زندگی به یک مسابقه ی عظیم دوچرخه سواری می ماند که هدف اش زیستن سرنوشت شخصی هر کس است. در خط آغاز همه کنار هم و در شور و رفاقت شریک هستیم. اما هر چه مسابقه ادامه میابد شعف اولیه جایش را به مبارزه تن دهند: هنوز در در مسابقه حضور دارند، اما تنها به خاطر آن که نمی توانند وسط یک جاده بمانند در کنار اتومبیل پشتیبان حرکت می کنند. با هم صحبت می کنند و وظیفه شان را انجام می دهند، می بینیم که مدام از آن ها دور می شویم و بعد ناچار می شویم با تنهایی، با غافلگیری های پشت هر پیچ و مشکلات دوچرخه شویم. سرانجام از خود می پرسیم آیا ارزش اش را دارد؟ بله ارزش اش را دارد، تسلیم نشوید، اما...

تصور کنید بانکی دارید که در آن هر روز ٨٦٤٠٠ تومان به حسابتان واریز می شود و تا آخر شب فرصت دارید تا همه پول ها را خرج کنید، چون آخر وقت حساب خود به خود خالی می شود در این صورت چه خواهید کرد؟ البته سعی می کنید تا آخرین ریال را خرج کنید هر کدام از ما یک چنین بانکی داریم: بانک زمان، هر روز صبح، در بانک زمان شما ٨٦٤٠٠ ثانیه اعتبار ریخته می شود که و در آخر شب این اعتبار به پایان می رسد. هیچ برگشتی نیست و هیچ مقداری از این به فردا اضافه نمی شود هر لحظه گنج بزرگی است، گنجتان را مفت از دست ندهید. زمان به خاطر هیچ کس منتظر نمی ماند... دیروز به تاریخ پیوست، فردا معما است و امروز هدیه است.

برگرفته از کتاب مکتوب اثر پائلو کوئلیو

این مجموعه یکی از بهترین منابع برای دوران امتحانات نهایی دانش آموزان می باشد و از ویژگی های ارزشمند آن علاوه بر کسب آمادگی لازم برای امتحانات توجه به پیش نیاز های لازم در درس ریاضی باشد.

در بخش بعدی این جزوه که مختص تمامی دانش آموزان کنکور ی می باشدسعی شده است با توجه به ضعف اکثر دانش آموزان در درس ریاضی تمامی پیش نیاز ها گفته شود با ارائه ی تست و درس نامه های کامل و روش های تستی و کاملا ابتکاری فردی درصد بالای در درس ریاضی کنکور سراسری برای شما ساده ساز است.

می توانید بیش از ۹۰٪ رقیبان کنکور خود را با همین درس پشت سر بگذارید.

جدول بارم بدون امتحان نهایی	
فصل اول	۷/۵ نمره
فصل دوم	۷/۵ نمره
فصل سوم	۵ نمره

فصل اول: زوج مرتب و تابع

زوج مرتب به هر دو شی که برای آن ها ترکیبی قایل شویم که کدام اول و کدام دوم باشد، یک زوج مرتب می گوییم.

در صورتی که به این شی دو عدد نسبت دهیم و آن ها را X و Y بنامیم. در زوج مرتب (X،Y) به X عضو اول (مولفه ی اول) و به Y عضو دوم(مولفه ی دوم) می وییم. هر زوج مرتب نمایش یک نقطه در صفحه می باشد. مثلا منظور از نقطه ی (۳, ۲) A نقطه ای است که طول آن برابر ۲ و عرض آن برابر ۳ می باشد.

☐ تذکر: مجموعه های {۵, ۳} و {۳, ۵} با هم مساوی اند ولی زوج مرتب های (۵ , ۳) و (۳ , ۵) یکسان نیستند.

نکته: دو زوج مرتب را وقتی مساوی گوییم که مولفه های اول آن ها با هم و مولفه های دوم آن ها نیز با هم برابر باشند.

$$(x , y) = (z , t) = \begin{cases} x = z \\ y = t \end{cases}$$

مثال ۱:	
اگر دو زوج مرتب (۳x + ۱ ,۴) و (۲x − ۷ , ۵y − ۳) با هم برابر باشند، x و y را به دست آورید. ✓ پاسخ: مولفه ی اول زوج ها با هم و مولفه ی دوم هم با هم مساوی اند. لذا خواهیم داشت: ۳x+۱=۲x-۷⇒۳x-۲x= -۷-۱⇒ x= -۸ ۵y-۳=۴⇒۵y =۴+۳ ⇒ ۵y=۷⇒y= ۷/۵	

تعریف تابع از لحاظ زوج مرتب

یک تابع مجموعه ای از زوج های مرتب است که درآن، هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مولفه های اول مساوی نباشند.

توجه: طبق تعریف تابع، اگر در تابعی دو زوج مرتب، مولفه های اول مساوی داشته باشند، مولفه های دوم آن ها نیز باید برابر باشند.

مثال: رابطه ی $f = \{(\sqrt{۲} , ۴),(۳،۷),(\sqrt{۳} ,۹)\}$ بیان گر یک تابع است، چون مولفه های اول همگی با هم متفاوتند ولی رابطه ی $g = \{(۳،۹),(۴،۶).(۳،۷)\}$ معرف یک تابع نمی باشد؛ چون ملاحظه می شود که زوج مرتب های (۷،۳) و (۹،۳) دارای مولفه های اول برابر هستند ولی مولفه ی دوم آن ها یکسان نیست.

مثال ۲:	
اگر مجموعه ی $A = \{(۱,a+b),(۲,a-b),(۱،۳),(۲،۵)\}$ بیان گر یک تابع باشد a و b را به دست آورید.	

✓ پاسخ: در زوج مرتب های (۱,a+b) و (۳،۱) عضو های اول مساوی اند لذا برای این که مجموعه A تابع باشد عضو های دومشان هم باید مساوی باشند. یعنی ۳ =a+b

مطلب فوق درمورد زوج های (۲,a-b) و (۵, ۲) نیز برقرار است. یعنی: ۵ =a+b ، با حل دو معادله ی به دست آمده در یک دستگاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a+b=۳ \\ a-b=۵ \end{cases}$$

⇒۲a = ۸ ⇒ a = ۴

a+ b = ۳ $\xrightarrow{(a=۴)}$ ۴+b=۳ ⟹b=۳-۴= -۱

ضابطه ی(قانون) تابع

درسنامه ی قبل، تابع را از نظر زوج مرتب بیان نموده است، حال تعریف جامع تری را برای تابع به صورت زیر بیان می کنیم:

تابع: رابطه ای بر حسب x و y را تابع گوییم هر گاه برای هر مقدار دلخواه x، یک و فقط یک مقدار برای y به دست آید که آن را به صورت y=f(x) نمایش می دهیم. در این رابطه x متغیر مستقل است و چون مقدار y به مقدار x بستگی دارد. y متغیر وابسته می باشد.

