(y-2)^2=4}$$

معادله دایره

مثال: مرکز دایره‌ای نقطهٔ $O(2,-3)$ است. این دایره روی خط $3x-4y+2=0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ این دایره را بنویسید.



ابتدا فاصلهٔ خط تا مرکز (d) را بدست می‌آوریم:

$$d=\frac{|3(2)-4(-3)+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4$$

تذکر: اگر خطی از مرکز عبور کند و بر وتر عمود باشد آن وتر را نصف می‌کند $6\div 2=3$

با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس: $r^2=3^2+4^2 \Rightarrow r^2=25 \Rightarrow r=5$

معادلهٔ دایره: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

$O(2,-3)$

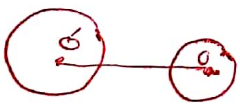
$r=5$

$(x-2)^2+(y+3)^2=25$

اوضاع نسبی دو دایره: $C(O,r)$ $\quad C'(O',r')$

خط المرکزین: پاره‌خطی که مرکزهای ۲ دایره را بهم وصل می‌کند و با d نشان می‌دهیم

۶ حالت برای وضعیت دو دایره نسبت بهم وجود دارد:



۱- دو دایره بیرون هم (متخارج) ← $d>r+r'$

۲- دو دایره مماس بیرون ← $d=r+r'$

۳- دو دایره ~~هم~~ متقاطع ← $r-r'<d<r+r'$

۴- دو دایره مماس درون ← $d=r-r'$

۵- دو دایره متداخل ← $d<r-r'$

۶- دو دایره هم مرکز ← $d=0$

مثال: وضعیت دو دایره $x^2+y^2-10x-14y+73=0$ و $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ را نسبت بهم مشخص کنید.

(1) $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ $\quad O(2,3)$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{16+36+12}=\frac{1}{2}\sqrt{64}=\frac{1}{2}\times 8=4$$

(2) $x^2+y^2-10x-14y+73=0$ $\quad O(5,7)$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{100+196-292}=\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$$

(3) $d=OO'=\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=\sqrt{9+16}=5$

$\longrightarrow \quad r+r'=d \quad \Rightarrow$ دو دایره مماس خارج‌اند.

مثال: وضعیت دو دایره $x^2+y^2-2x-1=0$ و $x^2+y^2=1$ را نسبت بهم مشخص کنید.

$x^2+y^2-2x-1=0$ $\quad O(1,0)$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+0-4(-1)}=\frac{1}{2}\sqrt{8}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

$x^2+y^2=1 \longrightarrow O'(0,0) \quad r'=1$

$d=OO'=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2}=1$ $\quad r+r'=\sqrt{2}+1$ $\quad r-r'=\sqrt{2}-1$

$\sqrt{2}-1<1<\sqrt{2}+1 \Rightarrow r-r'<OO'<r+r'$

$\Longrightarrow$ دو دایره متقاطع‌اند.

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که بر دایره $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ مماس بیرون و مرکز آن نقطه $O(2,-2)$ باشد. مرکز دایره‌ای را که می‌خواهیم بنویسیم را داریم $O(2,-2)$ کافی است شعاع آن را بدست آوریم $(r=?)$ چون دو دایره مماس بیرون هستند که

$r+r'=OO' \Rightarrow r=OO'-r'$

$x^2+y^2+2x-4y-4=0$ $\quad O'(-1,2)$

$$r'=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-4)^2-4(-4)}=\frac{1}{2}\sqrt{36}=3$$

ص ۲۴

$$OO' = \sqrt{(2+1)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\rightarrow r = OO' - r' \Rightarrow r = 5 - 3 = 2$$

$$\begin{cases} O(\underset{\alpha}{2}, \underset{\beta}{-2}) \\ r = 2 \end{cases} \rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

مثال: برای حالت های زیر معادله دو دایره بنویسید.

