

فصل ۲ درس ۲: دنباله های حسابی

اهداف درس ۲:

- تشخیص ارتباط مفهومی میان مفاهیم الگوهای خطی و دنباله حسابی.
- آشنایی با مفهوم دنباله حسابی و یافتن اختلاف مشترک آن.
- شناسایی و تشخیص دنباله حسابی در بین دنباله ها و به دست آوردن جمله عمومی آن.
- آشنایی با قواعد دنباله حسابی و به کارگیری آنها در حل مسائل.
- شناخت کاربرد مفهوم دنباله حسابی در برخی پدیده های دنیای واقعی.
- مهارت در یافتن مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی.

(کاردرگلاسی ۲ ص ۶۴)

② مثبت یا منفی یا صفر بودن اختلاف مشترک چه تأثیری در جملات دنباله حسابی دارد؟

✓ حل: اگر (d) مثبت باشد دنباله افزایشی، اگر (d) منفی باشد دنباله کاهشی و اگر (d) صفر باشد دنباله ثابت است.

دنباله افزایشی $\rightarrow d = 3 \rightarrow 2, 5, 8, 11, 14, \dots$

دنباله کاهشی $\rightarrow d = -3 \rightarrow 4, 1, -2, -5, -8, \dots$

دنباله ثابت $\rightarrow d = 0 \rightarrow 2, 2, 2, 2, 2, \dots$

(کاردرگلاسی ۳ ص ۶۴)

③ جدول زیر را کامل کنید.

a_1	d	جمله اول	a_n
۲	۳	۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴	$a_n = 2 + 3(n - 1)$
		۴, ۱, -۲, -۵, -۸	
			$a_n = -3 + 5(n - 1)$
۴	$-\frac{1}{2}$		

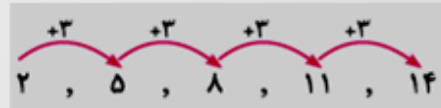
(تمرین ۲ ص ۷۱)

② در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۵۵۵ است؟

دنباله حسابی:

• دنباله هایی که هر جمله آنها به جز جمله اول، از اضافه شدن یک عدد ثابت به جمله پیشین به دست می آید، دنباله های حسابی نامیده می شوند.

• به آن عدد ثابت، اختلاف مشترک (قدر نسبت) دنباله می گویند. زیرا همه جملات دنباله در یک ویژگی مشترک اند یعنی اختلاف هر جمله از جمله قبلی مقدار ثابت d است.



• جملات دنباله حسابی:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots$$

• جمله عمومی دنباله حسابی:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 جمله جمله شماره اختلاف
 ام n اول جمله مشترک

ضابطه بازگشتی دنباله حسابی:

با جمع شدن هر جمله با اختلاف مشترک جمله بعدی به دست می آید. بنابراین:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + d \\ a_1 \end{cases}$$

(تقریبی ۱ ص ۷۱)

① با نوشتن جملات رابطه های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است.

۱) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}, a_1 = 2$

۲) $a_{n+1} = a_n + 5, a_1 = -1$

۳) $a_{n+1} = 5a_n + 1, a_1 = -1$

۴) $a_{n+1} - a_n = n$

* هر دنباله حسابی یک تابع خطی است که شیب خط آن

$$y = mx + h$$

همان d است

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

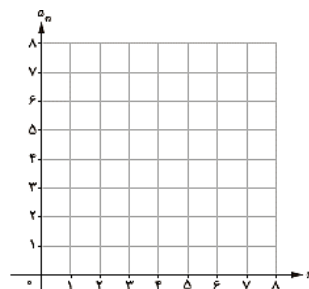
(گاردو گلاسی ص ۶۷)

۱) با توجه به ضابطه تابع خطی $y = -x + 4$:

الف) ضابطه دنباله را بنویسید.

ب) جمله اول دنباله را بنویسید.

پ) نمودار دنباله را رسم کنید.