مثال ۳:	

تابع بودن زیر را بررسی کنید.

الف) $y^۲ = ۲x + ۱$

الف) $y^۲ = ۲x + ۱ \qquad x=۰ \Rightarrow y^۴=۱ \Rightarrow y = \pm \sqrt[۴]{۱} = ۱$

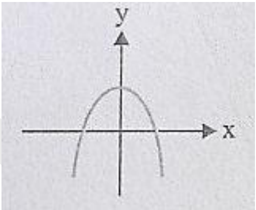
چون برای (x=۰) دو مقدار برای y به دست آمده است لذا رابطه ی داده شده معرف یک تابع نمی باشد. معمولا روابطی که در آن ها توان زوج داشته باشد یا y داخل قدر مطلق باشد تابع نمی باشند(ولی برای اطمینان باید مانند مثال های ذکر شده، آن ها را بررسی کنیم).

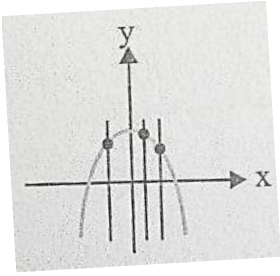
تشخیص تابع از روی نمودار

نمودار یک رابطه وقتی تابع می باشد که هر خط عمودی(موازی محور y ها) نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.(یعنی هر خط موازی محور y ها، یا نمودار را قطع نکند و یا فقط در یک نقطه قطع کند).

مثال ۴:	

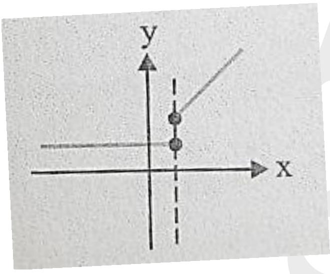
کدام یک نمودار های زیر، بیانگر یک تابع است؟

الف) 

ب) 

پاسخ: نمودار "الف" نمایش یک تابع است، زیرا هر خط عمودی دلخواه که رسم کنیم این نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می کند:

نمودار "ب" تابع نیست، زیرا مطابق شکل زیر، خطی عمودی وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می کند:



دامنه و برد تابع

دامنه ی تابع(حوزه ی تعریف): دامنه ی تابع: مجموعه ی مقادیری است که اگر به جای x قرار دهیم. مقدار y عددی حقیقی شده و نامعین نشود. مجموعه ی این مقادیر را با D_f نشان می دهیم. به عبارت دیگر، دامنه ی تابع، مجموعه ی مقادیری است که یک متغیر مستقل می تواند داشته باشد.

برد تابع(حوزه ی مقادیر): برد تابع: مجموعه ی مقادیری است که به ازای x های دامنه برای y به دست می آید و آن را با R_f نمایش می دهیم. به عبارت دیگر، برد یک تابع، مجموعه ی مقادیری است که یک متغیر وابسته می تواند داشته باشد.

تذکر: اگر تابع بع صورت زوج های مرتب نمایش داده شده باشد، آن گاه مجموعه ی همه ی مولفه های اول را دامنه و مجموعه ی تمام مولفه های دوم را برد تابع می گوییم.

مثال ۵:	

دامنه و برد تابع $f = \{(-۱،۷),(۰،۶),(۴،۷)\}$ را بنویسید.

✓ پاسخ: $D_f = \{-۱ , ۰ , ۴\}$ این دامنه(حوزه ی تعریف)

$R_f = \{۷،۶،۷\} = \{۷،۶\}$ برد(حوزه ی مقادیر)

۱) تعیین دامنه ی توابع چند جمله ای

دامنه ی توابع چند جمله ای به فرم $f(x)=ax^n+ bx^{n-۱}+...+L$ و $(n\in N)$ برابرR (اعداد حقیقی) می باشد. به عبارت دیگر این توابع به ازای هر x دلخواه از اعداد حقیقی تعریف شده اند و مقداری که برای y به دست می آید معین می باشد.

۲) تعیین دامنه ی توابع کسری

دامنه ی توابع کسری برابر است با تمام اعداد حقیقی R به جز اعدادی که مخرج کسر را صفر می کنند، زیرا اگر مخرج کسر صفر باشد، آن کسر تعریف نشده است. پس اگر f تابعی کسری باشد، می توان نوشت:

D_f=R-{ریشه(های) مخرج کسر}

مثال ۶:	

دامنه ی تعریف توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = ۴x^{۲}-۵x+۶$ ب) $g(x) = \frac{۲x-۷}{۴-۸x}$

✓ پاسخ: الف) تابع $f(x)$ یک چند جمله ای می باشد.(زیرا متغیر x توان منفی و کسری ندارد و در ضمن x در مخرج کسر و یا زیر رادیکال قرار ندارد) لذا دامنه ی تابع f برابر مجموعه ی اعداد حقیقی است. یعنی برای هر مقدار دلخواه از R حتما جوابی معین برای y به دست می آید.

D_f=R- {ریشه (های) مخرج کسر}

ب) تابع $g(x)$ کسری است، لذا مخرج را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$۴-۸x=۰ \Rightarrow -۸x=-۴ \Rightarrow x=\frac{-۴}{-۸}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow D_g R - \{\frac{۱}{۲}\}$$

به عبارت دیگر اگر $x=\frac{۱}{۲}$ باشد، تابع $g(x)$ تعریف نشده است و اگر x هر عددی به غیر از باشد، حتما جوابی برای $g(x)$ به دست می اید.

برای توابع رادیکالی دو حالت در نظر می گیریم:

حالت اول: برای تعیین دامنه ی توابع رادیکالی با فرجه ی فرد می توانیم از رادیکال صرف نظر کرده و دامنه ی عبارت زیر رادیکال را به دست آوریم. به عبارت دیگر رادیکال با فرجه ی فرد، تاثیری در محاسبه ی دامنه ندارد.

