# فصل دوم : شناخت معادله ی درجه دوم

معادله ی درجه ی دوم: هر معادله به شکل $ax^۲ + bx + c = ۰$ که در آن a، b و c اعدادی حقیقی و $a \neq ۰$ است یک معادله ی درجه ی دوم نامیده می شود.

در این معادله $ax^۲$ جمله ی درجه ی دوم، bx جمله ی درجه ی اول و cجمله ثابت نامیده می شوند.

- مثال: در معادله ی $-۵x^۲ + ۶x - ۷ = ۰$ می توان نوشت:

C= -y= جمله ثابت

Bx=+۶x= جمله ی درجه ی اول

$ax^۲ = -۵x^۲$ = جمله درجه ی دوم

تذکر ۱: در معادله ی درجه ی دوم اگر a، b و c همگی مخالف صفر باشند، معادله ی درجه دوم را کامل می گوییم و اگر b یا c صفر باشند، معادله را ناقص می گوییم.

- مثال: معادله ی $۲x^۲ - x + ۷ = ۰$ کامل می باشد ولی معادله های $۵x^۲ - ۱ = ۰$ و $۱۰x^۲ + ۳x = ۰$ ناقص هستند، زیرا در معادله ی اولی جمله ی شامل x نداریم، یعنی c=۰ می باشد.

تذکر ۲: گاهی اوقات ممکن است در معادله ی درجه ی دوم، جای جملات با هم عوض شده باشد، در این گونه موارد باید معادله را به فرم استاندارد یعنی $ax^۲ + bx + c = ۰$ تبدیل می کنیم.

- مثال: استاندارد شده ی معادله ی $-۳x + ۶ - ۲x^۲ = ۰$ به صورت $-۲x^۲ - ۳x + ۶ = ۰$ می باشد یعنی همیشه ابتدا جمله ی درجه ی دوم، سپس جمله ی درجه ی اول و در نهایت جمله ی ثابت را می نویسیم.

## حل معادله ی درجه ی دوم به روش تجزیه

در این روش از خاصیت عامل(فاکتور) صفر استفاده می کنیم:

خاصیت عامل (فاکتور) صفر: برای هر دو عدد حقیقی a و b اگر ۰=a.b باشد، آن گاه ۰=a یا ۰=b خواهد بود و بر عکس، اگر ۰=a– یا ۰=b باشد، آن گاه ۰=a.b خواهد بود.

بنابراین برای حل معادله ی درجه ی دوم به روش تجزیه، ابتدا تمامی جملات را به یک طرف معادله برده و معادله را مساوی صفر قرار می دهیم، سپس با استفاده از اتحاد های مزدوج و یا جمله ی مشترک و یا به کمک فاکتور گیری عبارت را به صورت حاصل ضرب دو عبارت در میآوریم و هر کدام از این عبارت ها را مساوی صفر قرار می دهیم تا جواب های معادله به دست آید.

**مثال ۱:** معادله ی $x^{۲} + bx = ۰$ را به روش تجزیه حل کنید.

$$x^{۲} + ۱۰x = ۰ \xrightarrow{\text{از } x \text{ فاکتور می گیریم}} x(x + ۱۰) = ۰ \xrightarrow{\text{خاصیت فاکتور صفر}} \begin{cases} x = ۰ \\ x + ۱۰ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۱۰ \end{cases}$$

**مثال ۲:** معادله ی $x^{۲} - ۸x + ۷ = ۰$ را به روش تجزیه حل کنید.

برای حل معادله ی $x^{۲} - ۸x + ۷ = ۰$ با استفاده از اتحاد جمله ی مشترک باید دو عدد پیدا کنیم که حاصل ضرب آن ها (۷+) و حاصل جمع آن ها (۸–) شود. این دو عدد ۱– و ۷– هستند پس:

$$x^{۲} - ۸x + ۷ = ۰ \xrightarrow{\text{استاد}} (x - ۱)(x - ۷) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۰ \\ x - ۷ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۷ \end{cases}$$

## حل معادله ی درجه ی دوم با استفاده از خاصیت ریشه ی زوج

اگر معادله ی درجه ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ ضریب x یعنی عدد b برابر صفر باشد، آن گاه معادله به صورت $ax^۲+c=۰$ تبدیل خواهد شد. برای حل این معادله به طریق زیر عمل می کنیم:

$$ax^۲+c=۰ \Rightarrow ax^۲=-c \xrightarrow[\text{بر عدد } a]{\text{تقسیم طرفین}} x^۲=-\frac{c}{a} \xrightarrow[\text{جذر می گیریم}]{\text{از طرفین}} x=+\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ یا } x=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

این دو جواب در صورتی قابل قبول هستند که عبارت زیر رادیکال ها بزرگ تر یا مساوی صفر باشند. س a و c باید مختلف العلامه باشند تا زیر رادیکال منفی نشود. بنابراین اگر a و c مختلف العلامه باشند، این معادله دو ریشه ی قرینه دارد.

**مثال ۳:**

معادله ی $۳x^۲-۵=۰$ را با استفاده از خاصیت ریشه ی زوج حل کنید.

$$۳x^۲-۵=۰ \Rightarrow ۳x^۲=۵ \xrightarrow[\text{بر عدد ۳}]{\text{تقسیم طرفین}} x^۲=\frac{۵}{۳} \xrightarrow[\text{طرفین معادله}]{\text{جذر گیری از}} x=\pm\sqrt{\frac{۵}{۳}}$$

✓ پاسخ:

پس یک ریشه ی معادله $x=+\sqrt{\frac{۵}{۳}}$ و ریشه ی دیگر $x=-\sqrt{\frac{۵}{۳}}$ می باشد، ملاحظه می شود که ریشه ها دو عدد قرینه هستند.

نتیجه: در حل معادله ی درجه ی دوم $ax^۲+c=۰$ از خاصیت ریشه ی زوج استفاده می کنیم که به صورت زیر بیان می شود.

$$x^۲=k \xrightarrow{(k>۰)} \begin{cases} x=+\sqrt{k} \\ x=-\sqrt{k} \end{cases}$$

مثال ۴:

معادله ی $-۷x^۲-۴۹=۰$ را با استفاده از خاصیت ریشه ی زوج حل کنید.

✓ پاسخ:

$$-۷x^۲۴۹=۰ \Rightarrow -۷x^۲=۴۹ \xrightarrow[\text{بر ۷-}]{\text{تقسیم طرفین}} x^۲=\frac{۴۹}{-۷} \Rightarrow x^۲=-۷$$

معادله ی بالا جواب ندارد زیرا از یک عدد منفی نمی توان جذر گرفت.

### پ. حل معادله ی درجه ی دوم به روش مربع کامل کردن

مربع کردن: یعنی نوشتن معادله ی درجه ی دوم به شکل $(x+h)^2$ که در آن h و k اعداد حقیقی هستند.