الف) دو دایره هم مرکز

$x^2+y^2=1 \qquad x^2+y^2=4$

ب) دو دایره بیرون هم

$x^2+y^2=1$

$(x-5)^2+(y-5)^2=1$

مثال: برای موارد زیر وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید:

الف) $x^2+y^2-2x+4y=0$ و $x^2+y^2+2x-4y=0$

$O(1,-2)$

$O'(-1,2)$

$r = \frac{1}{2}\sqrt{4+16} = \frac{1}{2}\times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$

$r' = \frac{1}{2}\sqrt{4+16} = \frac{1}{2}\times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$

$$d = OO' = \sqrt{(-1-1)^2+(2+2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$r + r' = OO' \Rightarrow$ دو دایره مماس بیرون اند

ب) $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ و $x^2+y^2-2x+4y+1=0$

$O(-1,2) \quad r=1$

$O'(1,-2)$

$r = \frac{1}{2}\sqrt{4+16-4} = \frac{1}{2}\times 4 = 2$

حل تمرینات درس ۳.

۱- در هر دایره مختصات مرکز و شعاع را بیابید. محل تقاطع هر دایره را با محورهای مختصات در صورت وجود مشخص کنید.

الف) $x^2+y^2-6x+2y+1=0$

$O(3,-1)$ $\quad r=\frac{1}{2}\sqrt{36+4-4}=\frac{1}{2}\times 6=3$

$\to (x-3)^2+(y+1)^2=9$

تقاطع محور x ها $\to y=0 \Rightarrow (x-3)^2+1=9 \Rightarrow (x-3)^2=8 \Rightarrow x-3=\pm 2\sqrt{2} \Rightarrow \underline{x=3\pm 2\sqrt{2}}$

تقاطع محور y ها $\to x=0 \Rightarrow (0-3)^2+(y+1)^2=9 \Rightarrow (y+1)^2=0 \Rightarrow y=-1$ مماس بر محور y ها

ب) $x^2+(y+3)^2-4=0$

$O(0,-3)$ $\quad r=2$

تقاطع با محور x ها $\to y=0 \Rightarrow x^2+3^2-4=0 \Rightarrow x^2+5=0 \Rightarrow x^2=-5$
معادله جواب ندارد.

تقاطع با محور y ها $\to x=0 \Rightarrow 0+(y+3)^2=4 \Rightarrow y+3=\pm 2$

$y+3=2 \Rightarrow y=-1$

$y+3=-2 \to y=-5$

۲- در حالت های زیر معادله دایره را بنویسید.

الف) دایره‌ای بنویسید که از مبدأ مختصات $(0,0)$ بگذرد و مرکز آن $O(2,-1)$ باشد.

$r=\sqrt{(2-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=5$

ب) دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(2,3)$ (α,β) و نقطه $(-3,-9)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

$r=\sqrt{(-3-2)^2+(-9-3)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$

$(x-2)^2+(y-3)^2=169$

پ) دایره‌ای که نقاط $(0,3)$ و $(-4,-1)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشند.

فاصله دو نقطه از هم قطر است $2r$ بعد ←

$2r=\sqrt{(-4-0)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$

مختصات وسط پاره‌خط ← مرکز دایره ←

$O\left(\frac{-4+0}{2},\frac{-1+3}{2}\right)=(-2,1)$

$\longrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=32$

صفحه ۲۶

۳- وضعیت نقاط $A(1,0)$ ، $B(0,-1)$ ، $C(-1,-2)$ و $D(0,0)$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ مشخص کنید.

$O(1,-2)$ $\quad r=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-4}=\frac{4}{2}=2$

$OA=\sqrt{(1-1)^2+(0+2)^2}=\sqrt{4}=2$ $\quad OA>r$

پس A بیرون دایره

$OB=\sqrt{(0-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ $\quad OB<r$

B داخل دایره

$OC=\sqrt{(-1-1)^2+(-2+2)^2}=\sqrt{4}=2$ $\quad OC=r$

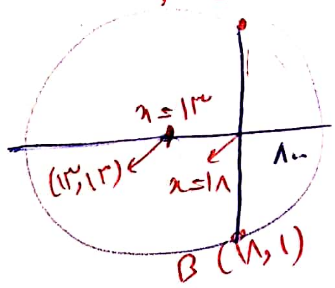
C روی دایره است

$OD=\sqrt{(0-1)^2+(0+2)^2}=\sqrt{5}$ $\quad OD>r$

پس D بیرون دایره است.

۴- شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایره‌ای شکل به شعاع ۱۳۰۰ متر، دو مسیر پیاده‌روی مطابق شکل بسازد. اگر مختصات مرکز دایره $(13,13)$ و هر واحد ۱۰۰ متر باشد

الف) معادله دایره را بنویسید. $(x-13)^2+(y-13)^2=169$



ب) مختصات نقاط برخورد دو مسیر را با دایره را پیدا کنید.

