

قانون احتمال کل

(فصل هفتم ریاضی ۱۲ تجربی)

(قابل استفاده برای دانش آموزان کنکوری تجربی و ریاضی فیزیک نظام جدید)

طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی



پاسخ کاملا تشریحی



تمرین های برای آمادگی



مؤلف:

حبیب هاشمی

۱۳۹۸

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف حبیب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با نوزده سال سابقه تدریس در برگزاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش و پرورش منطقه ۴ تهران و مدرس دانشگاه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا به آیدی تلگرام @habib_hashemi پیام دهید.

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

تدریس خصوصی و مبحثی ریاضیات

متوسطه

و

تضمینی کنکور

تهران و کرج

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب کتاب درسی ریاضی دوازدهم تجربی فصل هفتم، مبحث «**قانون احتمال کل**» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

- ۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.
 - ۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.
 - ۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.
 - ۴- در این کتاب با نگاهی عمیق تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.
 - ۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.
 - ۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.
 - ۷- توجه به دانش قبلی دانش آموزان.
 - ۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.
- در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

احتمال

یادآوری

پدیده‌ی تصادفی: پدیده یا آزمایشی است که نتیجه‌ی آن را نتوان قبل از انجام، به طور قطعی پیش‌بینی کرد.

فضای نمونه: مجموعه‌ی تمام نتایج ممکن یک پدیده‌ی تصادفی را فضای نمونه‌ی آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.

پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای S می‌نامیم.

رابطه‌ی محاسبه‌ی احتمال وقوع یک پیشامد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه‌ی حالت‌های ممکن}}$$

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ به بیان دیگر

$$A \cap B = \emptyset$$

پیشامدهای مستقل: دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

اعمال روی پیشامدها:

فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.

اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

نکته: اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند آنگاه: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

نکته: اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند آنگاه: $P(A \cap B) = 0$

اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A و B رخ دهد.

رابطه‌ی محاسبه‌ی احتمال اجتماع دو پیشامد $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

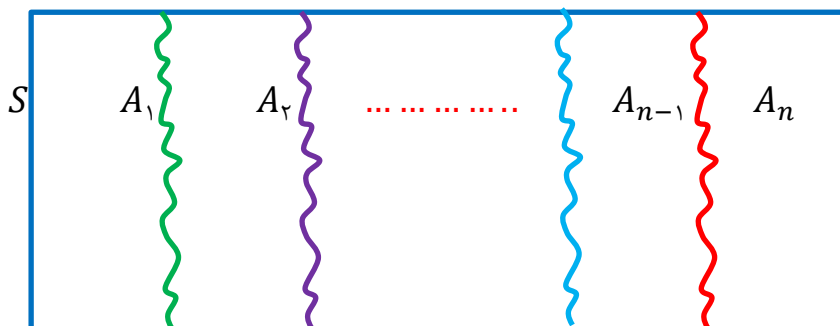
متمم یک پیشامد: پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. $P(A') = 1 - P(A)$

احتمال شرطی: منظور از ((احتمال A به شرط B)) که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع

پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است و داریم: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

افراز یک مجموعه

فرض کنیم A_1 و A_2 و ... و A_n زیر مجموعه‌هایی نا تهی از مجموعه‌ی S باشند، به گونه‌ای که اجتماع همه‌ی آنها برابر S ، و اشتراک هر دو تای آنها برابر \emptyset باشد، در این صورت می‌گوییم این مجموعه‌ها یک افراز روی S درست کرده‌اند.



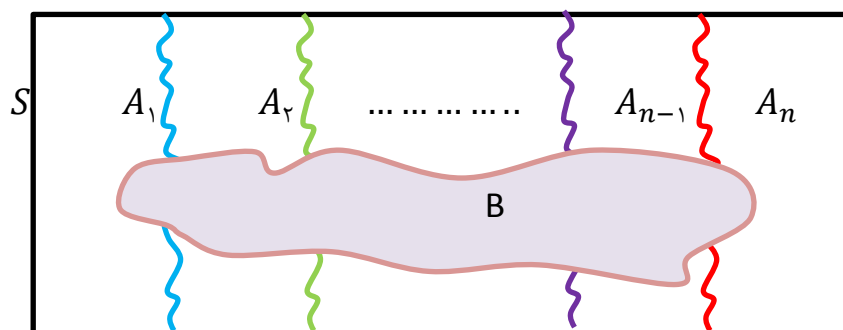
مثال: کشوری ایران به ۳۱ استان افراز شده است.