- مثال: دامه ی تعریف تابع $y=\sqrt[۵]{x^{۳}-۲x}$ برابر R است؛ زیرا با صرفنظر کردن از رادیکال با فرجه ی فرد(عدد ۵)، یک چند جمله ای به صورت $x^{۳}-x$ باقی می ماند و می دانیم دامه ی تعریف چند جمله ای ها برابر R است.

حالت دوم: برای تعیین دامنه ی توابع رادیکالی با فرجه ی زوج، عبارت زیر رادیکال را بزرگ تر یا مساوی صفر قرار می دهیم؛ زیرا اگر فرجه ی رادیکال زوج باشد، عبارت زیر رادیکال نباید منفی باشد.

مثال ۷:

دامنه ی تابع $y=\sqrt{۲x-۳۶}$ را محاسبه کنید.

✓ پاسخ: چون فرجه ی رادیکال زوج است(عدد ۲)، برای یافتن دامنه ی تابع، کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگ تر یا مساوی صفر قرار دهیم. پس می توان نوشت:

$۲x-۳۶ \geq ۰ \Rightarrow ۲x \geq ۳۶ \xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر عدد ۲}} x \geq ۱۸ \Rightarrow D_y = \{x \mid x \geq ۱۸\}$

تذکر: اگر رادیکال با فرجه زوج در مخرج کسری بود آن را فقط بزرگتر از صفر قرار می دهیم.

به دست آوردن ضابطه ی تابع از روی جدول(زوج مرتب)

گاهی اوقات یک تابع به صورت جدول و یا مجموعه ای از زوج مرتب ها داده می شود. در این صورت برای به دست آوردن فرمول(ضابطه ی) تابع باید رابطه ای بین x و y (دامنه و برد) پیدا کنیم. به عبارت دیگر باید مشخص کیم که روی مولفه ی اول (x) چه تغییراتی باید انجام دهیم تا به مولفه ی دوم(y) برسیم.

مثال ۸:

یک ضابطه(فرمول) برای تابع f به دست آورید.

$F=\{(۱،۱),(۲,\frac{۱}{۲}),(-۳,-\frac{۱}{۳})\}$

✓ پاسخ: ملاحظه می شود که مولفه های دوم (y)، از معکوس کردن مولفه های اول (x) به دست آمده اند، پس ضابطه ی این تابع به صورت $y=\frac{۱}{x}$ می باشد و دامنه ی آن عبارت است از: {۳-, ۲, ۱}

مثال ۹:

برای تابع f که به صورت زیر ارائه شدن یک ضابطه تعیین کنید.

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	۳	۹	۲۷	۸۱

✓ پاسخ: اگر عدد ۳ را به توان هر یک از اعداد ردیف بالا برسانیم، اعداد ردیف پایین به دست می آند. پس ضابطه ی تابع فوق به صورت $y=۳^x$ می باشد. به عنوان مثال:

$$\begin{cases} x = ۰ \Rightarrow ۳^x = ۳^۰ = ۱ = y \\ x = ۱ \Rightarrow ۳^x = ۳^۱ = ۳ = y \\ x = ۲ \Rightarrow ۳^x = ۳^۲ = ۹ = y \end{cases}$$

مقدار تابع در یک نقطه

۱) اگر ضابطه ی یک تابع به صورت y=f(x) را داشته باشیم و بخواهیم مقدار آن را در نقطه ی x=a محاسبه کنیم کافی است در ضابطه ی تابع به جای تمامی xها عدد a را قرار دهیم. مقدار تابع f در نقطه ی f در نقطه ی a را با نماد f(a) نشان می دهیم.

☐ مثال: در تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ + ۹}$ مقدار تابع در نقطه ی x=۲ عبارت است از:

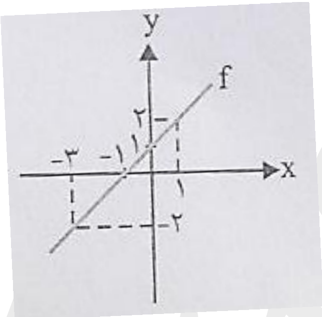
$F(۴)=\sqrt{۴^۲ + ۹}= \sqrt{۲۵} = ۵$

۲) گاهی اوقات به جای ضابطه، تابع را به صورت مجموعه ای از زوج مرتب ها در اختیار داریم. مثلا تابع {(۹،۲), (۲۰،۸) , (۷،۱)} =f را در نظر بگیرید، می گوییم مقدار تابع f در نقطه ی ۱ برابر ۷ است و می نویسیم f(۱)=۷. به همین ترتیب خواهیم داشت f(۲)=۹و f(۸) = ۲۰ .

۳) اگر نمودار یک تابع را داشته باشیم و مقدار تابع در یک نقطه مطلوب باشد، کافی است عرض آن نقطه را روی نمودار مشخص کنیم.

☐ مثال: نمودار تابع f را در نظر می گیریم. از رو شکل مشاهده می شود که عرض نقطه ی x=۱ برابر با ۲ است. پس می توان نوشت: f(۱)=۲.

به همین ترتیب خواهیم داشت: f(-۳)=-۱ و f(۰)=۱.



محاسبه ی ضریب زاویه ی (شیب)یک خط

به دست آوردن ضریب زاوایه ی (شیب) یک خط با معلوم بودن دو نقطه ی آن

اگر مختصات دو نقطه ی دلخواه از یک خط را داشته باشیم. م یتوانیم شیب یا ضریب زاویه ی خط را محاسبه کنیم. فرض کنید نقاط $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ با ما داده شده باشد، شیب خطی که از نقاط A و B می گذرد برابر است با:

$$\boxed{\text{شیب خط AB} = m_{AB} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}}$$

به مقدار $y_۲ - y_۱$ "خیز" و به مقدار $x_۲ - x_۱$ "رفت" گفته می شود،

$m_{AB} = \frac{\text{مقدار خیز}}{\text{مقدار رفت}}$ هم می توان تعریف کرد.

مثال۱۰:

ضریب زاویه ی خطی را که از نقاط A(۵,-۳) و A(-۳،۴) می گذرد به دست آورده و مقدار رفت و خیز را مشخص کنید.