پ) دو مسیر در چه نقطه‌ای با یکدیگر متقاطع اند؟ $A\,\begin{vmatrix}18\\1\end{vmatrix}$ $\quad B\,\begin{vmatrix}18\\25\end{vmatrix}$

ت) طول مسیر عمودی چقدر است؟

ب) $x=18 \Rightarrow (\cancel{18-13})^2+(y-13)^2=169 \Rightarrow (y-13)^2=144$

$\rightarrow y-13=\pm 12$ $\rightarrow y=25$ ، $y=1$

ت) طول مسیر عمودی

$AB=25-1=24\rightarrow 2400$ متر

۵- معادله‌ی گسترده یک دایره به شکل $x^2+y^2+2x+2y-8=0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کنید و معادله آن را به شکل استاندارد بنویسید.

$x^2+y^2+2x+2y-8=0$

$O(-1,-1)$ $\quad r=\frac{1}{2}\sqrt{4+4+32}=\frac{1}{2}\sqrt{40}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}=\sqrt{10}$

معادله استاندارد $\longleftarrow$ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Rightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=10$

۶- وضع خط‌های زیر را نسبت به دایره مشخص کنید:

الف) $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ و $6x+4y=0$

$O(2,2)$

$r=\frac{1}{2}\sqrt{16+16-28}=\frac{1}{2}\times 2=1$

$d=\frac{|6(2)+4(2)|}{\sqrt{6^2+4^2}}=\frac{20}{\sqrt{52}}$ $\quad d=\frac{20}{\sqrt{52}}>1=r$

پس خط و دایره نقطه مشترک ندارند.

ب) $x^2+y^2=2$ و $y=-x-2$

$O(0,0)$ و $r=\sqrt{2}$ $\quad y+x+2=0 \longleftarrow$

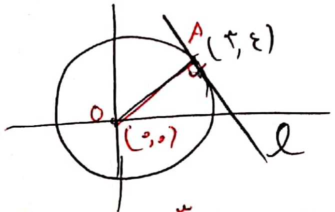
$d=\frac{|0+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$d=r$

پس خط بر دایره مماس است.

۷- اگر بدانیم خط l در نقطه $A(3,4)$ بر دایره مماس است. معادله خط مماس چیست؟

ابتدا شیب خط OA را بدست آوریم



$m_{OA}=\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3}$

چون خط l بر OA عمود است پس داریم:

(شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است)

شیب خط l معکوس و قرینه شیب خط OA است

$m_l=\frac{-3}{4}$

خط l از $(3,4)$ می‌گذرد:

$\longrightarrow y=m(x-x_0)+y_0 \Rightarrow y=-\frac{3}{4}(x-3)+4$

تمرین ۸ معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن نقطه $(0,3)$ باشد و بر خط $3x-4y=3$ مماس باشد.

$$d=r=\frac{|3(0)-4(3)-3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{15}{5}=3$$

$$(x-0)^2+(y-3)^2=3^2 \Rightarrow \boxed{x^2+(y-3)^2=9}$$

تمرین ۹. مشخص کنید در حالت‌های زیر دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند.

الف) $x^2+y^2-2x+4y=4$ و $x^2+y^2+2x-4y=9$

$O(1,-2)$ $\qquad$ $O'(-1,2)$

$r=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-4(-4)}=3$ $\qquad$ $r'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+36}=\sqrt{14}$

$$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$r-r'<OO'<r+r' \Rightarrow$ دو دایره متقاطع اند

ب) $(x-2)^2+(y+3)^2=7$ و $x^2+(y-5)^2=5$

$O(2,-3),\ r=\sqrt{7}$ $\qquad$ $O'(0,5)$ $\quad r'=\sqrt{5}$

$OO'=\sqrt{(2-0)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$ $\Big\} \Rightarrow OO'>r+r'$ متخارج اند.

سوال ۱۰) معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $\underline{O(-1,-1)}$ و با دایره $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس درون باشد.