برای حل یک معادله ی درجه ی دوم به روش مربع کامل کردن مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱. اگر $x^2$ ضریب داشته باشد دو طرف معادله را بر ضریب $x^2$ تقسیم می کنیم تا ضریب آن یک شود.

۲. معادله را به شکل $x^2+bx=k$ می نویسیم یعنی جمله ی ثابت را از جملات شامل x جدا می کنیم.

۳. عبارت $(\frac{b}{2})^2$ یعنی نصف ضریب x به توان دور را به طرفین تساوی فوق اضافه کرده تا به عبارت سمت چپ، مربع کامل شود.

۴. سه جمله ای سمت چگ تساوی را به صورت اتحاد های اول یا دوم می نویسیم.( اتحاد های مربع مجموع دو جمله ای و مربع تفاضل دو جمله ای)

۵. با استفاده از خاصیت ریشه ی زوج معادله را حل می کنیم.

**مثال ۵:**

معادله ی $x^2+2x-5=0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

✓ پاسخ:

$$x^2+2x-5=0 \xrightarrow[\text{سمت راست می بریم.}]{\text{عدد ثابت را به}} x^2+2x=5 \xrightarrow[\text{جمع می کنیم.}]{\text{طرفین را با } \frac{b^2}{4} \text{ یعنی } \frac{2^2}{4}} x^2+2x+1=5+1$$

$$\xrightarrow[\text{اتحاد اول است.}]{\text{سمت چپ}} (x+1)^2=6 \xrightarrow[\text{می گیریم.}]{\text{از طرفین جذر}} x+1=\pm\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} x+1=\sqrt{6} \longrightarrow x=\sqrt{6}-1 \\ x+1=-\sqrt{6} \longrightarrow x=-\sqrt{6}-1 \end{cases}$$

برای حل معادله ی $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ در حالت کلی، ابتدا مبین معادله یعنی دلتا ( $\Delta$ ) را از رابطه ی $\Delta= b^2-4ac$ به دست می آوریم. سپس حالات زیر را خواهیم داشت:

الف) اگر $\Delta>0$ باشد، معادله دو ریشه ی حقیقی و متمایز دارد که از روابط زیر به دست می آیند:

$$(x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \xrightarrow{\text{به طور خلاصه می توان نوشت.}} x_1, x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب) اگر $\Delta=0$ باشد، معادله دارای دو ریشه ی مساوی می باشد، به عبارت دیگر معادله دارای ریشه ی مضاعف خواهد بود که این ریشه از رابطه ی $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ به دست می اید.

ج) اگر $\Delta<0$ باشد، معادله ی درجه ی دوم ریشه ی حقیقی ندارد.

مثال ۶:

معادلات یر را به روش دلتا حل کنید.

الف) $x^۲+۱۶=۸x$ ب) $۲x^۲+x-۱۰=۰$ ج) x(۲x+۱)=-۳

✓ پاسخ: الف)

$$x^۲+۱۶=۸x \xrightarrow[\text{می کنیم.}]{\text{معادله را استاندارد}} ۱x^۲-۸x+۱۶=۰ \to \Delta=b^۲-۴ac=(-۸)^۲-۴(۱)(۱۶)=۶۴-۶۴=۰$$

a b c

چون دلتا برابر صفر شده لذا معادله ریشه ی مضاعف دارد که برابر است با:

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۸)}{۲(۱)}=۴$$

ب) $$۲x^۲+۱x-۱۰=۰ \to \Delta=b^۲-۴ac=۱^۲-۴(۲)(-۱۰)=۱+۸۰=۸۱$$

a b c

دلتا برابر با عددی مثبت شده است لذا معادله ۲ ریشه ی متمایز دارد:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۱\pm\sqrt{۸۱}}{۲(۲)}=\frac{-۱\pm۹}{۴} \begin{cases} x'=\frac{-۱+۹}{۴}=۲ \\ x''=\frac{-۱-۹}{۴}=\frac{-۵}{۲} \end{cases}$$

ج)

$$x(۲x+۱)=-۳ \xrightarrow[\text{می کنیم.}]{\text{معادله را استاندارد}} ۲x^۲+۱x+۳=۰ \Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۱^۲-۴(۲)(۳)=۱-۲۴=-۲۳$$

a b c

چون دلتا برابر با عددی منفی شده است، لذا معادله ریشه ی حقیقی ندارد.

## روابط بین ضرایب و ریشه های معادله ی درجه ۲

اگر ریشه های معادله ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ را $x_۱$ و $x_۲$ بنامیم، آن گاه مجموع $x_۱$ و $x_۲$ را به S و حاصل ضرب $x_۱$ و $x_۲$ را با p نشان داده و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} S = x_۱ + x_۲ = \dfrac{-b}{a} : \text{مجموع ریشه ها} \\ P = x_۱ . x_۲ = \dfrac{c}{a} : \text{حاصل ضرب ریشه ها} \end{cases}$$

**مثال ۷ :**

در معادله ی $۵x^۲ - ۴x - ۷ = ۰$ موارد زیر را محاسبه کنید:

الف) $x_۱ + x_۲$    ب) $x_۱ . x_۲$    ج) $\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲}$

الف) $x_۱ + x_۲ = s = \frac{-b}{a} \Rightarrow s = \frac{۴}{۵}$

ب) $x_۱ + x_۲ = p = \frac{c}{a} \Rightarrow p = \frac{-۷}{۵}$

ج) $\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک می گیریم}} \frac{x_۱ + x_۲}{x_۱ x_۲} = \frac{s}{p} = \frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{-۷}{۵}} = \frac{-۴}{۷}$

برای حل این گونه معادلات مراحل زیر را طی می کنیم:

۱) عدد عبارتی را پیدا می کنیم که بر تمام مخرج های دو طرف معادله بخش پذیر باشد، یعنی کوچک ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج ها را به دست می آوریم.

۲) دو طرف معادله را در ک.م.م مخرج ها ضرب می کنیم تا مخرج ها حذف شوند.

۳) مجهول ها را به یک طرف تساوی و معلوم ها را به طرف دیگر تساوی منتقل کرده و معادله ی حاصل را حل می کنیم که مخرج ها را صفر نکند. هر کدام از جواب ها که مخرجی را صفر کند، غیر قابل قبول است.

**مثال ۸:**

جواب معادله ی $\frac{۲x^۲+۴}{x+۱}=۲x$ را به دست آورید.

✓ پاسخ: در این مساله، بهتر است به جای ک.م.م گرفتن از مخرج ها، طرفین وسطین کنیم:

$$\frac{۲x^۲+۴}{x+۱}=\frac{۲x}{۱}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین می کنیم}}۲x(x+۱)=۲x^۲+۴\Rightarrow ۲x^۲+۲x=۲x^۲+۴$$

$$\Rightarrow \cancel{۲x^۲}+۲x-\cancel{۲x^۲}=۴\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow x=\frac{۴}{۲}=۲$$

جواب x=۲ قابل قبول است، زیرا مخرج کسر را صفر نمی کند.