مثال: اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی اول و b مجموعه‌ی اعداد طبیعی مرکب و $C = \{1\}$ باشند، در این صورت A, B, C یک افراز روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی هستند.

مثال: مجموعه‌ی اعداد گویا و مجموعه‌ی اعداد اصم یک افراز روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

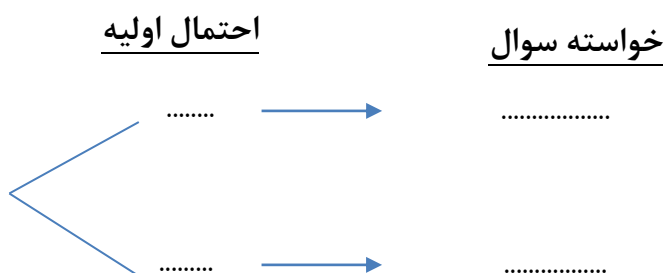
قانون احتمال کل (احتمال های اولیه - ثانویه)

گاهی در تست‌ها، فضای نمونه‌ای به مجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_n افراز می‌شود که هیچ کدام از آن‌ها اشتراکی با هم ندارند و حتماً یکی از آن‌ها رخ می‌دهد. به بیان دیگر فضای نمونه‌ای به پیشامدهای دو به دو ناسازگار تقسیم می‌شود. حال برای به دست آوردن احتمال وقوع پیشامد B که در درون پیشامدهای فوق واقع است، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.



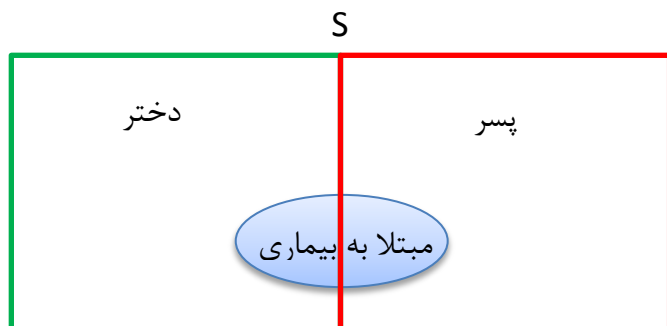
$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$$

روش کنکوری: در این نوع مسائل با دو احتمال سروکار داریم؛ احتمال اولیه و احتمال ثانویه (احتمال ثانویه همان خواسته مسئله است). ابتدا احتمال اولیه و احتمال ثانویه (خواسته سوال) را مشخص کرده و آن‌ها را به صورت درختی در نظر می‌گیریم. سپس احتمال‌های هر شاخه را در هم ضرب کرده و در نهایت احتمال‌های شاخه‌های مختلف را با هم جمع کنیم.



مثال: اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۳۰ باشد و خانواده‌ای قصد بچه‌دار شدن داشته باشد، به چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟

حل:

