

فصل ۱ درس ۲: احتمال

اهداف درس ۲:

- یادآوری و تکمیل مفاهیم مربوط به آزمایش تصادفی، فضای نمونه ای و پیشامدهای تصادفی
- مشخص کردن پیشامدهای تصادفی در حالت های مختلف و یافتن تعداد اعضای آنها با ابزارهای شمارش
- آشنایی با جبر پیشامدها و اعمال روی پیشامدها و استفاده از آنها در مسائل مربوط به احتمال
- استفاده از جایگشت، تبدیل و ترکیب در حل مسائل احتمال

پدیده ها:

* به آزمایش هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص باشد، آزمایش ها یا پدیده های قطعی می گوئیم.

* به پدیده ها یا آزمایش هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می گویند.

(گاردوگرگلاسی ص ۱۳ و تهرپین ص ۲۵)

کدام یک از پدیده های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟

(الف) وجود دانش آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس پایه دوازدهم؛

(ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، پرتاب سکه ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛

(پ) مشاهده دو مهره سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه ای که در آن ۷ مهره سفید وجود دارد؛

(ت) پیش بینی نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی؛

(ث) در یک بازی بین دو نفر، سکه ای پرتاب می شود و به دنبال آن تاسی انداخته می شود. اگر شخصی سکه اش رو

و تاسش زوج بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می توان نفر برنده را مشخص کرد؟

(تهرپین ص ۲۵)

(الف) نام ۲۰ دانش آموز را روی ۲۰ کارت می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها، به طور تصادفی یک کارت بیرون می کشیم تا نام یکی از دانش آموزها استخراج شود.

(ب) مقداری آب را حرارت می دهیم تا به بخار تبدیل شود. (پ) نتیجه یک آزمون چهارجوابی، که نیمی از سوالات آن را شانسی پاسخ داده ایم.

(ت) در یک بازی ساده دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می دهد.

عددی را انتخاب می کند.

سه واحد به آن عدد می افزاید.

سپس حاصل را دو برابر می کند.

از عدد حاصل ۲ واحد کم می کند.

نتیجه به دست آمده را نصف می کند.

از حاصل به دست آمده، عدد اولیه را کم می کند.

در مرحله آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه کننده پاسخ را اعلام می کند.

فضای نمونای:

* به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می گوئیم .

* همه برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی، مجموعه ای را تشکیل می دهد که به آن فضای نمونه می گوئیم و آن را با حرف S نمایش می دهیم. و تعداد عضوهای آن را با $n(S)$ نشان می دهیم.

مثلا در پرتاب یک تاس، فضای نمونه ای و تعداد آن به صورت زیر است:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$n(S) = 6$$

فضای نمونه ای مهم:

۳. پرتاب یک تاس و یک سکه با هم.

حل: $n(s) = 6^1 \times 2^1 = 12$

$S = \{ (پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶), (ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳), (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶), (پ, ۴) \}$

(گاردور گلاسی ۲ و ۳ هی ۱۵)

② سه دوست با نام های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می نشینند. فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. چگونه می توان تعداد همه برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن، مشخص کرد؟

حل: $n(s) = 3! = 6$

③ در کیسه ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. به طور تصادفی سه مهره را هم زمان از کیسه خارج می کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه این پدیده تصادفی را مشخص کنید.

$3 + 4 + 4 = 11$

حل: $n(s) = \binom{11}{3} = 6$

پیشامد:

* به هر یک از زیرمجموعه های فضای نمونه S یک پیشامد می گوئیم. $(A \subseteq S)$

* هر مجموعه ای زیرمجموعه خودش است و مجموعه تهی زیرمجموعه همه مجموعه ها است

* پیشامد S را پیشامد قطعی (حتمی) و پیشامد تهی \emptyset را پیشامد غیرممکن (نشدنی) می نامیم

* تعداد همه پیشامدهای یک فضای نمونه ای برابر 2^n است.