**مثال ۹:**

معادله ی مقابل را حل کنید.

$$\frac{x-۳}{x+۳}-\frac{x}{x-۳}=\frac{۱۸}{x^۲-۹}$$

✓ پاسخ: می دانیم $x^۲-۹$ طبق اتحاد مزدوج به صورت (x-۳)(x+۳) تبدیل می شود، پس ک.م.م مخرج ها برابر (x-۳)(x+۳) می باشد. حال تمام جملات را در ک.م.م ضرب می کنیم:

$$(x-۳)(x+۳)\left[\frac{x-۳}{x+۳}-\frac{x}{x-۳}\right]=\frac{۱۸}{\cancel{(x-۳)(x+۳)}}\times\cancel{(x-۳)(x+۳)}$$

$$\Rightarrow (x-۳)\cancel{(x+۳)}\left(\frac{x-۳}{\cancel{x+۳}}\right)-\cancel{(x-۳)}(x+۳)\left(\frac{x}{\cancel{x-۳}}\right)=۱۸$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x-۳)^۲}_{\text{اتحاد}}-(x+۳)x=۱۸\Rightarrow \cancel{x^۲}-۶x+۹-\cancel{x^۲}-۳x=۱۸\Rightarrow -۹x=۹\Rightarrow x=\frac{۹}{-۹}=-۱$$

جواب قابل قبول است. زیرا، هیچ یک از مخرج ها را صفر نمی کند.

## معادلات رادیکالی( اصم، گنگ)

اگر در یک معادله، مجهولی مانند x در زیر رادیکال باشد، آن معادله رادیکالی (اصم یا گنگ) نامیده می شود. برای حل این گونه معادلات یک عبارت رادیکالی را در یک طرف تساوی نگه داشته و بقیه ی عبرت ها را به طرف دیگر منتقل می کنیم و طرفین تساوی را به توان فرجه ی رادیکال می رسانیم تا رادیکال حذف شود. البته گاهی اوقات لازم است عمل به توان رساندن را چندین بار انجام دهیم.

تذکر: اگر فرجه ی رادیکال زوج باشد، جواب یا جواب های به دست آمده را حتما باید در معادله ی اصلی (اولیه) امتحان کنیم.

اگر در این معادله صدق کند و عبارت زیر رادیکال به ازای جواب به دست آمده منفی نشود، قابل قبول خواهد بود.

| **مثال ۱۰:** | |
|---|---|

معادلات زیر را در صورت امکان حل کنید.

الف) $\sqrt{x+۵}+۳=۶$ ب) $\sqrt{۶-x}=-۱۲$

✓ پاسخ: برای حل قسمت (الف) خواهیم داشت:

$$\sqrt{x+۵}+۳=۶ \Rightarrow \sqrt{x+۵}=۶-۳ \Rightarrow \sqrt{x+۵}=۳ \xrightarrow[\text{(درجه ی رادیکال) می رسانیم.}]{\text{طرفین معادله را به توان ۲}} x+۵=۹ \Rightarrow x=۴$$

اگر جواب یعنی عدد x=۴ را معادله ی اولیه ( اصلی) قرار دهیم طرفین معادله با هم مساوی می شوند. (۶=۶) پس جواب قابل قبول می باشد.

معادله ی قسمت (ب) ریشه ی حقیقی ندارد زیرا طرف چپ تساوی، رادیکالی با فرجه ی زوج داریم که جواب آن همواره بزرگ تر یا مساوی صفر است ولی طرف راست تساوی عددی منفی (۱۲-) داریم. به عبارت دیگر جواب یک رادیکال با فرجه ی زوج، هیچ گاه نمی تواند با عددی منفی مساوی شود، پس معادله جواب ندارد.

## کار برد های معادله ی درجه دوم

در حل بسیاری از مسائل روزمره یا پدیده های طبیعی می توان یک معادله ی درجه ی دوم تشکیل داد و مسائل را حل کرد.

برای این کار اولین مرحله انتخاب مجهول یا مجهولات مسئله و مرحله ی بعدی ایجاد ارتباط بین معلومات مسئله و مجهولات و تشکیل معادله است.

| **مثال ۱۱:** | |
|---|---|

مساحت یک زمین مستطیل شکل برابر ۴۸ متر مربع و طول زمین سه برابر عرض آن است. اندازه ی طول و عرض این زمین را پیدا کنید.

حل:

اگر عرض مستطیل را x در نظر بگیریم، طول آن ۳x خواهد بود. حال با توجه به فرمول مساحت مستطیل میتوانیم بنویسیم:

$$\text{مساحت مستطیل} = \text{عرض} \times \text{طول} \Rightarrow (۳x) \times (x) = ۴۸ \Rightarrow ۳x^۲ = ۴۸ \Rightarrow x^۲ = \frac{۴۸}{۳} = ۱۶ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۱۶}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = +۴ \\ x = -۴ \end{cases}$$

x= -۴ قابل قبول نیست، چون عرض مستطیل نمی توانند عدد منفی باشد. پس:

عرض: $x = ۴ \Rightarrow ۳x = ۳ \times ۴ = ۱۲$ طول

- نسبت طلایی: اگر طول یک مستطیل را L و عرض آن را W درنظر بگیریم و در رابطه $\frac{W}{L} = \frac{L}{W+L}$ صدق کند این نسبت را نسبت طلایی می گوییم.
- نکته: ار از یک مستطیل طلایی، یک مرع جدا کنیم، مستطیل باقی مانده نیز یک مستطیل طلایی است.

**مثال ۱۲:**

زمینی به شکل مستطیل داریم که طول و عرض آن با نسبت طلایی متناسب است. اگر محیط زمین ۲۰ متر باشد طول و عرض آن چقدر است؟

حل:

$$\text{محیط مستطیل} = ۲ \times (\text{طول} + \text{عرض}) \Rightarrow ۲(W+L) = ۲۰ \Rightarrow W + L = ۱۰ \Rightarrow W = ۱۰ - L$$

حال در نسبت طلایی $\frac{W}{L} = \frac{L}{W+L}$ به جای W، ۱۰-L می گذاریم:

$$\frac{۱۰-L}{L} = \frac{L}{۱۰} \xRightarrow{\text{طرفین وسطین می کنیم}} L \times L = ۱۰ \times (۱۰ - L) \Rightarrow L^۲ = ۱۰۰ - ۱۰L \Rightarrow L^۲ + ۱۰L - ۱۰۰ = ۰$$

$$a = ۱ , b = ۱۰ , c = ۱۰۰ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = (۱۰)^۲ - ۴(۱)(-۱۰۰) = ۱۰۰ + ۴۰۰ = ۵۰۰$$

$$L = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-(۱۰) \pm \sqrt{۵۰۰}}{۲(۱)} = \frac{-۱۰ \pm \sqrt{۵ \times ۱۰۰}}{۲} = \frac{-۱۰ \pm ۱۰\sqrt{۵}}{۲} = \frac{\cancel{۲}(-۵ \pm ۵\sqrt{۵})}{\cancel{۲}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} L = -۵ - ۵\sqrt{۵} \ (\text{غ ق ق}) \\ L = -۵ + ۵\sqrt{۵} \ (\text{ق ق}) \ \text{طول مستطیل} \end{cases}$$