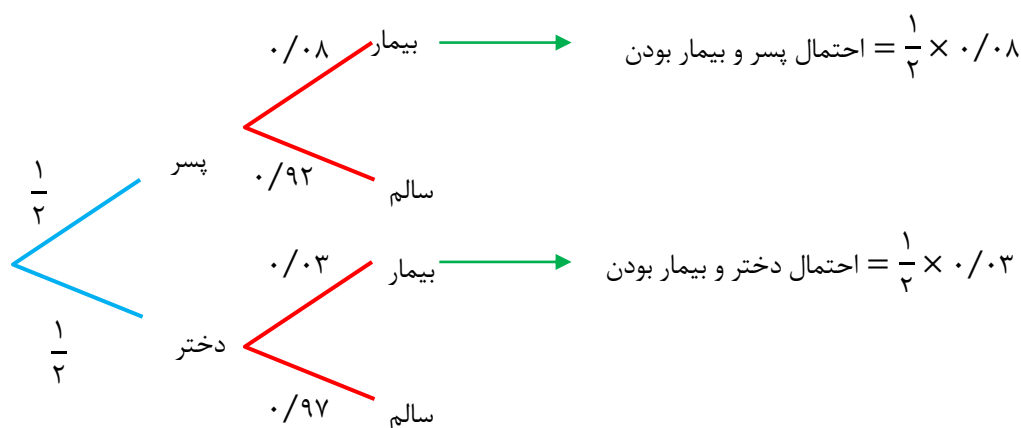


با توجه به قانون احتمال کل خواهیم داشت:

$$p(\text{بیمار بودن}) = p(\text{دختر بودن} | \text{بیمار بودن}) \cdot p(\text{دختر بودن}) + p(\text{پسر بودن} | \text{بیمار بودن}) \cdot p(\text{پسر بودن})$$

$$P(\text{بودن بیمار}) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{30}{100} = \frac{11}{100}$$

روش دوم: استفاده از نمودار درختی

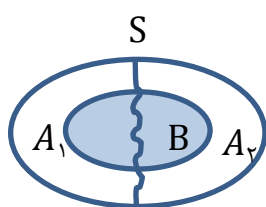


حال اگر شاخه‌هایی را که با وضعیت بیمار ختم می‌شوند، مشخص کنیم و احتمال‌های روی آن شاخه را در هم ضرب و با نتیجه‌ی حاصل از شاخه‌های دیگر جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times 0.8}_{\text{شاخه ی اول}} + \underbrace{\frac{1}{2} \times 0.3}_{\text{شاخه ی دوم}} = 0.55$$

مثال: فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزندان پسر ۰/۱ و به دختر ۰/۰۷ باشد. والدینی که حاصل این نوع بیماری هستند انتظار فرزند را دارند. مطلوب است احتمال آن که این فرزند سالم باشد.

پاسخ:



فرزندى که به دنیا خواهد آمد یا پسر است یا دختر. پس اگر پسر بودن فرزند را

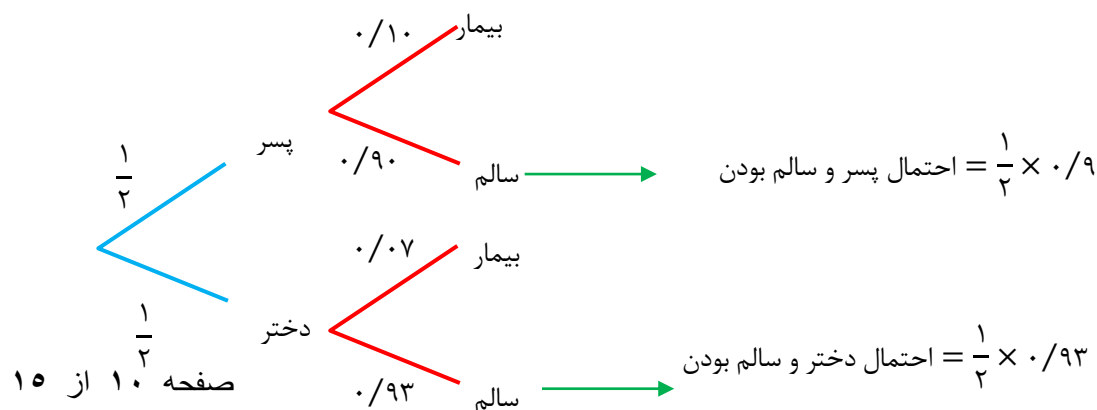
با A_1 و دختر بودن آن را با A_2 نشان دهیم، آن گاه A_1 و A_2 ناسازگارند و حتماً