(گاردور گلاسی هی ۱۵)

① تعداد تمام پیشامدهای مربوط به پرتاب یک سکه را بنویسید

حل: $S = \{ر, پ\} \rightarrow 2^2 = 4 \rightarrow \{ \}, \{ر\}, \{پ\}, \{ر, پ\}$

② بر روی سه کارت نامهای مریم، ملیکا و سوگند را نوشتیم

و داخل کیسه انداختیم. به تصادف یکی از کارتها را خارج

* جنسیت n فرزند: $n(s) = 2^n$

* پرتاب n سکه با هم یا پرتاب n بار یک سکه: $n(s) = 2^n$

* پرتاب n تاس با هم یا پرتاب n بار یک تاس: $n(s) = 6^n$

* در پرتاب m تاس و n سکه: $n(s) = 6^m \times 2^n$

* انتخاب k شیء از n شیء $n(s) = \binom{n}{k}$

* برای نمایش اعضای فضای نمونه ای از نمودار درختی و جدول نیز می توان استفاده کرد.

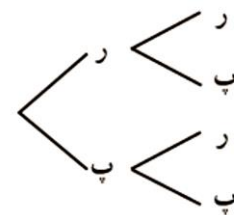
(فعالیت هی ۱۴)

فضای نمونه هر یک از آزمایش های تصادفی زیر را بنویسید.
۱. پرتاب دو سکه باهم.

حل: $n(s) = 2^2 = 4$

$S = \{ (پ, پ), (پ, ر), (ر, پ), (ر, ر) \}$

پرتاب سکه اول پرتاب سکه دوم

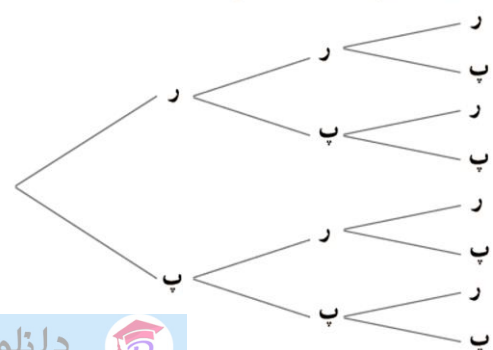


۲. پرتاب سه سکه با هم (پرتاب یک سکه سه بار)

حل: $n(s) = 2^3 = 8$

$S = \{ (پ, پ, پ), (پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر), (ر, پ, پ), (ر, پ, ر), (ر, ر, پ), (ر, ر, ر) \}$

پرتاب اول پرتاب دوم پرتاب سوم



$$\binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 6 \times 4 = 120$$

ب) حداقل ۲ دانش آموز در این گروه پیشتر از دانش آموزان سال یازدهم باشند.

$$\binom{6}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} + \binom{6}{3} = 150$$

(تقریبی ۵ و ۶ ص ۲۵)

۵) هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ می توان نوشت، روی کارت هایی می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها یک کارت را به طور تصادفی خارج می کنیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

۶) خانواده ای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند.

پ) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.

ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشد.

ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

کردیم. تمام زیر مجموعه های یک عضوی و دو عضوی را بنویسید.

$$\text{حل: } S = \{ \text{مریم، ملیکا، سوگند} \} \rightarrow 2^3 = 8$$

زیر مجموعه های یک عضوی:

{مریم}، {ملیکا}، {سوگند}

زیر مجموعه های دو عضوی:

{مریم و ملیکا}، {مریم و سوگند}، {سوگند و ملیکا}

* برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع بپیوندد.

۳) تاسی را پرتاب می کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود، کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده اند؟

الف) {۳ و ۲ و ۵} ب) {۲} پ) {۲ و ۴ و ۶}

حل: هر سه زیر برآمد ۲ در همه مجموعه ها هست.

* تعداد اعضای پیشامد تصادفی A را با n(A) و B را با n(B) و ...

نمایش می دهیم. (ص ۹۷)

۴) دو تاس را پرتاب می کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

$$\text{حل: } n(s) = 6^2 = 36 \quad \text{تعداد پیشامدهای دو تاس}$$

الف) اعداد رو شده از دو تاس مانند هم باشد.

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \rightarrow n(A) = 6$$

ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر با ۷ باشد.

$$B = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \rightarrow n(B) = 6$$

پ) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشد.

ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ باشد.