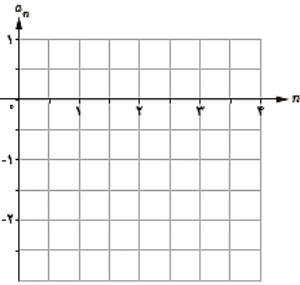


۲) با توجه به ۴ جمله اول دنباله $-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2$:

الف) ضابطه دنباله را بنویسید.

ب) ضابطه تابع خطی را بنویسید.

پ) نمودار دنباله را رسم کنید.



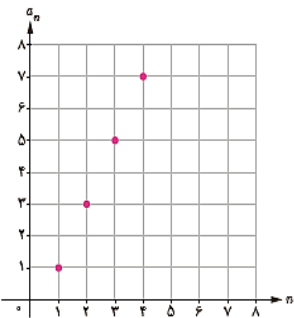
۲) با توجه به نمودار دنباله زیر:

الف) جمله اول دنباله

را بنویسید.

ب) ضابطه دنباله را بنویسید.

پ) ضابطه تابع خطی را بنویسید.



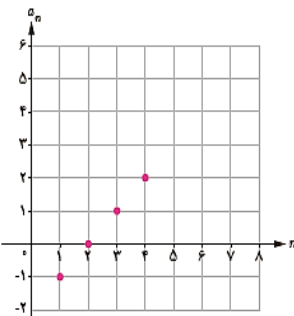
۳) با توجه به نمودار دنباله زیر:

الف) جمله اول دنباله

را بنویسید.

ب) ضابطه دنباله را بنویسید.

پ) ضابطه تابع خطی را بنویسید.



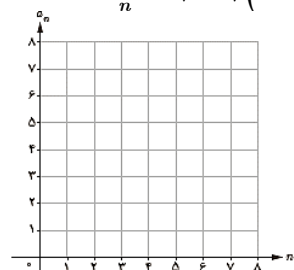
(فعالیت ص ۶۶)

با توجه به ضابطه دنباله حسابی $a_n = 3 + 2(n-1)$:

الف) جمله اول دنباله را بنویسید.

ب) ضابطه تابع خطی را بنویسید.

پ) نمودار دنباله را رسم کنید.



(کاردر کلاسی ص ۶۴)

در یک منطقه، مقنی پس از حفر چاه در عمق ۳۰ متری شروع به حفر کانال قنات کرده است. عمق میله اول ۲۹/۵ متر و میله دوم ۲۹ متر بوده، اگر عمق آخرین میله ۱/۵ متر باشد، این مقنی در مجموع چند چاه حفر کرده است؟

حل:

$$30, 29/5, 28/5, \dots, 1/5$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$1/5 = 30 + (n-1) \times -\frac{1}{5} \Rightarrow n-1 = 57 \Rightarrow n = 58$$

(فعالیت ص ۶۶)

اگر شخصی با مصرف یک قرص آسپرین، ۲۵۰ میلی گرم دارو به بدنش وارد شود و پس از پایان هر یک ساعت ۱۵ میلی گرم دارو در سطح خونس کاهش یابد. چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش ۱۳۰ میلی گرم می شود؟ حل:

$$a_1 = 250 - 15 = 235$$

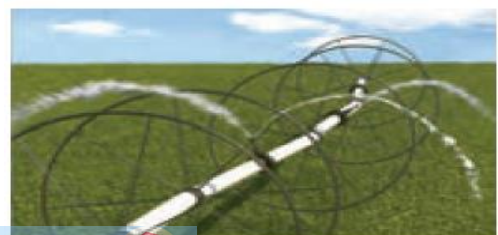
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$130 = 235 + (n-1) \times (-15)$$

$$-105 = -15n + 15 \rightarrow -15n = -120 \rightarrow n = 8$$

(تمرین ۴ و ۵ ص ۷۱)

۴) برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره ای استفاده می شود؛ به این صورت که یک میله که در آن سوراخ هایی برای پخش آب تعبیه شده است، به کمک چرخ هایی مطابق شکل مقابل حول یک محور می چرخد. اگر فاصله اولین چرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصله هر چرخ تا چرخ بعدی ۵ متر باشد و در کل، ۱۲ چرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی آبیاری می شود؟ (آخرین چرخ دقیقا در انتهای میله قرار دارد.)