✓ پاسخ:

$$\left[A\left|\begin{matrix}۵\to x_{۲}\\ ۳\to y_{۲}\end{matrix}\right. \quad B\left|\begin{matrix}-۳\to x_{۲}\\ ۴\to y_{۲}\end{matrix}\right.\right]\Rightarrow m_{AB}=\frac{y_{۲}-y_{۱}}{x_{۲}-x_{۱}}=\frac{۴-(-۳)}{-۳-۵}=\frac{۷}{-۸}=\frac{-۷}{۸}$$

با توجه به مقدار شیب خط گذرنده از نقاط A و B، ملاحظه می شود که مقدار "رفت" برابر ۸ و مقدار "خیز" برابر ۷- می باشد.(علامت منفی را می توانیم همیشه برای صورت در نظر بگیریم.)

تذکر: ار مقدار شیب برابر عددی صحیح شود برای پیدا کردن مقدار "خیز" و " رفت" می توانیم به آن عدد، مخرج ۱ بدهیم.

مثلا اگر شیب خطی m=+۵ باشد، آن را به صورت $m=\frac{۵}{۱}$ در نظر می گیریم. پس مقدار "رفت" برابر ۱+ و مقدار "خیز" برابر ۵+ است.

به دست آوردن ضریب زاویه ی یک خط از روی معادله ی آن

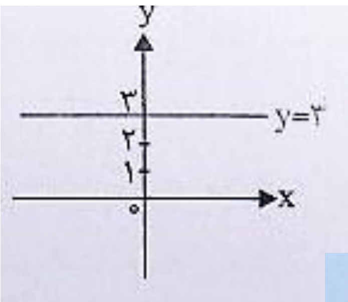
معادله ی هر خط را می توان به صورت y=mx+n در نظر گرفت که در این معادله m همان شیب خط(ضریب زاویه) و عدد ثابت n عرض از مبدا خط می باشد(یعنی خط محور y ها را در نقطه ی (۰,n) قطع می کند). پس برای به دست اوردن شیب یک خط از روی معادله ی آن، ابتدا آن را به صورت استاندارد یعنی به فرم y=mx+n در می آوریم. در این صورت ضریب x، شیب را مشخص خواهد کرد.

مثال ۱۱:

شیب خط ۳x+۲y=۵ را به دست آورید.

✓ پاسخ:

$$۳x+۲y=۵\Rightarrow ۲y=-۳x+۵\Rightarrow \xrightarrow[\text{یعنی ۲ تقسیم می کنیم.}]{\text{طرفین را بر ضریب } y} y=-\frac{۳}{۲}x+\frac{۵}{۲}\Rightarrow m=-\frac{۳}{۲}$$

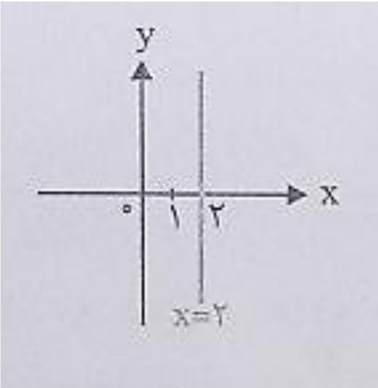


حالت خاص۱: معادله ی هر خط افقی به صورت y=k می باشد

(k عددی حقیقی است). شیب هر خط افقی برابر صفر می باشد.

مثلا شیب خط افقی y=۳ برابر صفر استف زیرا این معادله، جمله شامل x را ندارد. پس ضریب x هم صفر خواهد بود.

Y=۳⇒شیب=m=۰



حلت خاص ۲: معادله ی هر خط عمودی به صورت x=k می باشد (k عددی حقیقی است). شیب هر خط عمودی، تعریف نشده میباشد، مثلا شیب خط x=۲ تعریف نشده است. زیرا این خط موازی محور yها است.

x=۲ ⇒شیب = m = تعریف نشده

به دست آوردن معادله ی خط

۱. اگر از یک خط نقطه ی $A(x_۱ - x_۲)$ و شیب آن یعنی m به ما داده شود معادله ی خط از رابطه ی زیر به دست می آید:

y-$y_۱ = m(x - x_۱)$

مثال: معادله ی خطی را به دست آورید که از نقطه ی A(-۱،۲) می گذرد و شیب آن ۵ است.

پاسخ: طبق فرمول فوق طول و عرض نقطه ی A همان $x_۱$ و $y_۱$ هستند پس:

$$\left(A\left|\begin{matrix}-۱ = x_۱\\ ۲ = y_۱\end{matrix}\right. , m = ۵\right) \Rightarrow y - ۲ = ۵(x - (-۱) \Rightarrow y - ۲ = ۵x + ۵ \Rightarrow y = ۵x + ۷$$

۲. اگر دو نقطه ی $A(x_۱ \text{ و } y_۱)$ و $B(x_۲ \text{ و } y_۲)$ از یک خط معلوم باشند ابتدا شیب را از فرمول $m_{AB} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$ به دست آورده سپس از فرمول مقابل برای نوشتن معادله ی خط استفاده می کنیم.

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

مثال: معادله ی خطی را بنویسید که از نقاط A(۱،۲) و B(۳،۴) می گذرد.

پاسخ: ابتدا شیب خط گذرنده از نقاط A و B را به دست می آوریم:

$$A\left|\begin{matrix}۱ = x_۱\\ ۲ = y_۱\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow m_{AB} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۴ - ۲}{۳ - ۱} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

$B\left|\begin{matrix} ۳ = x_۲ \\ ۴ = y_۲ \end{matrix}\right.$

حال از فرمول $y - y_۱ = x - x_۱$ و نقطه ی A استفاده می کنیم تا معادله ی خط به دست آید:

$A\left|\begin{matrix} ۱ = x_۱ \\ ۲ = y_۱ \end{matrix}\right. \quad , m = ۱ \Rightarrow y - ۲ = ۱(x - ۱) \Rightarrow y = x + ۱$

رسم تابع خطی

رسم خط به کمک شیب(ضریب زاویه) و عرض از مبدا

می دانیم معادله استاندارد شده ی خط به صورت y=mx+n می باشد که درآن m شیب خط و n عرض از مبدا خط می باشد.

اگر بخواهیم خط را به کمک شیب و رض از مبدا رسم کنیم مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱) معادله ی خط را به شکل y=mx+n می نویسیم.