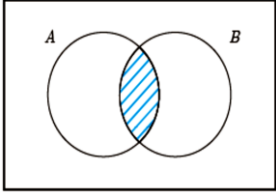
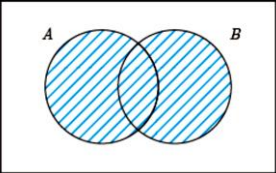
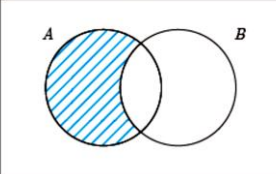
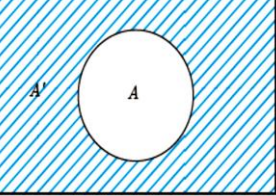
۵) در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانش آموز سال دهم، ۶ دانش آموز سال یازدهم و ۴ دانش آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشتر از ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) سه نفر دانش آموز پیشتر از سه پایه مختلف باشند.

حل:

اعمال روی پیشامدها:

پیشامدها از نوع مجموعه ها هستند پس از قوانین مجموعه ها استفاده می کنیم.

نمودار ون	نماد ریاضی و مجموعه ای	بیان توصیفی
	$A \cap B = \{x \in S / x \in A \wedge x \in B\}$ نماد \wedge به معنی "و" میباشد	اشتراک دو پیشامد وقتی رخ می دهد که پیشامدهای A و B رخ دهند
	$A \cup B = \{x \in S / x \in A \vee x \in B\}$ نماد \vee به معنی "یا" میباشد	اجتماع دو پیشامد وقتی رخ می دهد که پیشامدهای A یا B (حداقل یکی از پیشامدها) رخ دهند
	$A - B = \{x \in S / x \in A \wedge x \notin B\}$	تفاضل دو پیشامد وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ بدهد و پیشامد B رخ ندهد.
	$A' = \{x \in S / x \notin A\}$	متمم یک پیشامد وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ ندهد. $* A \cup A' = S$ $* A \cap A' = \phi$

حرف "و" یعنی اشتراک:

$$A \cap B = \{(1, 5), (5, 1)\}$$

ب) دو تاس یکسان یا مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۴ باشد.

(مثال ص ۱۷)

دو تاس را پرتاب می کنیم؛ هریک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

الف) یکی از تاس ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد.

حل:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6) \end{array} \right\}$$

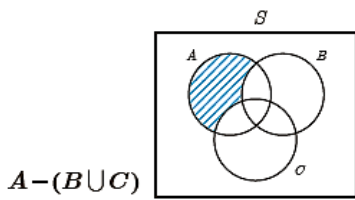
$$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

(گاردو کلاسی ۱۸ ص)

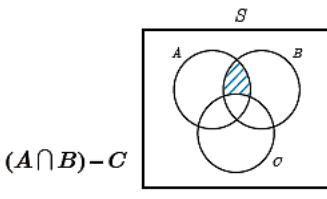
ت) پیشامدهای $(A \cap B)$ ، $(A - B)$ را با اعضا مشخص کنید.

(گاردو کلاسی ۲ ص ۱۸)

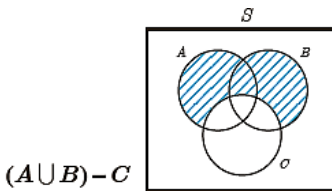
② فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه ای S باشند، با توجه به نمودار ون داده شده هر یک از عبارتهای زیر را هاشور بزنید سپس، عبارت مجموعه ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید. حل:



الف) فقط پیشامد A و پیشامدهای B یا C رخ ندهد.



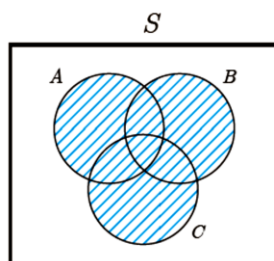
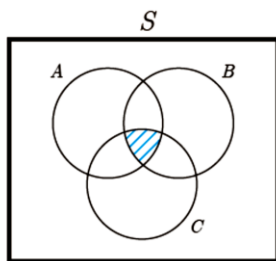
ب) پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



ج) پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.

(تقریبی ۴ ص ۲۵)

④ برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه ای بنویسید.



① تاسی را پرتاب می کنیم؛ هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

الف) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اول باشد.

ب) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد.

ج) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد.

د) پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد.

ه) پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.