$(-۵ \pm ۵\sqrt{۵})$ یک عدد منفی است و طول مستطیل نمی تواد عدد منفی باشد پس:

طول : $L = -۵ + ۵\sqrt{۵} \Rightarrow$ عرض: $W = ۱۰ - L = ۱۰ - (-۵ + ۵\sqrt{۵}) = ۱۵ - ۵\sqrt{۵}$

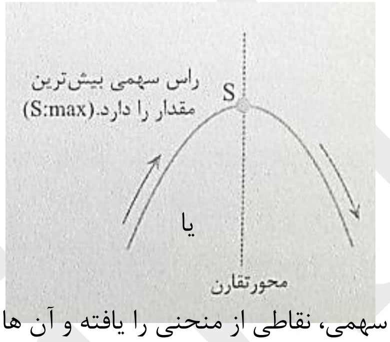
## رسم نمودار های تابع درجه دوم:

الف. راس سهمی و معادله ی محور تقارن سهمی

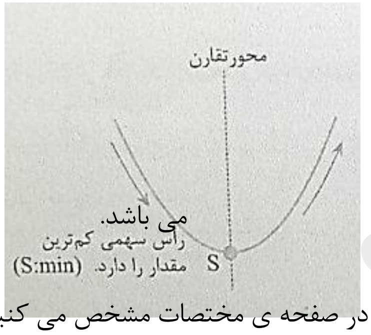
نمودار تابع درجه ی دوم که فرم کلی آن به صورت $(a \neq ٠), y = ax^٢ + bx + c$ است، سهمی نامیده می شود.

نقطه ی S که درآن، سهمی دارای بیشترین یا کم ترین مقدار است راس سهمی نامیده می شود و به خط عمودی که از راس سهمی می گذرد، محور تقارن سهمی می گوییم.

نمودار سهمی به شکل




یا



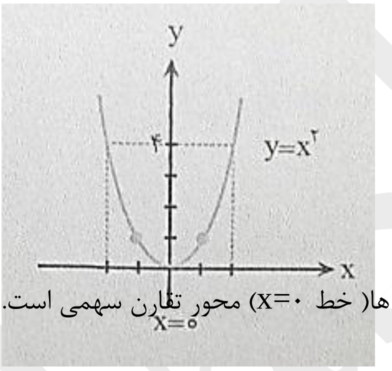

می باشد.

- برای رسم نمودار سهمی، نقاطی از منحنی را یافته و آن ها را در صفحه ی مختصات مشخص می کنیم، به طور مثال برای رسم ساده ترین معادله ی درجه ی دوم یعنی $y = f(x) = x^٢$ جدول مقادیر تابع را تشکیل می دهیم:

| x | ... | -٢ | -١ | ٠ | ١ | ٢ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=x^٢$ | ... | ۴ | ١ | ٠ | ١ | ۴ | ... |

$y = (-٢)^٢ = ۴$ $\quad y = (-١)^٢ = ١$ $\quad y = (٠)^٢ = ٠$

$y = (٢)^٢ = ۴$ $\quad y = (١)^٢ = ١$




در این نمودار نقطه ی $S(٠,٠)$ که کم ترین مدار را دارد راس سهمی و محور y ها( خط x=٠) محور تقارن سهمی است.

- نکته: برای x هایی که نسبت به راس قرینه اند، y های یکسانی به دست می اید بنابراین با دادن نقاط قرینه نسبت به طول راس سهمی می توان فقط y یکی از نقاط قرینه را به دست آورد.

ب. انواع نمودار $y = x^٢$

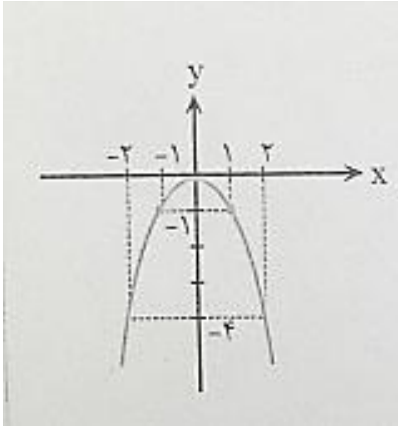
- قاعده ی کلی رسم نمودار های $f(x) = ax^٢$ با استفاده از نمودار $f(x) = ax^٢$ :

تمام سهمی هایی که به شکل $y = ax^٢$ هستند راس آن ها بر مبدا مختصات منطبق است. اگر:

١. $a>٠$ باشد، سهمی به طرف بالا رسم می شود.
٢. $a<٠$ باشد، سهمی به طرف گایین رسم می شود.

**مثال ۱۳:**

۱. نمودار تابع $y = ax^۲$ را رسم کنید.

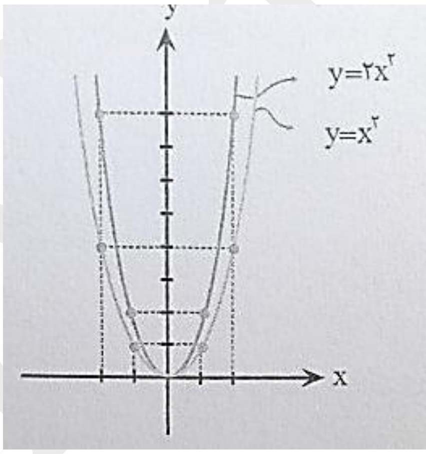



حل: x=۰ محور تقارن و S(۰،۰)= راس سهمی

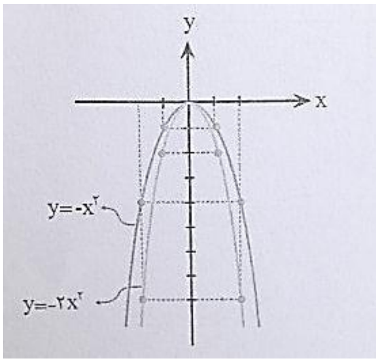
| x | -۲ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y=x^۲$ | -۴ | -۱ | ۰ | -۱ | -۴ |

۲. نمودار تابع های $y = ۲x^۲$ و $y = -۲x^۲$ را با توجه به نمودار های $y = x^۲$ و $y = -x^۲$ رسم کنید.