۲) نقطه ی (۰,n) یعنی عرض از مبدا را روی محور y ها مشخص می کنیم.

۳) شیب را به صورت $m = \frac{\text{خیز}}{\text{رفت}}$ در نظر می گیریم، سپس از نقطه ی عرض از مبدا شروع می کنیم و به اندازه ی رفت و برگشت به سمت راست حرکت می کنیم(مقدار را همواره مثبت در نظر می گیریم). سپس به اندازه ی خیز به سمت بالا و در صورت منفی بودن به سمت پایین حرکت می کنیم.) و نقطه ای که به آن می رسیم را به عنوان دومین نقطه ی خط در نظر بگیریم. با وصل کردن این دو نقطه به یک دیگر خط رسم می شود.

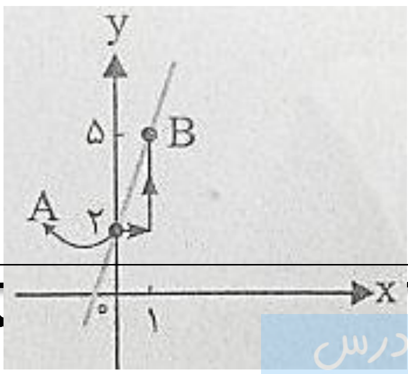
مثال ۱۲:

خط ۲y-۶x=۴ را به رو ش استفاده از شیب (ضریب زاویه) و عرض از مبدا رسم کنید.

✓ پاسخ: ابتدا خط را به فرم استاندارد یعنی y=mx+n تبدیل می کنیم تا شیب و عرض از مبدا آن پیدا شود.

۲y-۶x=۴ $\Rightarrow ۲y = ۶x + ۴ \xrightarrow[\text{بر ۲}]{\text{طرفین تقسیم}} y = ۳x + ۲$

شیب برابر ۳ و عرض از مبدا ۲ است. شیب را به صورت $\frac{۳}{۱}$ درنظر می گیریم که عدد ۳ "خیز" و عدد ۱ "رفت" می باشد. برای رسم خط ابتدا به اندازه ی عرض از مبدا یعنی ۲+ روی محور y ها به بالا حرکت می کنیم تا نقطه ی A به دست آید،



سپس به اندازه ی رفت یعنی ۱+ به دست راست و سپـــس به
اندازه ی خیز یعنی ۳+ به بالا حرکت می کنیم تا به نقطه B
برسیم. حالا A را به B وصل می کنیم.

رسم نمودار تابع خطی به روش نقطه یابی

اگر معادله ی یک خط را داشته باشیم، برای رسم آن، ابتدا معادله ی خط را به شکل استاندارد، یعنی به صورت y=mx+n، تبدیل می کنیم. سپس به x دو مقدار دلخواه می دهیم و عرض های مربوط به آن ها را به دست می اوریم. به این ترتیب، مختصات دو نقطه از خط به دست می آید که با وصل کردن آن ها به یکدیگر، نمودار خط را رسم می کنیم.

مثال ۱۳:

نمودار خط y+۲x=۱ را به روش نقطه یابی رسم کنید.

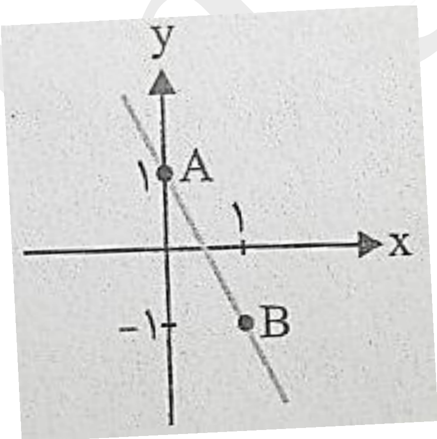
پاسخ: ابتدا معادله ی خط را به شکل استاندارد تبدیل می کنیم:

y+۲x=۱⇒ $y = ۲x + ۱$

حال به x دو مقدار دلخواه می دهیم و عرض مربوط به این دو مقدر را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = -۲(۰) + ۱ = ۱ \Rightarrow A(۰,۱) \\ x = ۱ \Rightarrow y = -۲(۱) + ۱ = -۱ \Rightarrow B(۱,-۱) \end{cases}$$

حال نقاط A و B را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده و آن ها را به هم وصل می کنیم تا نمودار خط مورد نظر رسم شود.

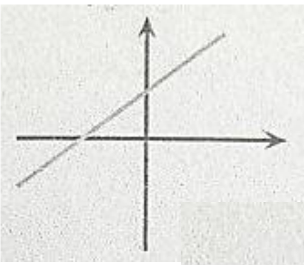


آقا شما چرا به x یک بار صفر و یک بار یک رو دادین؟

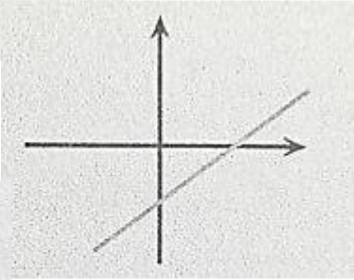
پاسخ: شما به x دو مقدار دلخواه دیگه بده و عرض اونها را پیدا کن.اگه دو نقطه رو در یک دستگاه بهم وصل کنی باز به همین شکل می رسی.پس به x هر مقداری که بدیم اشکالی نداره ولی همیشه ساده ترین اعداد رو به x می دیم.

نمودار تقریبی تابع خطی: در بعضی موارد نیازی به رسم دقیق یک تابع خطی نیست و یک شکل تقریبی مورد نظر می باشد. در یک تابع خطی به صورت y=mx+n.

