

فصل دوم

الگوهای خطی

❖ درس اول: مدل سازی و دنباله

❖ درس دوم: دنباله حسابی

شهریور ادی	نوبت دوم	نوبت اول
۵/۵	۵/۵	۵ تا ص ۶۰)

بارم فصل ۲:

فصل ۲ درس ۱: مدل سازی و دنباله

اهداف درس ۱:

- یادآوری مدل سازی مسائلی از دنیای واقعی و تفسیر نمودار تابع آنها.
- به کارگیری نمایش های مختلف ریاضی برای درک بهتر و تجزیه و تحلیل مفاهیم ریاضی.
- تشخیص دامنه توابع مدل شده ریاضی با استفاده از مفاهیم اساسی اعداد طبیعی و اعداد حقیقی.
- آشنایی با کاربردی دیگر از مجموعه اعداد طبیعی و درک رفتار تابع در این مجموعه.
- آشنایی با مفهوم الگوهای خطی و ارتباط آنها با دنیای واقعی.
- آشنایی با مفهوم دنباله و رسم نمودار آن.
- تشخیص الگوی موجود در برخی دنباله ها و پیدا کردن رابطه بازگشتی و نمایش تابعی آنها.
- توانایی در حل مسئله ریاضی و حل مسائلی از دنیای واقعی.

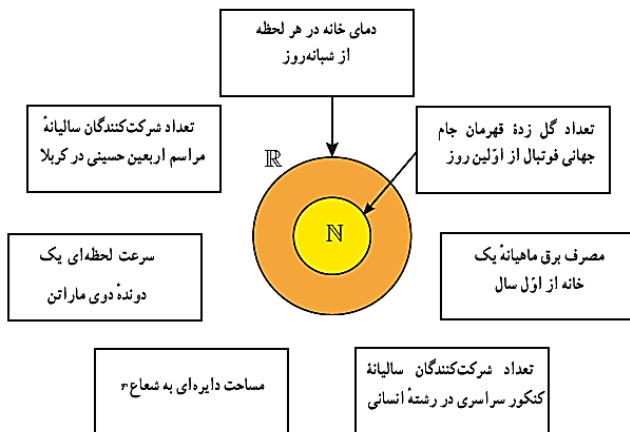
* اگر دامنه تابع نتواند عدد اعشاری بگیرد، دامنه آن زیرمجموعه \mathbb{N} است

* اگر دامنه تابع بتواند عدد اعشاری بگیرد، دامنه آن زیرمجموعه \mathbb{R} است

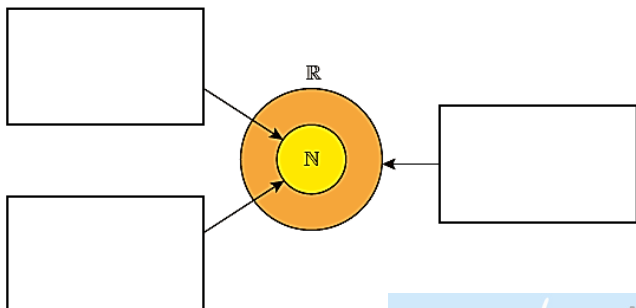
* توابعی که پاسخ آنها وابسته به بررسی مسئله در مرحله یا گام اول، دوم، ... و n ام است، دامنه آن زیرمجموعه \mathbb{N} است

(کاردرگلاسی (و ۲ هج ۴۸)

① اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، مانند نمونه، دامنه هر کدام از مسائل را مشخص کنید.



② داخل هر کدام از مستطیل های زیر مسئله ای را بنویسید که دامنه مدل ریاضی آن مطابق شکل زیر باشد:



مفهوم مدل سازی:

* بیان مسئله به زبان ریاضی را مدل سازی ریاضی می گوئیم.

* سال ۱۰ و ۱۱ به کمک مفهوم تابع مسئله ها را مدل سازی کردیم مثل: محاسبه قبض برق یک خانه، مدل ریاضی چراغ راهنمایی رانندگی و ... امسال می خواهیم الگوها را به کمک مفهوم تابع مدل سازی کنیم.

* ورودی های یک تابع را دامنه می نامیم و اگر f مدل ریاضی هر مسئله باشد در این صورت دامنه تابع زیر مجموعه ای از اعداد طبیعی (\mathbb{N}) یا اعداد حقیقی (\mathbb{R}) می باشد.