حل:




| x | -۲ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y= ۲x^۲$ | ۸ | ۲ | ۰ | ۲ | ۸ |



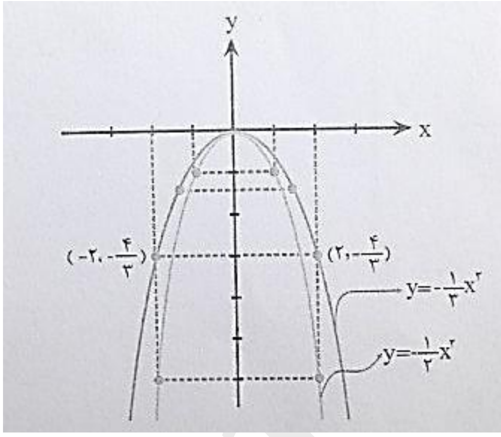

| x | -۲ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y=-۲x^۲$ | -۸ | -۲ | ۰ | -۲ | -۸ |

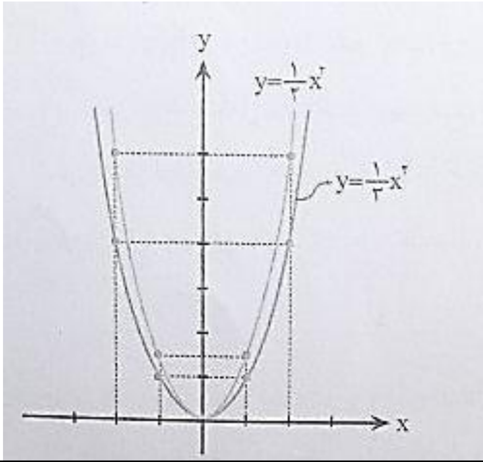
۳. نمودار تابع های $y = \frac{۱}{۲}x^۲$ ، $y = \frac{۱}{۳}x^۲$ ، $y = \frac{-۱}{۲}x^۲$ و $y = -\frac{۱}{۳}x^۲$ را رسم کنید.

حل:

| x | -۲ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y=-\frac{۱}{۲}x^۲$ | -۲ | $-\frac{۱}{۲}$ | ۰ | $-\frac{۱}{۲}$ | -۲ |
| $y=-\frac{۱}{۳}x^۲$ | $-\frac{۴}{۳}$ | $-\frac{۱}{۳}$ | ۰ | $-\frac{۱}{۳}$ | $-\frac{۴}{۳}$ |

| x | -۲ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y=\frac{۱}{۲}x^۲$ | ۲ | $\frac{۱}{۲}$ | ۰ | $\frac{۱}{۲}$ | ۲ |
| $y=\frac{۱}{۳}x^۲$ | $\frac{۴}{۳}$ | $\frac{۱}{۳}$ | ۰ | $\frac{۱}{۳}$ | $\frac{۴}{۳}$ |




- نکته: با توجه به مثال های فوق می بینیم که مقدار a در معادلات $y = ax^{۲}$ و $y = \frac{۱}{a}x^{۲}$ باعث باز و بسته شدن دهانه ی سهمی می شود و علامت a جهت سهمی را مشخص می کند که رو به بالا یا رو به پایین است. به طور کلی:

۱. اگر |a|( مقدار a صرف نظر از علامت a) افزایش یابد سهمی بسته و بسته تر می شود( در معادله ی $y = ax^{۲}$ ).

۲. اگر $|\frac{۱}{a}|$ کاهش یابد سهمی باز و بازتر می شود( در معادله ی $y = \frac{۱}{a}x^{۲}$ ).

- قاعده ی کلی رسم نمودار های $f(x) = x^{۲} + a$ با استفاده از نمودار $f(x) = x^{۲}$ :

۱. راس نمودار به اندازه ی |a| واحد روی محور y ها بالا یا پایین می رود و مختصات آن به صورت S(o,a) خواهد بود.

اگر a>۰ باشد a واحد به سمت بالا و اگر a<۰ باشد، |a| واحد به سمت پایین حرکت میکند.

۲. محور تقارن سهمی، همان محور y ها یعنی خط x=۰ است.

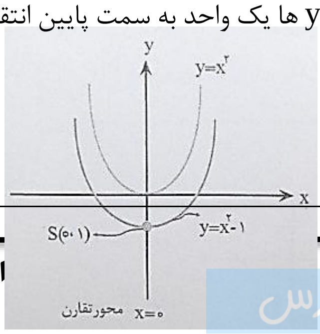
۳. دهانه ی سهمی از نظر باز و بسته بودن هیچ تفاوتی با نمودار $f(x) = x^{۲}$ ندارد.

| مثال ۱۴: | |
|---|---|

با استفاده از نمودار $f(x) = x^{۲}$ نمودار تابع $f(x) = x^{۲} - ۱$ را رسم کنید.

حل:نمودار $f(x) = x^{۲} - ۱$ همان نمودار $f(x) = x^{۲}$ است که روی محور y ها یک واحد به سمت پایین انتقال یافته است.

راس سهمی S(۰,-۱) و محور تقارن x=۰ است



- **قاعده ی کلی رسم نمودار های $f(x)=(x+a)^2$ با استفاده از نمودار $f(x)=x^2$ :**

۱) راس نمودار به اندازه ی |a| واحد از مبدا مختصات روی محور x ها انتقال می یابد و مختصات آن به صورت S(-a,۰) خواهد بود.

اگر a>۰ باشد سهمی a واحد به سمت چپ و اگر a<۰ باشد، |a| واحد به سمت راست منتقل می شود.

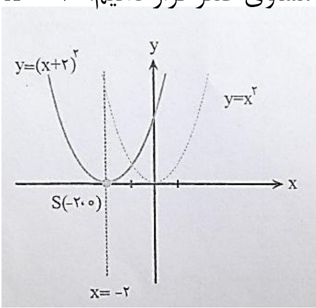
۲) محور تقارن نیز به اندازه ی |a| واحد به سمت چپ یا راست محور y ها منتقل می شود و معادله ی آن به صورت x=-a می شود.

۳) از نظر باز و بسته بودن دهانه ی سهمی با منحنی $f(x)=x^2$ تفاوتی ندارد.

| مثال ۱۵: | |
| --- | --- |
| با استفاده از نمودار $f(x) = x^۲$ نمودار تابع $f(x) = (x + ۲)^۲$ را رسم کنید. | |

حل: نمودار تابع $f(x) = (x + ۲)^۲$ همان نمودار تابع $f(x) = x^۲$ است که راس آن ۲ واحد به سمت چپ روی محور x ها منتقل شده است. بهتر است برای یافتن این عدد عبارت داخل پرانتز را مساوی صفر قرار دهیم: $x+۲=۰ \Rightarrow x= -۲$

پس راس سهمی $S(-۲,۰)$ و محور تقارن $x=-۲$ است.