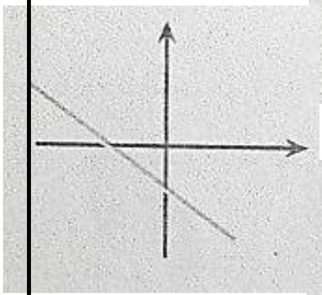
الف. اگر $\begin{cases} m>0 \\ n>0 \end{cases}$ باشد نمودار تقریبی تابع بدین صورت است:



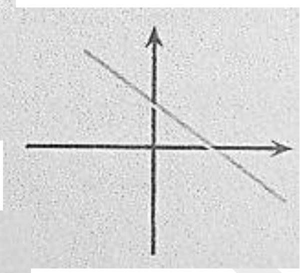
ب. اگر $\begin{cases} m>0 \\ n<0 \end{cases}$ باشد نمودار تقریبی تابع بدین صورت است:



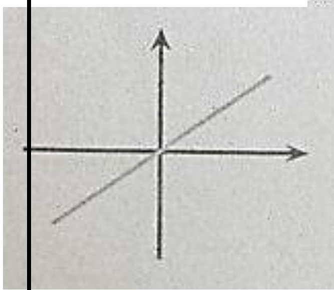
پ. اگر $\begin{cases} m<0 \\ n<0 \end{cases}$ باشد نمودار تقریبی تابع بدین صورت است:



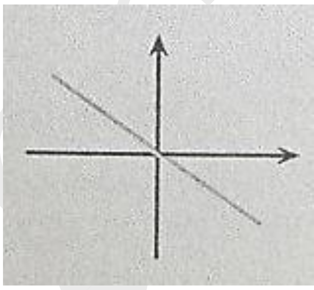
ت. اگر $\begin{cases} m<0 \\ n>0 \end{cases}$ باشد نمودار تقریبی تابع بدین صورت است:



ث. اگر $\begin{cases} m>0 \\ n=0 \end{cases}$ باشد نمودار تقریبی تابع بدین صورت است:

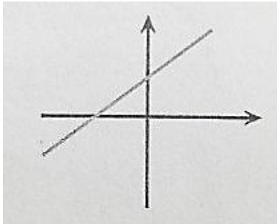


ج. اگر $\begin{cases} m<0 \\ n=0 \end{cases}$ باشد نمودار تقریبی تابع بدین صورت است:

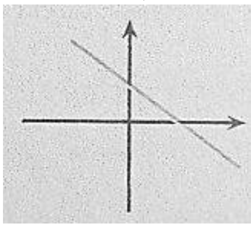


مثال ۱۴:

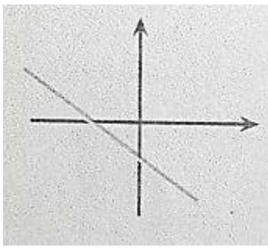
بدون محاسبه تعیین کنید هر معادله معروف کدام یک از نمودار های زیر است؟



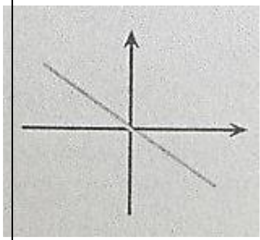
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

الف. Y=-x+۰/۴۵ ب. Y=۰/۵x+۳ پ. Y=۰/۲x-۵ ت. Y=-۲/۵x

حل: الف. Y=-x+۰/۴۵

پس نمودار تقریبی آن نمودار شماره ی (۳) است.

$$\begin{cases} m = -۱ \\ n = ۰/۴۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < ۰ \\ n > ۰ \end{cases}$$

ب. Y=۰/۵x+۳

پس نمودار تقریبی آن نمودار شماره ی (۴) است.

$$\begin{cases} m = ۰/۵ \\ n = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > ۰ \\ n > ۰ \end{cases}$$

پ. Y=۰/۲x-۵

پس نمودار تقریبی آن نمودار شماره ی (۲) است.

$$\begin{cases} m = ۰/۲ \\ n = -۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > ۰ \\ n < ۰ \end{cases}$$

ت. Y=-۲/۵x

پس نمودار تقریبی آن نمودار شماره ی (۱) است.

$$\begin{cases} m = -۲/۵ \\ n = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < ۰ \\ n = ۰ \end{cases}$$

خانواده توابع خطی

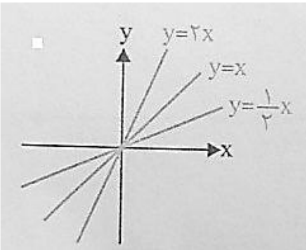
توابع خطی: توابعی هستند که نمودار آن ها به شکل یک خط می باشند. به طور کلی ضابطه هایی مانند y=mx+n و y=mx از یک خانواده هستند. (m و n به ترتیب شیب و عرض از مبدا هستند.)

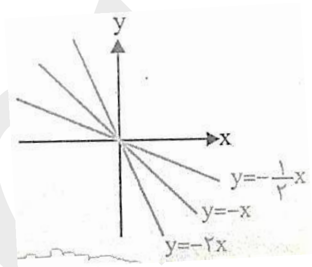
نکته ۱: خانواده ی تابع های y=mx (n=۰) شامل کلیه ی خط هایی است که دارای شیب m می باشند و از مبدا می گذرند.

نکته ۲: در خانواده ی تابع y=mx اگر شیب مثبت باشد خط از نواحی اول و سوم و اگر شیب خط منفی باشد خط از نواحی دوم و چهارم می گذرد.

☐ **مثال:** خطوط y=x ، $y=\frac{۱}{۲}x$ و y=۲x همگی از ناحیه های اول و سوم می گذرند(زیرا شیب مثبت دارند) و هم چنین خطوط y=-x و $y=-\frac{۱}{۲}x$ و y= -۲x همگی از ناحیه های دوم و چهارم می گذرند(چون شیب منفی دارند).

همان طور که ملاحظه می کنید همه ی این خطوط از مبدا گذشته اند چون عرض از مبدا آن ها صفر است.





خانواده ی توابع توانی

فرم کلی یک تابع توانی به صورت $y=f(x)=kx^p$ می باشد که k عددی حقیقی به جز صفر است و p عددی طبیعی است.

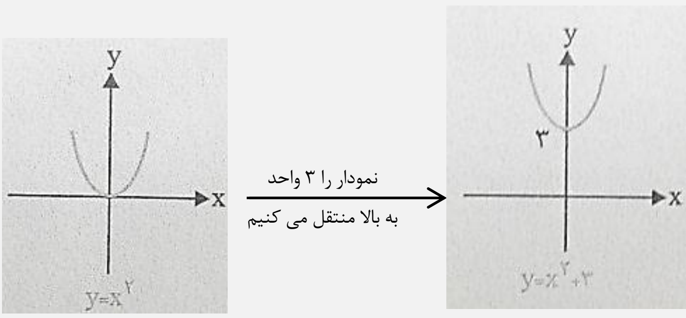
نکته ۱: اگر p=۱ باشد، آن گاه شکل تابع فوق به صورت $y=kx^۱$ خواهد بود. یعنی توابع خطی نیز عضوی از خانواده ی توابع به شمار می روند.