(تقریباً ۵۷)

② اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام را مشخص کنید.

الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر $\square \mathbb{R} \quad \square \mathbb{N}$

ب) میزان استفاده دانش آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت $\square \mathbb{R} \quad \square \mathbb{N}$

ج) حجم مکعبی به ضلع x $\square \mathbb{R} \quad \square \mathbb{N}$

د) تغییرات سطح دریاچه ارومیه د بیست سال اخیر $\square \mathbb{R} \quad \square \mathbb{N}$

ه) میزان مصرف ماهیانه آب در یک واحد مسکونی $\square \mathbb{R} \quad \square \mathbb{N}$

مفهوم الگو دنباله:

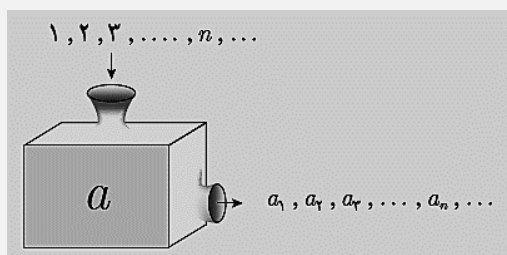
* کلمه دنباله در ریاضیات، اصطلاحی است که یک مجموعه از اشیایی را مشخص می کند که با ترتیبی آراسته شده باشند.

* الگوی اعداد حقیقی را که در آن تعدادی عدد حقیقی پشت سر هم قرار دارند دنباله اعداد حقیقی می نامند.

* نمایش ماشینی تابع (دنباله) از ۳ قسمت تشکیل شده است:
۱. ورودی (دامنه دنباله)، که مجموعه اعداد طبیعی است

۲. سیستم انجام عملیات ریاضی (ضابطه دنباله)، که جملات دنباله را می سازد

۳. خروجی (برد دنباله)، که مجموعه اعداد حقیقی است



* هر گاه دامنه دنباله، قطعه ای از اعداد طبیعی باشد، دنباله متناهی خواهد بود.

کاربرد دیگر از مجموعه اعداد طبیعی:

در بسیاری از مسائل واقعی که وابسته به زمان اند، ممکن است بررسی تابع در هر لحظه امکان پذیر نباشد.

در این حالت، با انتخاب نقاطی با فاصله زمانی یکسان (تشکیل یک سری زمانی) رفتار تابع را به طور تقریبی بررسی می کنیم.

برای مثال، از لحاظ نظری یک پزشک می تواند میزان یک دارو را در بدن بیمار در هر لحظه از شبانه روز اندازه گیری کند اما در عمل او با فواصل زمانی یکسان (مثلاً در هر یک ساعت، از زمان بستری شدن بیمار) به کمک آزمایش، میزان دارو را در بدن بیمار بررسی می کند.

به بیان ریاضی، این پزشک رفتار تابعی را که در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است، در مجموعه اعداد طبیعی بررسی می کند (میزان دارو در اولین آزمایش، دومین آزمایش و...).

(مثال ص ۵۴)

برای جملات دنباله زیر:

۳, ۹, ۲۷, ۸۱, ۲۴۳, ...

الف) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

ب) ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید.

مثلث خیام:

* ابتدا و انتهای هر سطر، برابر یک است.

* هر عدد در سطر پایینی از جمع دو عدد بالای آن سطر به

دست می آید

```

      ۱
     ۱ ۱
    ۱ ۲ ۱
   ۱ ۳ ۳ ۱
  ۱ ۴ ۶ ۴ ۱
 ۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

```

(فعالیت ص ۵۲)

دنباله ۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ... مجموع اعداد هر سطر در مثلث خیام

است:

الف) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

ب) ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید.

حالت های مختلف نمایش یک دنباله:

۱. جملات دنباله

۲. رابطه بازگشتی

۳. ضابطه دنباله

۴. نمودار دنباله

* جملات دنباله عموماً به صورت زیر نشان داده

می-شوند. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ * a_n را جمله n ام دنباله می نامند که می تواند به دو

صورت زیر بیان شود:

الف) رابطه بازگشتی دنباله (رابطه ای که بیانگر ارتباط

جملات دنباله با یکدیگر است یا رابطه هر جمله با جمله

قبلی اش که نوشتن جمله اول الزامی است یا رابطه

 (a_n, a_{n+1})

ب) نمایش تابعی دنباله یا ضابطه تابعی دنباله (رابطه

هر جمله با شماره جمله یا رابطه (n, a_n))

(مثال ص ۵۳)

برای جملات دنباله زیر:

۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ۱۶, ...