یکی از آنها رخ خواهد داد. سالم بودن فرزند را با B نشان می‌دهیم. می‌خواهیم $P(B)$

را حساب کنیم. با استفاده از فرمول قانون احتمال کال داریم:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \dots + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{1}{2} \times (1 - 0.1) + \frac{1}{2} (1 - 0.07) \\ = 0.45 + 0.465 = 0.915$$

روش دوم: استفاده از نمودار درختی

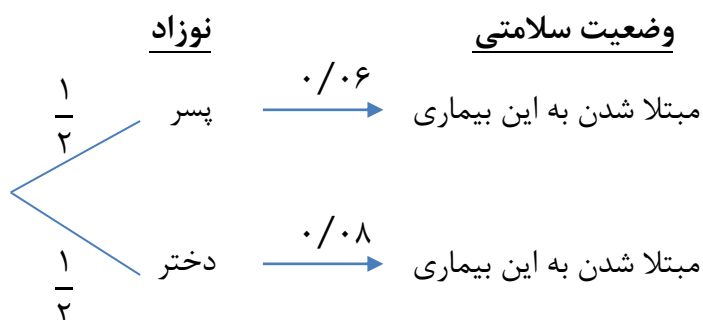


حال اگر شاخه‌هایی را که با وضعیت سالم ختم می‌شوند، مشخص کنیم و احتمال‌های روی آن شاخه را در هم ضرب و با نتیجه‌ی حاصل از شاخه‌های دیگر جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times 0/9}_{\text{شاخه ی اول}} + \underbrace{\frac{1}{2} \times 0/93}_{\text{شاخه ی دوم}} = 0/915$$

مثال: اگر احتمال به دنیا آمدن یک نوزاد پسر مبتلا به نوعی بیماری خاص ۰/۰۶ و همین احتمال برای یک دختر نوزاد ۰/۰۸ باشد. والدینی انتظار فرزندی را دارند با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مورد نظر مبتلا خواهد بود؟

حل) فرزندی که به دنیا می‌آید، یا پسر است یا دختر. از نمودار درختی برای به‌دست آوردن احتمال مورد نظر استفاده می‌کنیم:



$$P(\text{مبتلا شدن به این بیماری}) = \frac{1}{2} \times 0/06 + \frac{1}{2} \times 0/08 = 0/07$$

تست: انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است. با کدام احتمال فرزندی که به دنیا می‌آید این نوع بیماری را ندارد؟ (سراسری تجربی)

$$0/91 \quad (1) \quad 0/92 \quad (2\sqrt{}) \quad 0/93 \quad (3) \quad 0/94 \quad (4)$$

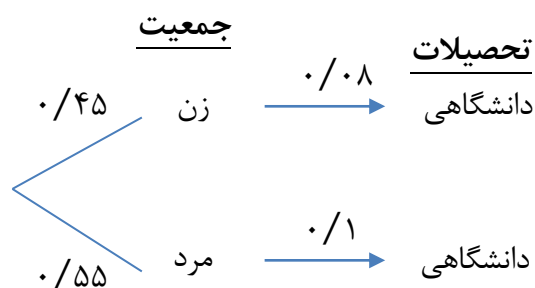
تمرین: در خانواده ای ۶۰ درصد دختران و ۲۴ درصد فرزندان پسر، با هوش به دنیا می‌آیند. احتمال این‌که در این خانواده فرزندی باهوش متولد شود کدام است؟

جواب ۰/۴۲

مثال: ۴۵ درصد جمعیت کشوری را زنان و ۵۵ درصد بقیه را مردان تشکیل می‌دهند. اگر ۸ درصد زنان و ۱۰

درصد مردان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند. چند درصد جمعیت این کشور تحصیلات دانشگاهی دارد؟

حل) نمودار درختی اطلاعات داده شده به صورت زیر می باشد.