(تقریبی ۳ و ۴ ص ۲۵)

② سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن گاه تاس را می ریزیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می اندازیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

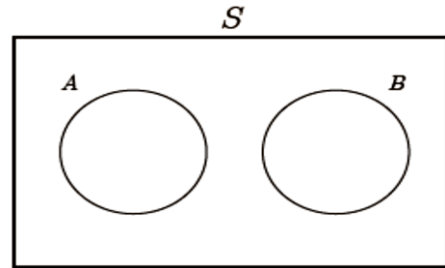
ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

③ هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک تر از ۲۰ را روی یک کارت می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها به طور تصادفی یک کارت را برمی داریم؛ مطلوب است تعیین: الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

پیشامد ناسازگار:

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S و $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت A و B را دو پیشامد ناسازگار می نامیم.



مثلا در پرتاب یک تاس پیشامدهای زوج آمدن و فرد آمدن، ناسازگارند.

* دو پیشامد ناسازگار هیچگاه با هم رخ نمی دهند.

$$\left. \begin{array}{l} A - B = A \\ B - A = B \end{array} \right\} \rightarrow A \cap B = \emptyset$$

* پیشامد تصادفی A و متمم آن (A') ، دو پیشامد ناسازگارند زیرا: $A \cap A' = \emptyset$

(گاردور گلایی ۳ و ۴ ص ۱۸)

③ خانواده ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید. حل:

الف) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند.

$$A = \{(د، د، د)، (پ، پ، پ)\}$$

ب) پیشامد B اینکه دو فرزند پسر و یک فرزند دختر باشند.

$$B = \{(پ، د، پ)، (د، پ، پ)، (پ، پ، د)\}$$

ج) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند دختر باشند.

$$C = \{(د، د، د)، (د، د، پ)، (د، پ، د)، (پ، د، د)\}$$

با توجه به A, B, C پاسخ دهید:

آیا پیشامدهای A, B ناسازگارند؟ بله زیرا $A \cap B = \emptyset$

آیا پیشامدهای B, C ناسازگارند؟ بله زیرا $B \cap C = \emptyset$

آیا پیشامدهای A, C ناسازگارند؟ خیر

② دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی را بنویسید.

حل: یعنی دو پیشامد بنویسیم که اشتراکشان تهی باشد. مثل: در پرتاب تاس پیشامد آمدن عدد زوج و پیشامد آمدن عدد فرد

(تهرینی ۷ ص ۲۶)

⑦ خانواده ای دارای ۴ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A را مشخص کنید؛ طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

پ) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد.

ت) آیا پیشامدهای A, C ناسازگارند؟

احتمال:

برای به دست آوردن احتمال وقوع پیشامد **A** از رابطه ی زیر استفاده می کنیم:

$$\text{احتمال وقوع یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد پیشامد}}{\text{تعداد فضای نمونه ای}}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

* جوابی که به دست می آورید حتماً باید بین صفر و یک باشد بنابراین برای هر پیشامد **A** داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

پیشامد قطعی (حتمی) ↘

پیشامد غیر ممکن (نشدنی) ↙

(مثل عدد کوچکتر از ۶ در

در پرتاب یک تاس)

پرتاب یک تاس)

پرتاب یک تاس)

$$P(S) = 1 \text{ * (قطعی)}$$

$$P(\emptyset) = 0 \text{ * (غیر ممکن)}$$

(فعالیت او ۳ و ۲ ص ۱۹)

① چنانکه پیشامد **A** نشدنی باشد یعنی $A = \emptyset$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید. حل:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \xrightarrow{A=\emptyset} \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

② چنانکه پیشامد **A** حتمی باشد یعنی $A = S$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید. حل:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \xrightarrow{A=S} \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

③ جاهای خالی را پر کنید. حل:

$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

* برای حل مسائل احتمال باید دو مرحله را به ترتیب طی کنیم:

۱. پیدا کردن تعداد فضای نمونه = مخرج کسر

۲. پیدا کردن تعداد پیشامد = صورت کسر

(گارد در کلاسی ۱ ص ۲۰)

① یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم. مطلوب است

الف) احتمال این که تاس زوج بیاید.

حل:

$$S = \{ (۱,ر), (۲,ر), (۳,ر), (۴,ر), (۵,ر), (۶,ر), (۱,پ), (۲,پ), (۳,پ), (۴,پ), (۵,پ), (۶,پ) \} \rightarrow n(S) = ۱۲$$

$$A = \{ (۲,ر), (۴,ر), (۶,ر), (۲,پ), (۴,پ), (۶,پ) \} \rightarrow n(A) = ۶$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

ب) احتمال این که سکه پشت بیاید.