الف) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

☑ حل: با در نظر گرفتن $a_1 = 4$ ، بقیه جملات با اضافه کردن

عدد ثابت ۳ به جمله قبلی به دست می آید

جمله بعدی	جمله قبلی
a_{n+1}	a_n

$$\text{رابطه بازگشتی دنباله} \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

ب) ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید.

شماره جمله	۱	۲	۳	۴	۵	...	n
مقدار جمله	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	...	$3n + 1$

☑ حل:

$$a_n = 3n + 1 \text{ : ضابطه تابعی دنباله}$$

دنباله دو ضابطه ای:

برای نوشتن دنباله ها به صورت دو ضابطه ای اغلب جملات زوج و فرد را جدا کرده و بعد از نوشتن ضابطه آن‌ها، دنباله را به صورت دو ضابطه ای می نویسیم

(مثال)

دنباله $5, 1, 5, 1, \dots$ را به صورت دو ضابطه ای بنویسید

✓ حل: جملات فرد دنباله $5, 5, 5, 5, \dots$

جملات زوج دنباله $1, 1, 1, 1, \dots$

دنباله دو ضابطه ای $a_n = \begin{cases} 5 & \text{فرد } n \\ 1 & \text{زوج } n \end{cases}$

(تمرین ۷ ص ۵۹) ⑦ جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	رابطه بازگشتی	ضابطه دنباله	دنباله دو ضابطه ای
$5, 8, 11, 14, 17, \dots$			
$4, 1, 4, 1, 4, 1, \dots$			
$1, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, \dots$			
$1, 2, 3, 4, 5, \dots$			

نوشتن جملات یک دنباله با داشتن جمله n ام:

وقتی جمله n ام یک دنباله را داریم، برای نوشتن جملات یک دنباله، باید شماره جمله $(1, 2, 3, \dots)$ را جای n قرار دهیم.

(گاردو کلاسی ص ۵۴)

پنج جمله اول دنباله های زیر را بنویسید.

$$1) a_n = 3n - 2$$

n	۱	۲	۳	۴	۵
a_n	۱	۴	۷	۱۰	۱۳

✓ حل:

جملات دنباله $1, 4, 7, 10, 13$

$$2) b_n = n^2 - 1$$

$$3) c_n = \frac{1}{n}$$

$$4) d_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

(تمرین ۵۸)

⑥ جمله پنجم دنباله های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

۱) $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n, a_1 = -2$

جملات دنباله: $-2, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{-2}{27}, \frac{-2}{81}$

☑ حل:

n	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$
۱	$a_{1+1} = \frac{1}{3} a_1 = \frac{1}{3} (-2) = \frac{-2}{3}$
۲	$a_{2+1} = \frac{1}{3} a_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{-2}{3} \right) = \frac{-2}{9}$
۳	
۴	

۲) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, a_1 = 1$

۳) $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}, a_1 = a_2 = a_3 = 1$

۴) $a_{n+1} = a_n + (-1)^n, a_1 = 1$

(تمرین ۵۹)

⑧ شش جمله اول دنباله بازگشتی

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} a_n & \text{فرد } n \\ 3a_n - n & \text{زوج } n \end{cases}$$

زیر بنویسید.

الف) $a_1 = 11$

ب) $a_1 = 25$

(تمرین ۵۸)

با توجه به $a_n = 3^n$ و $b_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}$ و $d_n = n^2 - 1$

حاصل عبارت های خواسته شده را بیابید. $c_n = \frac{1}{3n-1}$

الف) $a_4 + b_4 =$

ب) $c_4 - d_4 =$

ج) $b_4 + d_4 =$

$$۴) d_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

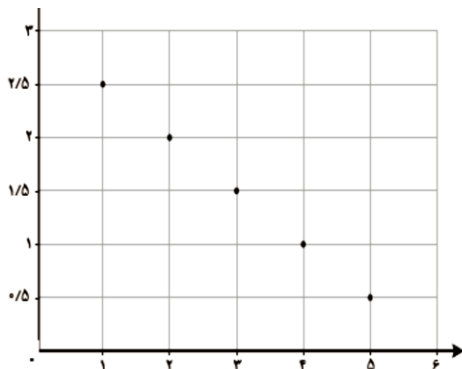
$$۵) e_n = 3^n$$

$$۶) f_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(تمرین ۹ ص ۵۹)