$O'(2,3)$

$r'=\frac{1}{2}\sqrt{16+36+12}=\frac{1}{2}\times 8=4$

$OO'=\sqrt{(2+1)^2+(3+1)^2}=5$

مماس درون $OO'=r-r'$

$5=r-4 \Rightarrow \boxed{r=9}$

$$(x+1)^2+(y+1)^2=81$$

موفق و پیروز و تندرست باشید

حسین لداب

۹۸/۱/۲۴

1 حدود m را چنان بیابید که منحنی به معادله $x^2+y^2+\sqrt{7}x+3y+m^2=0$ معادله‌ی گسترده یک دایره باشد.

$a=\sqrt{7} \quad b=3 \quad c=m^2$

$a^2+b^2-4c \geq 0 \Rightarrow 7+9-4m^2 \geq 0 \Rightarrow 16-4m^2 \geq 0 \Rightarrow m^2 \leq 4$

$\Rightarrow -2 \leq m \leq 2$

2 معادله‌ی دایره‌ای بنویسید که مرکزش به طول ۲ روی محور xها باشد و بر خط به معادله‌ی $3x-4y+9=0$ مماس باشد.

$O'(2,0) \qquad 3x-4y+9=0$ خط مماس بر دایره

$$R=O'H=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|6-0+9|}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{5}=3$$

$O'(\underset{\alpha}{2},\underset{\beta}{0})$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow \boxed{(x-2)^2+y^2=9}$$

3 خط $y=-2x+4$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع کرده است. معادله‌ی دایره‌ای بنویسید که پاره‌خط AB قطری از آن باشد.

$y=-2x+4$

$x=0 \Rightarrow y=4 \rightarrow A(0,4)$

$y=0 \Rightarrow -2x+4=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow B(2,0)$

O مرکز دایره وسط AB است $\Rightarrow O\left(\frac{0+2}{2}, \frac{4+0}{2}\right)=(1,2)$

$$R=OA=\sqrt{(0-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

معادله دایره $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=5$

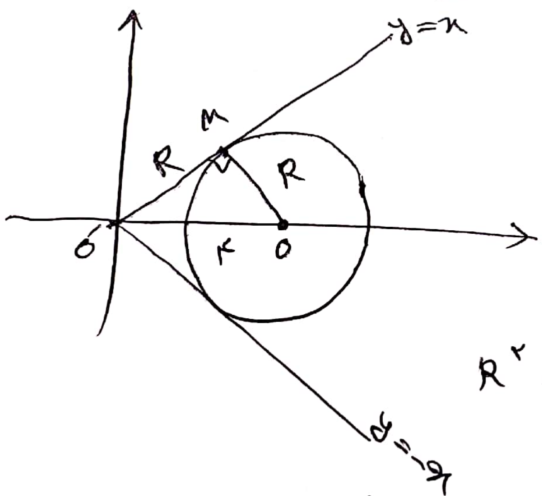
$$OH = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|۱۲+۲۴+۴|}{\sqrt{۳^2+۴^2}} = \frac{۴۰}{۵} = ۸$$

تذکر: قطر عمود بر وتر، وتر و کمان مقابل را نصف می‌کند. پس $AH = \frac{۱۲}{۲} = ۶$

$$R = \sqrt{۶^2+۸^2} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰ \qquad O(\underset{\alpha}{۴}, \underset{\beta}{۶})$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow \underline{(x-۴)^2+(y-۶)^2 = ۱۰۰}$$

۵ مرکز دایره‌ای به طول ۴ روی محور xها قرار دارد. این دایره بر نیمساز های ربع اول و چهارم مماس است. معادله دایره را بنویسید.



$$O(\underset{\alpha}{۴}, \underset{\beta}{۰})$$

مثلث OMO قائم الزاویه متساوی الساقین است.

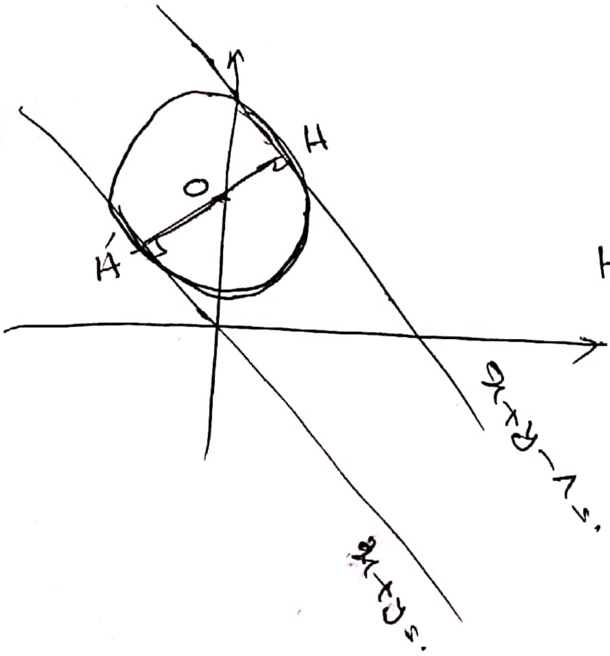
$$R^2+R^2 = ۴^2 \Rightarrow ۲R^2 = ۱۶ \Rightarrow R^2 = ۸$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2$$