حل:

$$S = \{ (۱,ر), (۲,ر), (۳,ر), (۴,ر), (۵,ر), (۶,ر), (۱,پ), (۲,پ), (۳,پ), (۴,پ), (۵,پ), (۶,پ) \} \rightarrow n(S) = ۱۲$$

$$B = \{ (۱,پ), (۲,پ), (۳,پ), (۴,پ), (۵,پ), (۶,پ) \} \rightarrow n(B) = ۶$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

ج) احتمال این که تاس زوج یا سکه رو بیاید.

حل:

$$S = \{ (۱,ر), (۲,ر), (۳,ر), (۴,ر), (۵,ر), (۶,ر), (۱,پ), (۲,پ), (۳,پ), (۴,پ), (۵,پ), (۶,پ) \} \rightarrow n(S) = ۱۲$$

{ (۲,ر), (۴,ر), (۶,ر), (۲,پ), (۴,پ), (۶,پ) } تاس زوج

{ (۱,ر), (۲,ر), (۳,ر), (۴,ر), (۵,ر), (۶,ر) } سکه رو

تاس زوج یا سکه رو:

* برای حل مسائل تاریخ تولد از روش پر کردن خانه ها کمک می گیریم.

(گاردوگر گلابی ۲ ص ۲۰)

② یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند.
 ب) هر سال ۱۲ ماه است پس برای هر کدام ۱۲ حالت وجود دارد.

$$\frac{12}{12} \times \frac{12}{12} \times \frac{12}{12} \times \frac{12}{12} \times \frac{12}{12} = n(S) = 12^5$$

هر کدام فقط یک انتخاب دارند آن هم ماه فروردین است.

$$\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = n(A) = 1$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{12^5}$$

در نتیجه:

ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند.
 حل: اولی ۱۲ انتخاب دارد چون نمی دانیم در چه ماهی به دنیا آمده ولی نفرات بعدی یک انتخاب دارند چون ماه تولدشان با نفر اول یکسان است

$$\frac{12}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = n(B) = 12$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{12^5} = \frac{1}{12^4}$$

در نتیجه:

پ) تولد هیچ دو تای آنها در یک ماه نباشد.

حل: اولی ۱۲ انتخاب دارد و دومی ۱۱ انتخاب چون نمی تواند ماه تولدش با نفر اول یکسان باشد و سومی ۱۰ انتخاب و ...

$$n(C) = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12}$$

در نتیجه:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^5} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^4}$$

$$C \{ (1,ر), (2,ر), (3,ر), (4,ر), (5,ر), (6,ر), (2,پ), (4,پ), (6,پ) \}$$

$$\rightarrow n(C) = 9$$

$$P(B) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

د) احتمال این که تاس فرد و سکه پشت بیاید.

حل:

$$S = \{ (1,ر), (2,ر), (3,ر), (4,ر), (5,ر), (6,ر), (1,پ), (2,پ), (3,پ), (4,پ), (5,پ), (6,پ) \} \rightarrow n(S) = 12$$

$$\text{تاس فرد} \{ (1,ر), (3,ر), (5,ر), (1,پ), (3,پ), (5,پ) \}$$

$$\text{سکه پشت} \{ (1,پ), (2,پ), (3,پ), (4,پ), (5,پ), (6,پ) \}$$

$$\text{تاس فرد و سکه پشت} \{ (1,پ), (3,پ), (5,پ) \} \rightarrow n(D) = 3$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

(تمرین ۹ ص ۲۶)

عقربه دستگاه چرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می ایستد و عددی را نشان می دهد. چقدر احتمال دارد که:



الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.

ب) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.

*جدول مجموع اعداد روشده در پرتاب دو تاس:

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد پیشامد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱
احتمال	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

✓حل:

شماره های غیر اول $\{۱, ۴, ۶\}$ مکان های زوج $\{۲, ۴, ۶\}$

۳ پرچم غیر اول ۴ پرچم باقی مانده

در ۳ مکان زوج در ۴ مکان باقی مانده

$$\left. \begin{array}{l} n(B) = 3! \times 4! \\ n(S) = 7! \end{array} \right\} \rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3! \times 4!}{7!} = \frac{1}{35}$$

⑪ یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه شما به طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می گیرند تا عکسی یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

(گارد گلایسی ۳ هی ۲۱)

*طبق جدول $n(S) = 36$ و بیشترین تعداد پیشامد مربوط به مجموع دو تاس ۷ و کمترین آن مربوط به ۲ و ۱۲ است.