نکته ۲: یکی از معروف ترین توابع توانی، تابع $y=x^۲$ می باشد که به سهمی معروف است. برای رسم نمودار تابع $y=x^۲+k$ ، اگر k مثبت باشد نمودار $y=x^۲$ را به اندازه ی k واحد بالا و اگر k منفی باشد، نمودار $y=x^۲$ را به اندازه ی k واحد پایین منتقل می کنیم.

مثال ۱۵:

نمودار تابع $y=x^۲+۳$ را با استفاده از انتقال نمودار $y=x^۲$ رسم کنید.

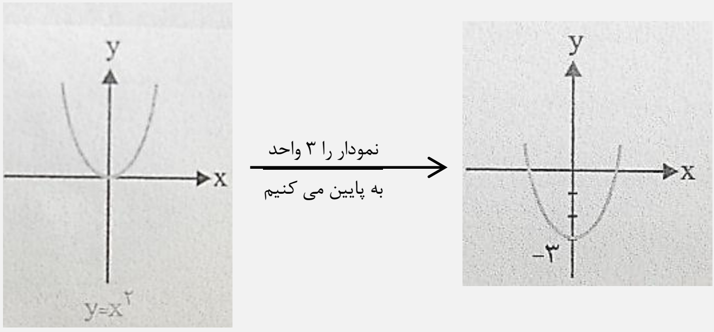
✓ پاسخ:



مثال ۱۶:

نمودار $y = x^{۲} - ۳$ را به کمک انتقال دادن $y = x^{۲}$ رسم کنید.

✓ پاسخ:

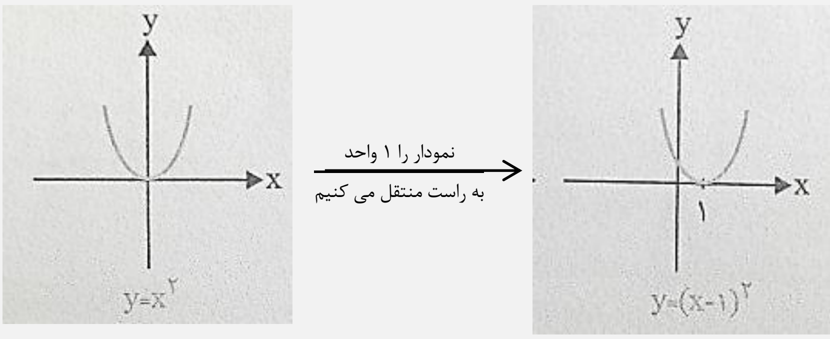


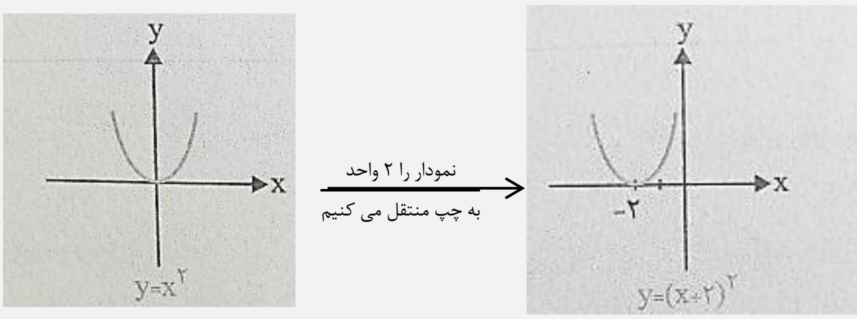
نکته ۳: برای رسم نمودار توابع فرم $y = (x + k)^{۲}$ اگر k مثبت باشد، نمودار $y = x^{۲}$ را در راستای محور x ها به اندازه ی k واحد به چپ و اگر منفی باشد نمودار $y = x^{۲}$ را به اندازه ی k واحد به سمت راست منتقل می کنیم.

مثال ۱۷:

نمودار های $y = (x - ۱)^{۲}$ و $y = (x + ۲)^{۲}$ را به کمک انتقال نمودار $y = x^{۲}$ رسم کنید.

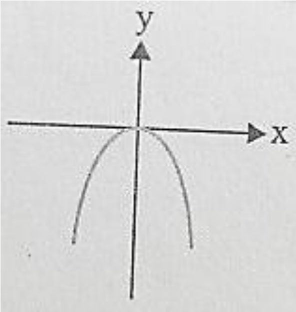
✓ پاسخ:





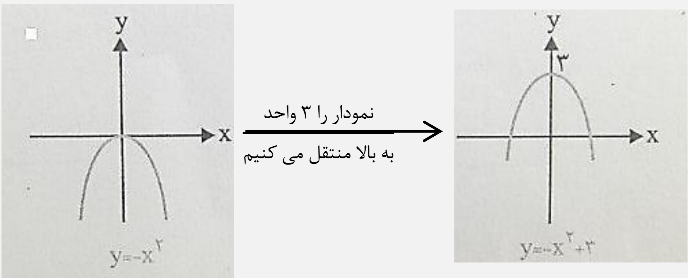
نکته۴: نمودار سهمی $y=-x^{۲}$ به صورت مقابل می باشد:

حال اگر بخواهیم نمودار $y=-x^{۲}+k$ را رسم کنیم اگر k مثبت باشد، نمودار $y=-x^{۲}$ را k واحد به بالا و اگر k منفی باشد، نمودار $y=-x^{۲}$ را k واحد به پایین منتقل می کنیم.



مثال ۱۸:	
نمودار $y=-x^{۲}+۳$ را به کمک انتقال نمودار $y=-x^{۲}$ رسم کنید.	

✓ پاسخ:



فصل اول

۱/۵ ۱. دامنه ی توابع زیر را مشخص کنید:

الف) $y = x^{۲} + ۲x^{۲}$

ب) $y = \sqrt{x+۴}$

پ) $y = \frac{۵}{x-۷}$

۱ ۲. اگر ضابطه ی تابعی به صورت y=۵x+۱ باشد، جدول روبرو را کامل کنید.

x	۰	۱	۲	۳
y				

۲ ۳. اگر f(x) = |x-۳| و $g(x) = ۳x^{۲} + ۲$ باشد، مقادیر زیر را محاسبه کنید:

الف) $\frac{f(۰)+g(۱)}{۲}$ ب) g(t)

۱/۵ ۴. با توجه به جدول ضابطه(فرمول) تابع را نوشته، سپس دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

x	۲	۳	۴	۵
y	۴	۹	۱۶	۲۵

۱/۵ ۵. در خط $y = \frac{-۲}{۳}x + ۳$ ابتدا ضریب زاویه(شیب) و عرض از مبدا را مشخص کرده و سپس خط را رسم کنید.