معادله دایره: ← $\underline{(x-۴)^2+y^2 = ۸}$

3

۶- معادله‌ی دایره‌ای بنویسید که مرکزش روی محور Oy و بر دو خط به معادله‌های $x+y=0$ و $x+y-8=0$ مماس باشد.



فرض کنیم $O(0,\beta)$ مرکز دایره باشد. $\beta>0$

$$HH'=2R=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|0+8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt2}$$

$$\frac{8}{\sqrt2}\times\frac{\sqrt2}{\sqrt2}=4\sqrt2$$

$$\rightarrow R=\frac{4\sqrt2}{2}=2\sqrt2$$

$$OH'=R\rightarrow\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=R\Rightarrow\frac{|0+\beta|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt2$$

$$\rightarrow|\beta|=4\Rightarrow\beta=4\rightarrow O(0,4)\quad R=2\sqrt2$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2\Rightarrow(x-0)^2+(y-4)^2=8$$

۷- خط به معادله‌ی $3x+4y+4=0$ ، دایره به معادله‌ی $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ را در دو نقطه‌ی A و B قطع می‌کند. اندازه وتر AB را بیابید.

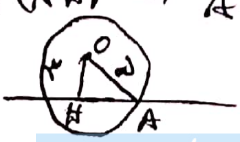
ابتدا معادله‌ی دایره را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$x^2+y^2-2x-4y-20=0$$

$$O\left(-\frac a2,-\frac b2\right)=(1,2)\qquad R=\frac12\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac12\sqrt{4+16+80}=5$$

$$OH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3+8+4|}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{5}=3$$

$$R^2=(OH)^2+(AH)^2\Rightarrow AH^2=25-9=16\rightarrow AH=4\Rightarrow AB=8$$



۸ دایره‌ای به معادله‌ی $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ و نقطه $O(4,-2)$ مفروض است.

الف) معادله دایره ای را بنویسید که مرکزش O و بر دایره مفروض مماس خارج باشد.

ب) معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکزش O و بر دایره مفروض مماس داخل باشد.

$(x-1)^2+(y-2)^2=4 \qquad O'(1,2) \qquad R=2 \qquad O(4,-2)$

$$OO'=\sqrt{(1-4)^2+(2+2)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

الف) مماس خارج ⟵

$$OO'=R+R'$$

$$5=2+R' \Rightarrow R'=3$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R'^2 \Rightarrow (x-4)^2+(y+2)^2=9$$

ب)

$$OO'=|R-R'| \Rightarrow 5=|R'-2| \Rightarrow R'=7$$

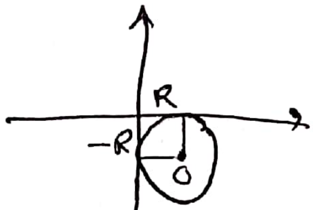
$$R'=7 \quad , \quad O(4,-2)$$

$$(x-4)^2+(y+2)^2=49$$

۹ معادله دایره‌ای بنویسید که در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس باشند و از نقطه $A(1,-2)$ بگذرد.

شعاع دایره $=R$

$O(R,-R)$



$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

$$(x-R)^2+(y+R)^2=R^2 \xrightarrow{A(1,-2)} (1-R)^2+(-2+R)^2=R^2$$

$$\to 1-2R+R^2+4+R^2-4R=R^2 \to R^2-6R+5=0$$

$$\to (R-1)(R-5)=0 \quad \begin{cases} R=1 \\ R=5 \end{cases}$$

$$(x-R)^2+(y+R)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=1$$

$$(x-R)^2+(y+R)^2=R^2 \Rightarrow (x-5)^2+(y+5)^2=25$$