**پ. رسم تابع درجه ی دوم $f(x) = a(x - h)^2 + k$ به روش انتقال**

- نکته: هان طور که دیدیم راس سهمی هایی به شکل $f(x) = ax^۲$ همان مبدا مختصات بوده و تنها از نظر باز و بسته بودن با $f(x) = x^۲$ تفاوت داشتند. در سهمی هایی به شکل        با انتقال سهمی روی محور x ها به اندازه ی h مختصات راس به نقطه ی (h,۰) و در سهمی های به شکل $f(x) = a(x - h)^۲ + k$ با انتقال سهمی روی محور y ها به اندازه ی k مختصات راس به نقطه ی (۰,k) انتقال یافته است.
- نتیجه:

۱. نمودار تابع $f(x) = a(x - h)^۲ + k$ در واقع همان نمودار $f(x) = ax^۲$ اسن که راس آن به نقه ی (h.k) اتقال یافته است.

تذکر: برای به دست آوردن طول راس ( عدد h ) عبارت داخل پرانتز را مساوی صفر قرار می دهیم.

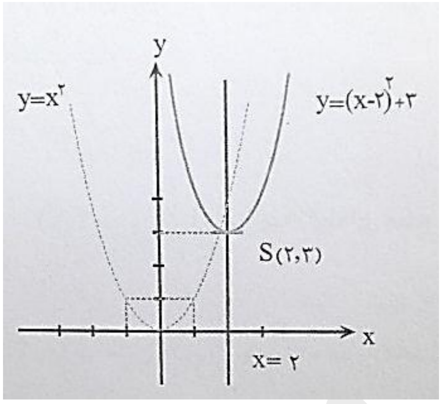
۲. معادله ی محور تقرن این سهمی نیز به صورت x=h می باشد.

۳. ار $a>۰$ باشد سهمی رو به بالا باز می شود و دارای مینیمم (Min) است.

۴. اگر $a<۰$ باشد، سهمی رو به پایین باز می شود و دارای ماکزیمم(Max) است.

**مثال ۱۶:**

با استفاده از تابع $y=f(x)=x^{۲}$ به عنوان راهنما نمودار تابع $y=(x-۲)^{۲}+۳$ را رسم کرده و راس سهمی و معادله محور تقارن آن را مشخص کنید.




حل:نمودار $y=(x-۲)^{۲}+۳$ همان نمودار $y=x^{۲}$ است که راس آن ۲ واحد به راست و ۳ واحد به بالا انتقال یافته است و چون a=۱ عددی مثبت است. پس رو به بالاست و می نیمم (Min) دارد.

طول راس سهمی و معادله ی محور تقارن: x-۲=۰ ⇒ x=۲

راس سهمی S(۲،۳) می باشد که می نیمم سهمی است.

**ت. راس سهمی و نقاط تلاقی سهمی با محور های مختصات**

۱. فرمول مختصات راس سهمی در حالت کلی: در رسم نمودار یک تابع درجه ی دوم تعیین راس سهمی مهم است. برای صورت کلی توابع درجه ی دوم یعنی $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ اگر از روش مربع کامل کردن برای نوشتن تابع به شکل $f(x)=a(x-h)^{۲}+k$ استفاده کنیم آن گاه می توانیم فرمولی برای پیدا کردن مختصات راس (h,k) به دست آوریم.

**مثال ۱۷:**

به روش مربع کامل کردن، راس و معادله ی محور تقارن سهمی $y=x^{۲}+۴x+۳$ را پیدا کنید.

حل: برای تبدیل سهمی به فرم $y=a(x-h)^{۲}+k$ به روش مربع کامل کردن، نصف ضریب x( یعنی b) را به توان ۲ رسانده، به طرفین تساوی اضافه می کنیم:

$$y=x^{۲}+۴x+۳\Rightarrow b=۴\,,(\frac{b}{۲})^{۲}=(\frac{۴}{۲})^{۲}=۴$$

$$y+۴=\underbrace{x^{۲}+۴x+۴}+۳\Rightarrow y+۴=(x+۲(^{۲}+۳-۴\Rightarrow y=(x+۲)^{۲}-۱$$

اتحاد اول

حال برای یافتن طول راس سهمی عبارت داخل پرانتز را مساوی صفر قرار می دهیم:

$x+۲=۰ \Rightarrow X=-۲$

بنابراین x=-۲ معادله ی محور تقارن و S(-۲,-۱) راس این سهمی است.

- فرمول مختصات راس سهمی $f(x) = ax^۲bx + c$ برابر است با$S = (-\frac{b}{۲a}, \frac{۴ac-b^۲}{۴a})$:
- توجه: برای تعیین مختصات راس سهمی، بعد از پیدا کردن طول راس سهمی از رابطه ی $x = -\frac{b}{۲a}$، در تابع داده شده به جای x مقدار به دست آمده را قرار می دهیم تا عرض راس سهمی نیز به دست آید.

| **مثال ۱۸:** | |
|---|---|

مختصات راس و معادله ی محور تقارن سهمی $y = x^۲ + ۴x + ۳$ را با استفاده از فرمول تعیین کنید.

حل: $y = x^۲ + ۴x + ۳ \Rightarrow a = ۱ , b = ۴ , c = ۳$

طول راس و محور تقارن سهمی: $x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(۴)}{۲(۱)} = \frac{-۴}{۲} = ۲ \Rightarrow x = -۲$

مختصات رسم سهمی: $x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲$

۲.نقاط تلاقی سهمی با محور های مختصات:

الف. محل تلاقی سهمی با محور y ها: یک سهمی همیشه محور y ها را در یک نقطه قطع می کند. برای یافتن این نقطه کافی است در معادله ی سهمی به جای x ها عدد صفر قرار دهیم.

| **مثال ۱۹:** | |
|---|---|

سهمی $f(x) = x^۲ - ۲x + ۳$ محور y ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

حل: $y = x^۲ + ۴x + ۳ \Rightarrow a = ۱ , b = ۴ , c = ۳$

بنابراین نقطه ی A(۰،۳) محل تلاقی سهمی با محور y هاست.

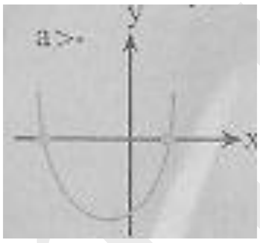
$x = ۰ \Rightarrow y = (۰)^۲ + ۴(۰) + ۳ \Rightarrow y = ۳$

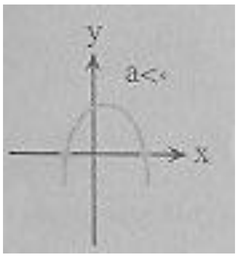
- تذکر: برای یک تابع درجه ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(x) = c$ است یعنی نقطه ی (۰.c) محل تقاطع نمودار تابع با محور y هاست.