حل:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_{12} = 3 + (12-1) \times 5 = 58$$

$$S = \pi r^2 \approx 3/14 \times (58)^2 = 10562/96 \text{ متر مربع}$$

۵) در یک کارخانه سنگ بری برای صیقل دادن سنگ ها از یک صفحه به وزن ۱۲۵۰۰ گرم استفاده می شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به طور میانگین ۱۸۷۵ گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم وزن صفحه چقدر است؟

حل:

$$a_1 = 12500 - 1875 = 10625, \quad d = -1875$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_6 = 10625 + (6-1) \times (-1875) = 1250$$

* اگر جمله m ام و n ام یک دنباله حسابی معلوم باشد، اختلاف مشترک را می توان از فرمول زیر به دست آورد:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

(تمرین ۳ ص ۷۱)

یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی ام این دنباله را مشخص کنید.

حل:

$$a_{11} = 52, a_{19} = 92 \rightarrow d = \frac{92-52}{19-11} = \frac{40}{8} = 5$$

$$a_{11} = a_1 + (11-1)d \rightarrow 52 = a_1 + 10 \times 5 \rightarrow a_1 = 2$$

$$a_{30} = a_1 + (30-1)d \rightarrow a_{30} = 2 + 29 \times 5 = 147$$

* درج یک واسطه حسابی بین دو عدد:

اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، در

$$b = \frac{a+c}{2} \quad \text{اینصورت:}$$

مثال:

واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

(گاردو کلاسی ۱ ص ۷۰ و تمرین ۸ ص ۷۱)

مجموع دنباله های حسابی زیر را به دست آورید.

۱) $-1, 4, 9, \dots, 199$

۲) $1, 5, 9, \dots, 401$

۳) $89, 85, 81, \dots, 13$

۴) $a_{n+1} = 5 + a_n$, $a_1 = -2$

*درج چند واسطه حسابی بین دو عدد:

اگر بخواهیم بین a, b چند عدد (n) درج کنیم که تشکیل

یک دنباله حسابی دهند مقدار d را از رابطه زیر می یابیم:

$$d = \frac{b - a}{n + 1}$$

(تمرین ۷ ص ۷۱)

⑦ سه عدد را به گونه ای میان اعداد ۱۰ و ۱۸ قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

مجموع n جمله اول یک دنباله عددی (حسابی):

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d]$$

*اگر جمله اول و آخر را داشتیم از رابطه:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

(گاردو کلاسی ۲ ص ۷۰)

② مجموع سی جمله اول اعداد فرد را به دست آورید.

(کاردر کلاسی ۳ ص ۷۰)

③ یک طراح داخلی برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای داشتن سالنی با ۸۷۰ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟

☑ حل:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \rightarrow 870 = \frac{n}{2}(2 \times 15 + (n-1) \times 3)$$

$$3n^2 + 27n - 1740 = 0 \xrightarrow{+3} n^2 + 9n - 580 = 0 \rightarrow$$

$$(n - 20)(n + 29) = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 20 \\ n = -29 \times \end{cases}$$

(تمرین ۹ ص ۷۲)

⑨ باغ داران برای چیدن میوه ها از نردبان هایی استفاده می کنند اگر عرض نخستین پله این نردبان ۱۲۵ سانتی متر و عرض آخرین پله آن ۴۵ سانتی متر در نظر گرفته شود و هر پله ۱۰ سانتی متر کوتاه تر از پله پیشین باشد، این نردبان چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله ها به چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