مثال: در پرتاب دو تاس احتمال آنکه مجموع دو تاس برابر ۴ باشد چیست؟

✓حل: بدون استفاده از جدول

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$n(A) = 3 \rightarrow \{(3,1), (1,3), (2,2)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

✓حل: با استفاده از جدول

اگر مجموع دو تاس ۴ باشد، تعداد پیشامد ۳ است و احتمال آن

$$\left(\frac{3}{36} = \frac{1}{12} \right) \text{ می باشد}$$

* حل مسائل احتمال به کمک ترتیب و ترکیب

(تهرینی ۱۰ و ۱۱ هی ۲۶)

(مثال هی ۲۳ قسمت ب، پ، ت)

در یک فروشگاه ورزشی ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت آویز قرار دارند. شخصی درخواست می کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد.

⑩ ۷ پرچم مختلف را به هفت میله پرچم نصب کرده ایم و روی میله ها شماره های ۱ تا ۷ را حک کرده ایم. چنانچه این پرچم ها به طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه میله پرچم ها با شماره های غیر اول در مکان های زوج باشند.

ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه دار باشد.
 حل:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{17}{3}} = \frac{66 \times 5}{680} = \frac{330}{680}$$

پ) تعداد سیب های سالم از تعداد سیب های لکه دار بیشتر باشد.

حل:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{\binom{12}{3} + \binom{12}{2} \binom{5}{1}}{\binom{17}{3}} = \frac{220 + 330}{680} = \frac{550}{680}$$

12) در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می گیرند و پس از نشان دار کردن، رهایشان می کنند. بعد از مدتی، محیط بانان به طور تصادفی ۷ تا از آنها را می گیرند و می خواهند تعداد قوچ های نشان دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشانه دار باشند.

ب) احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن متفاوت باشد، محاسبه کنید.

پ) احتمال این را که حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند، محاسبه کنید.

ت) احتمال این را که حداکثر ۲ پیراهن آبی باشند، محاسبه کنید.

(تمرین ۸ و ۱۲ و ۱۳ و ۲۶ و ۲۷)

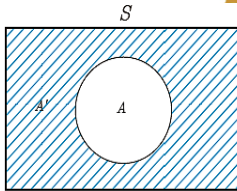
8) از جعبه ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه دار است، ۳ سیب را به طور تصادفی برمی داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر سه سیب سالم باشند.

حل:

$$n(S) = \binom{12+5}{3} = \binom{17}{3}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{17}{3}} = \frac{220}{680}$$



پیشامد متمم:

$P(A) \rightarrow$ احتمال واقع شدن پیشامد A

$P(A') \rightarrow$ احتمال واقع نشدن پیشامد A

$$P(A) + P(A') = 1 \rightarrow \begin{cases} P(A) = 1 - P(A') \\ P(A') = 1 - P(A) \end{cases}$$

(گاردور گلاسی ص ۲۳)

① احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با $\frac{1}{10}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد.

$$\text{حل: } P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

② احتمال اینکه کیارش فردا به مدرسه نرود برابر با $0/01$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا کیارش به مدرسه برود.

③ احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{32}{49}$ است، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند.

(مثال ص ۲۳ قسمت ۵)

در یک فروشگاه ورزشی ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت آویز قرار دارند. شخصی درخواست می کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد. احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن آبی نباشد، محاسبه کنید.

⑬ انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده اند. از بین آنها به طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه: الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند. ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

* برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S ، همواره تساوی زیر برقرار است:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

* اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، این تساوی به صورت زیر نوشته می شود:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(مثال ص ۲۳ قسمت الف)

در یک فروشگاه ورزشی ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت آویز قرار دارند. شخصی درخواست می کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد. احتمال این را که ۳ پیراهن از یک رنگ باشند، محاسبه کنید.