ب. محل تلاقی سهمی با محور y ها: برای تعیین محل تقاطع نمودار با محور x ها معادله ی درجه ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را حل می کنیم؛ یعنی در معادله ی سهمی به جای y، عدد صفر قرار می دهیم. این معادله می تواند دارای یک یا دو جواب حقیقی باشد یا اصلا، جواب نداشته باشد. در نتیجه ممکن است نمودار یک تابع درجه ی دوم، محور x ها را در یک یا دو نقطه قطع کند یا اصلا محور x ها را قطع نکند.

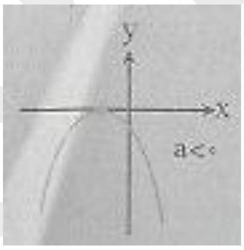
با توجه به مبیّن $(\Delta)$ معادله ی درجه ی دوم به دست آمده نتایج را می توان در نمودار های زیر خلاصه کرد:

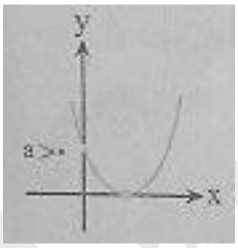
۱. اگر $\Delta > 0$ باشد سهمی محور x ها را در دو نقطه ی مختلف قطع می کند:



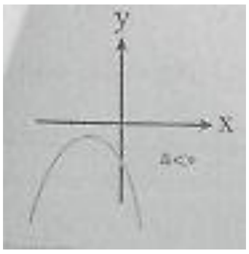



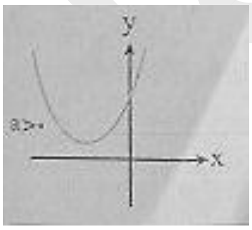

۲. اگر $\Delta = 0$ باشد سهمی محور x ها را در یک نقطه قطع میکند( بر آن مماس است):




۳. اگر $\Delta < 0$ باشد سهمی محور x ها را قطع نمی کند:



**مثال ۲۰:**

سهمی $y=-x^{۲}+۶x-۵$ محور x ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

حل:

$$y=-x^{۲}+۶x-۵\xrightarrow{y=۰}-x^{۲}+۶x-۵=۰ \qquad (a=-۱\,,b=۶\,,c=-۵)$$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(۶)^{۲}-۴(-۱)(-۵)=۳۶-۲۰=۱۶$$

چون $>۰$ است پس نمودار سهمی در دو نقطه محور طول ها را قطع می کند.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۶\pm\sqrt{۱۶}}{۲(-۱)}=\frac{-۶\pm۴}{-۲}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{-۶+۴}{-۲}=\frac{-۲}{-۲}=۱\Rightarrow \quad A(۱\,,۰)\\ x=\frac{-۶-۴}{-۲}=\frac{-۱۰}{-۲}=۵\Rightarrow \quad B(۵\,,۰)\end{cases}$$

**ث: روش رسم تابع درجه ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$**

۱. با استفاده از فرمول $x=\frac{-b}{۲a}$ ، طول راس سهمی و معادله ی محور تقارن را به دست می آوریم.

۲. طول راس سهمی را در معادله ی سهی قرار داده و مختصات راس آن را به دست می آوریم.

۳. به جای x ها در معادله صفر قرار داده و محل تلاقی نمودار نمودار y ها را تعیین می کنیم.

۴. به جای y، ذدر معادله ی صفر قرار داده و محل تقاطع نمودار به محور x ها را تعیین می کنیم.

۵. در صورت لزوم( تکراری بودن نقاط) دو نقطه ای راس سهمی (یک واحد بیش تر از طول راس و یک واحد کم تر از طول راس) پیدا می کنیم.

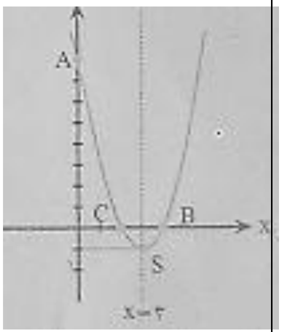
۶. نقاط به دست آمده را روی صفحه ی مختصات مشخص، به هم متصل کرده و ادامه می دهیم.

۷. اگر $a>۰$ باشد، سهمی رو به بالا باز می شود و می نیمم دارد و اگر $a<۰$ باشد سهمی رو به پایین باز می شود و ماکزیمم دارد.

**مثال ۲۱:**

با تعیین راس و نقاط تلاقی سهمی با محور ها، نمودار تابع $f(x) = x^{۲} - ۶x + ۸$ را رسم کنید.

حل:ابتدا طول راس سهمی را با توجه به فرمول $x = \frac{-b}{۲a}$ پیدا می کنیم:




$y = x^{۲} - ۶x + ۸ \quad (a = ۱ \ , b = -۶ \ , c = ۸)$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(-۶)}{۲(۱)} = \frac{۶}{۲} = ۳ \Rightarrow x = ۳ \\ y = (۳)^{۲} - ۶(۳) + ۸ = ۹ - ۱۸_{۸} = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow S(۳\ ,-۱)$$ مختصات راس سهمی

محل تقاطع با محور $y$ ها: $x = ۰ \Rightarrow y = (۰)^{۲} - ۶(۰) + ۸ = ۸ \Rightarrow A(۰\ ,۸)$

محل تقاطع با محور $x$ها: $y = ۰ \Rightarrow x^{۲} - ۶x + ۸ = ۰ \longrightarrow (x - ۴)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \Rightarrow B(۴,۰) \\ x = ۲ \Rightarrow C(۲,۰) \end{cases}$

| | |
|---|---|
| آزمون ۱ | |
| ۱. در معادله ی درجه دوم $۶x^۲ - x + ۳ = ۰$ جمله درجه ۲، جمله درجه ۱ و جمله ثابت را مشخص کنید. | ۰/۷۵ |
| ۲. معادلات را به روش های خواسته شده حل کنید: | ۳ |
| الف) $x^۲ - ۴۹ = ۰$ ( خاصیت ریشه زوج ) | |
| ب) $۲x^۲ - ۵x + ۳ = ۰$ (روش کلی یا $\Delta$ ) | |
| پ) $x^۲ + ۲x = ۰$ (روش تجزیه) | ۱/۲۵ |
| ۳. معادله ی $\sqrt{۳x + ۱} = ۴$ را حل کنید. | |
| ۴. ابتدا مختصات راس و معادله ی خط تقارن سهمی به معادله ی $y = (x + ۱)^۲ - ۴$ را به دست آورده، سپس با استفاده از نمودار $y = x^۲$ آن را رسم کنید. | ۱/۵ |
| ۵. مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله ی $۳x^۲ + ۴x + ۸ = ۰$ را بدون حل معادله به دست آورید. | ۱ |

**پاسخ:**

۱. در این معادله، جمله ی درجه دو برابر $۶x^۲$ (۰/۲۵) و جمله ی درجه ی یک برابر x− (۰/۲۵) و جمله ی ثابت برابر ۳ می باشد. (۰/۲۵)

۲.