نمودار دنباله های زیر را برای $n \leq 5$ رسم کنید.

$$۱) a_n = -\frac{1}{2}n + 3$$

حل: 

n	a_n
۱	۲/۵
۲	۲
۳	۱/۵
۴	۱
۵	۰/۵

نمودار دنباله:

* شماره جمله همان طول نقطه و مقدار جمله همان عرض نقطه است که این نقاط را روی محور مشخص می کنیم

$$(n, a_n)$$

مقدار جمله و شماره جمله

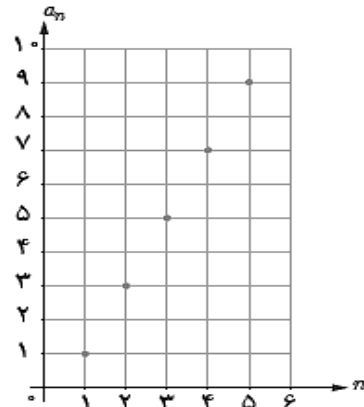
* با توجه به دامنه دنباله که اعداد طبیعی است پس نقاط در ربع اول یا چهارم قرار می گیرند.

* در نمودار دنباله، نیازی نیست که نقاط را به هم وصل کنیم

(مثال ص ۵۵)

جملات دنباله های زیر را نوشته و نمودار آن ها را رسم کنید.

$$۱) a_n = 2n - 1$$



جملات دنباله: ۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ...

$$۲) b_n = 1 - n$$

$$۳) c_n = (n - 2)^2$$

حل:

n	a_n
۱	۱
۲	۳
۳	۵
۴	۷
۵	۹

ب) ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید.

$$۲) a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

ج) نمودار دنباله را رسم کنید.

$$۳) a_{n+1} = \frac{1}{a_n}, \quad a_1 = 2$$

۲. برای جملات دنباله های زیر ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید و نمودار دنباله را رسم کنید

الف) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots$

$$۴) a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{n} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

ب) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots$

(گاردنر کلاسی ص ۵۶)

۱. برای جملات دنباله $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$

۳. برای دنباله $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n, \quad a_1 = 1$

الف) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

الف) جملات دنباله را بنویسید

(تمرین ۴ ص ۸۵)

۴) اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y = 4x - 1$ پیروی کنند، با توجه به دامنه دنباله: الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

(ب) ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید.

(ج) نمودار دنباله را رسم کنید.

ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید

$$4. \text{ برای دنباله } a_{n+1} = a_n + n, a_1 = 1$$

الف) جملات دنباله را بنویسید.

ج) شیب خط چه ارتباطی با رابطه بازگشتی دنباله دارد؟

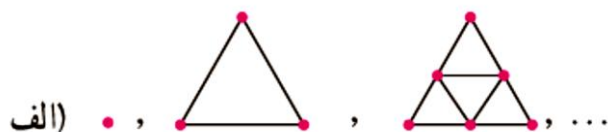
(ب) نمودار دنباله را رسم کنید.

(تمرین ۱۱ ص ۶۰)

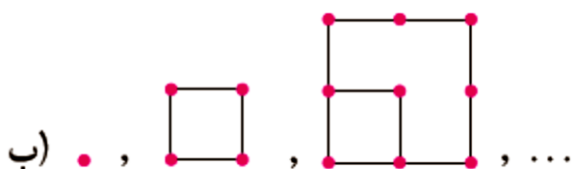
۱۱) جملات دنباله بازگشتی

$a_{n+1} = a_n + (n+1), a_1 = 1$ رأس کدام یک از الگوهای زیر را مشخص می کنند؟

$$5. \text{ برای دنباله } a_n = 2n + 1$$



الف) جملات دنباله را بنویسید



(ب) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

دنباله فیبوناچی:

* دنباله ای که جمله اول و دوم آن عدد یک است و هر جمله آن از مجموع دو جمله قبلی اش به دست می آید و رابطه بازگشتی آن به صورت:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1$$

(ج) نمودار دنباله را رسم کنید.