$$P = 0.45 \times 0.08 + 0.55 \times 0.1 = 0.091$$

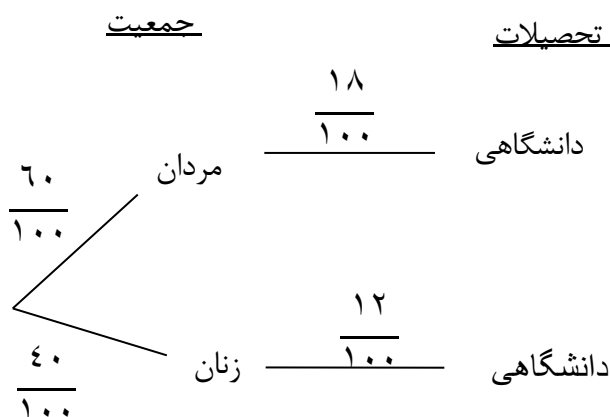
احتمال مورد نظر برابر است با:

بنابر این $0.091 \times 100 = 9.1$ درصد جمعیت این کشور تحصیلات دانشگاهی دارند.

تست: در یک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد آن زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات

دانشگاهی داشته باشند، چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟ (سراسری تجربی داخل ۹۶)

$$16/2(4) \quad 15/8(3) \quad 15/6(2) \quad 15/2(1)$$



$$\text{جواب: } \frac{60}{100} \times \frac{18}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{12}{100} = \frac{156}{1000} \times 100 = 15.6$$

تست: احتمال ابتلا به کم خونی در مردان ۲ درصد و در زنان ۸ درصد است. ۵۵ درصد جامعه‌ای زنان هستند احتمال ابتلای یک فرد به کم خونی کدام است؟

- (۱) ۰/۰۵۱ (۲) ۰/۰۵۲ (۳) ۰/۰۵۳ (۴) ۰/۰۵۴

تست: ۵۵ درصد دانشجویان سال اول دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟ (سراسری تجربی ۸۸ خراج از کشور)

- (۱) ۶۱/۴ (۲) ۶۱/۸ (۳) ۶۲/۴ (۴) ۶۲/۸

تست: در کارخانه ای $\frac{3}{4}$ کارگران مرد و بقیه زن هستند، می‌دانیم $\frac{3}{5}$ کارگران مرد باسواد و $\frac{1}{5}$ کارگران زن نیز باسواد هستند. چند درصد کارگران کارخانه باسوادند؟

- (۱) ۳۰٪ (۲) ۴۰٪ (۳) ۵۰٪ (۴) ۶۰٪

تست: در یک دانشگاه ۱۰ درصد پسران و ۲۰ درصد دختران عضو کتابخانه نیستند و ۴۰ درصد کل دانشجویان را پسران تشکیل می‌دهند، یک دانشجو انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این دانشجو عضو کتابخانه باشد؟

- (۱) ۰/۳۶ (۲) ۰/۴۸ (۳) ۰/۸۴ (۴) ۰/۱۶

تست: احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. $\frac{2}{5}$ کارگران یک کارگاه واکسن

توجه:

جهت تهیه ادامه ی این جزوه (فصل هفتم ریاضی دوازدهم تجربی) به شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ و یا به آیدی تلگرام

@habib_hashemi پیام دهید. (جزوه کامل ۳۵ صفحه می باشد)

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تألیف حبیب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با نوزده سال سابقه تدریس در برگزاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش و پرورش منطقه ۴ تهران و مدرس دانشگاه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا به آیدی تلگرام @habib_hashemi پیام دهید.

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تألیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

تدریس خصوصی و مبحثی ریاضیات

متوسطه

و

تضمینی کنکور

تهران و کرج

موفق بودن در ریاضی ادرصد استعداد و ۹۹ درصد پشتکار

تدریس خصوصی ریاضیات تهران و کرج

متوسطه اول و متوسطه دوم

کنکور - تقویتی

گروهی / انفرادی

به صورت تخصصی و کاملاً مفهومی با جزوه اختصاصی

مشاهده جزوات در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

دبیر رسمی آموزش و پرورش با ۱۹ سال سابقه تدریس

کارشناس ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

مؤلف شش کتاب در زمینه کنکور

نویسنده برتر استان

معلم نمونه شهرستان و استان

نفر اول استان در جشنواره الگوهای برتر تدریس

نفر اول کشور در جشنواره الگوهای برتر تدریس

شماره تماس: ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