الف) $x^۲ - ۴۹ = ۰ \Rightarrow x^۲ ۴۹ \ \left(\frac{\cdot}{۲۵}\right) \Rightarrow x = \pm ۷ \ \ (۰/۵)$

ب) $\Delta = b^۲ - ۴ac = ۲۵ - ۴(۲)(۳) = ۱ > ۰ \Rightarrow$ . دو ریشه ی حقیقی دارد $(۰/۵)$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۵ \pm ۱}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ & (۰/۲۵) \\ x = \frac{۳}{۲} & (۰/۲۵) \end{cases}$$

(۰/۵)

پ) $x^۲ + ۲x = ۰ \Rightarrow x(x + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & (۰/۲۵) \\ x = -۲ & (۰/۲۵) \end{cases}$

(۰/۲۵)

۳.

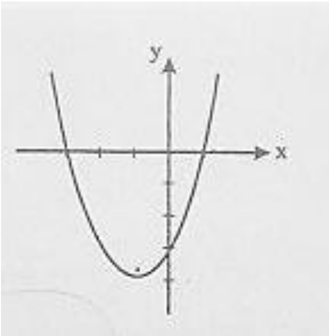
۴. دامنه: $۳x + ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq \frac{-۱}{۳}$

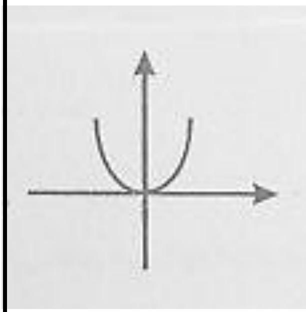
۵. $\sqrt{۳x + ۱} = ۴ \Rightarrow ۳x + ۱ = ۱۶ \Rightarrow x = ۵$ قابل قبول $(۰/۷۵)$

(۰/۵)

۴. مختصات راس سهمی (۴-,۱-)۷ (۰/۵) خط تقارن ۱- = x(۰/۵)

رسم نمودار(۰/۵)



۵.

$$x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} = \frac{-۴}{۳} \qquad (۰/۵)$$

$$x_۱ , x_۲ = \frac{c}{a} = \frac{+۸}{۳} \qquad (۰/۵)$$

**آزمون ۲:**

| فصل دوم | |
|---|---|
| ۱. معادلات را به روش های خواسته شده حل کنید: | ۳ |
| الف) $(x-۱)^۲-۹=۰$ (ریشه زوج) | |
| ب) $x^۲+۵x+۴=۰$ (روش تجزیه) | |
| ج) $۴x^۲-۳x-۱=۰$ (روش مبین یا $\Delta$) | |
| ۲. معادله درجه دومی بنویسید ک جواب های آن ۳- و ۵ باشد. | ۱ |
| ۳. در معادله ی زیر مجموع و حاصل ضرب ریشه را بدون حل معادله به دست آورید. | ۱ |
| $۲x^۲-۴x-۳=۰$ | |
| ۴. معادله $\sqrt{x+۴}=۵$ را حل کنید. | ۱ |
| ۵. ابتدا مختصات راس و معادله محور تقارن سهمی به معادله $y=(x-۱)^۲+۳$ را به دست آورده و سپس نمودار آن را رسم کنید. | ۱/۵ |

پاسخ:

.۱

الف) مرتب کنیم $(x-۱)^۲=۹\Rightarrow$ بگیریم از طرفین جذر $\sqrt{(x-۱)^۲}=\sqrt{۹}\Rightarrow x-۱=\pm۳\begin{cases} x-۱=+۳\Rightarrow ۳+۱=۴ \\ x-۱\pm۳\Rightarrow x=-۳+۱=-۲\end{cases}$

ب) اتحاد جمله مشترک $(x+۱)(x+۴)=۰\begin{cases} x+۱=۰\Rightarrow x=-۱ \\ x+۴=۰\Rightarrow x=-۴\end{cases}$

$a=۴,b=-۳,c=-\frac{۱}{۵}=b^۲-۴ac=(-۳)^۲-۴(۴)(-۱)=+۹+۱۶=۲۵\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=$

ج) $\frac{-(-۳)\pm\sqrt{۲۵}}{۲(۴)}=\frac{۳\pm۵}{۸}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۳+۵}{۸}=\frac{۸}{۸}=۱ \\ \frac{۳-۵}{۸}=\frac{-۲}{۸}=\frac{-۱}{۴}\end{cases}$

.۲

$\left.\begin{array}{l} x=-۳\Rightarrow x+۳=۰ \\ x=۵\Rightarrow x-۵=۰\end{array}\right\}\Rightarrow(x+۳)(x-۵)=۰\Rightarrow x^۲-۵x+۳x-۱۵=۰\Rightarrow x^۲-۲x-۱۵=۰$

راه دیگر : $x_۱=-۳,x_۲=۵$

مجموع ریشه ها : $S = x_۱ + x_۲ = -۳ + ۵ = ۲$
حاصلضرب ریشه ها $P = x_۱ \times x_۲ = -۳ \times ۵ = -۱۵$
$\Rightarrow$ معادله $x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۱۵ = ۰$

۳. $\underbrace{۲}_{a} x^۲ \underbrace{-۴}_{b} x \underbrace{-۳}_{c} = ۰$

$$S = \frac{b}{a} = \frac{-(-۴)}{۲} = ۲ \qquad , \qquad = \frac{c}{a} = \frac{-۳}{۲}$$

۴. ابتدا دامنه را بیابیم.

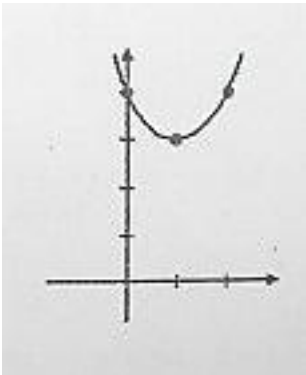
$D =$ عبارت زیر رادیکال $\geq ۰ \Rightarrow x \geq -۴$

طرفین را به توان ۲ برسانیم $(\sqrt{x+۴})^۲ = (۵)^۲ \Rightarrow x + ۴ = ۲۵ \Rightarrow x = ۲۵ - ۴ = ۲۱$ ق.ق

۵.

$\left.\begin{array}{l} y = (x-۱)^۲ + ۳ \\ y = a(x-h)^۲ + k \end{array}\right\} \Rightarrow h = ۱, k = ۳ \Rightarrow$ راس سهمی $(۱,۳)$ و محور تقارن $x = ۱$

| X | ۰ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|
| Y | ۴ | ۳ | ۴ |
| نقطه | (۰،۴) | (۱،۳) | (۲،۴) |



نقطه کمکی $x = ۰ \Rightarrow y = (۰-۱)^۲ + ۳ = +۱ + ۳ = ۴$

نقطه کمکی $x = ۲ \Rightarrow y = (۲-۱)^۲ + ۳ = ۱ + ۳ = ۴$