پاسخ:

۱. ب) $x+۴ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۴$ (۰/۲۵)   الف) دامنه $=R$ (۰/۵)

(۰/۲۵)
(۰/۲۵)

پ) $X - Y = ۰ \ \Rightarrow X = Y$
$D = R - \{۷\}$

۲. هر دو مورد (۰/۲۵)

x	۰	۱	۲	۳
y	۱	۶	۱۱	۱۶

۳. الف) $f(۰) = ۳$ (۰/۵) $g(۱) = ۵$ (۰/۵) $\Rightarrow \frac{f(۰)+g(۱)}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$ (۰/۵)

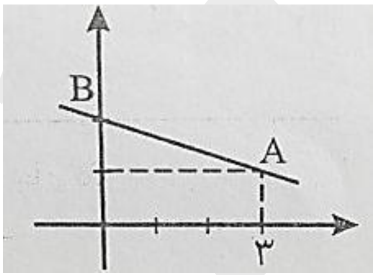
ب) $g(t) = ۳t^{۲} + ۲$ (۰/۵)

۴. برد = $\{۴، ۹، ۱۶، ۲۵\}$ (۰/۵)   دامنه = $\{۲، ۳، ۴، ۵\}$ (۰/۵) $y = x^{۲}$ (۰/۵)

۵. ضریب زاویه = $\frac{-۲}{۳}$ (۰/۲۵)

عرض از مبدا: ۳ (۰/۲۵)

رسم خط (۱)



فصل اول

۱. دامنه ی توابع زیر را مشخص کنید: الف) $y = \frac{۵}{۳x-۱}$ ب) $y = -۳x^۲ + ۷x - ۴$ ج) $y = \sqrt{x-۷}$	۱/۵
۲. ضابطه ی تابع y=f(x) جدول زیر را نوشته سپس با توجه به آن مقادیر زیر را محاسبه کنید. الف) f (x-۳) ب) f (۱+a)	۱
۳. اگر $f(x)= ۲^x$ و $g(x) = \sqrt{۲x+۱}$ و h(x) = |۳x-۲| مقادیر زیر را محاسبه کنید: الف) ۳f (۱)+ g(۴) ب) $\frac{f(۲)-g(۰)}{۵}$ ج) h(-۱)× g(۱)	۲
۴. خط ۳x-۲y+۴=۰ را با استفاده از ضریب زاویه و عرض از مبدا رسم کنید.	۱/۵
۵. ضریب زاویه(شیب) خط های زیر را تعیین کنید. الف) خطی که از دو نقطه ی A(۳,-۲) و B(۱،۴) بگذرد. ب) خط y= -۵	۱/۵

X	۲	۳	۴	۵	۶
y	۵	۷	۹	۱۱	۱۳

پاسخ

۱. تابعی است کسری و دامنه آن IR به غیر از ریشه های مخرج.

$$۳x - ۱ = ۰ \longrightarrow ۳x = ۱ \longrightarrow x = \frac{۱}{۳}$$

$$D = IR - \{\frac{۱}{۳}\}$$

$y = -۳x^۲ + ۷x - ۴$ تابع کثیر الجمله(خطی) گویند و دامنه آن همواره IR می باشد.

$y = \sqrt{x-۷}$ تابع جذری گویند و دامنه آن اعدادی از مجموعه IR به طوری که زیر جذر را مثبت کنند.

$x-۷ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۷ \Rightarrow D = \{x \in IR | x \geq ۷\}$

f (x)= ۲x+۱

۲. برای پیدا کردن ضابطه f(x-۳) کافی است x-۳ را به جای x در ضابطه f(x) جایگذاری کنیم.

الف) F(x-۳) = ۲(x-۳) + ۱ =۲x -۶ + ۱ = ۲x -۵

ب) F(۱+a) = ۲(۱+a) + ۱ = ۲+ ۲a + ۱ = ۲a+ ۳

۳.

$$\begin{cases} f(۱) = ۲^{۱} = ۲ \\ g(۴) = \sqrt{۲(۴)+۱} = \sqrt{۹} = ۳ \end{cases}$$

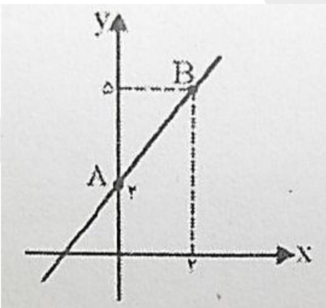
الف) : ۳f (۱) + g (۴) = ۳(۲) + ۳ = ۶ +۳ =۹

ب) : $\begin{cases} f(۲) = ۲^{۲} = ۴ \\ g(۰) = \sqrt{۲(۴)+۱} = \sqrt{۱} = ۱ \end{cases} \rightarrow \frac{f(۲)-g(۰)}{۵} = \frac{۴-۱}{۵} = \frac{۳}{۵}$

ج) : $\begin{cases} h(-۱) = |۳(-۱)-۲| = |-۳-۲| = |-۵| = ۵ \\ g(۱) = \sqrt{۲(۱)+۱} = \sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow h(-۱)\times g(۱) = ۵\times\sqrt{۳} = ۵\sqrt{۳}$

۴. ۲-عرض از مبدا　　　　m=$\frac{۳}{۲}$ شیب خط

ابتدا نقطه ی عرض از مبدا A(۰،۲) را روی محور عرض ها مشخص کرده و سپس از نقطه ی A، ۳ واحد به سمت بالا(خیز) و ۲ واحد به سمت راست(رفت) می کنیم تا نقطه ی B به دست آید. خطی که از این دو نقطه می گذرد نمودار مطلوب است.



۵. شیب خط با داشتن دو نقطه از آن روی رابطه زیر به دست می آید:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-۲-۴}{۳-۱} = \frac{-۶}{۲} = -۳$$

ب: خط y=k موازی محور طول هاست و شیب آن صفر است.