

## فصل سوم : اصول شمارش

الف) اصل ضرب ( اصل شمارش): اگر کار A را به n طریق، لافاصله پس از آن کار B را به m طریق، ... و بلافاصله پس از آن کار S را به طریق p مختلف بتوان انجام داد. آن گاه تعداد حالت هایی که می توان کار های A، B، ... و S را با هم انجام داد برابر است با :

$$n \times m \times \dots \times p = \text{تعداد حالت ها}$$

مثال ۱:
<p>اگر علی سه پیراهن به رنگ های آبی، سفید و زرد داشته باشد و دو شلوار به رنگ های سیاه و کرم و دو جفت کفش به رنگ های قهوه ای و نارنجی داشته باشد، به چند طریق می تواند از لباس های خود استفاده کند؟</p> <p>✓ پاسخ: طبق اصل ضرب تعداد حالت های مختلف انجام این سه عمل، یعنی انتخاب پیراهن، شلوار و کفش در هم ضرب می شوند:</p> <p>راه های مختلف استفاده از لباس ها: <math>3 \times 2 \times 2 = 12</math></p>

نکته ۱: "و" نشان دهنده ی اصل ضرب است.

ب) اصل جمع: اگر فقط یک کار ( مانند A ) را بتوان به n یا m یا ... یا p طریق مختلف انجام داد، آن گاه تعداد حالت هایی که می توان آن کار را انجام داد برابر است با:

$$m+n+\dots+p = \text{تعداد حالت ها}$$

مثال ۲:
<p>مریم برای رفتن از منزل به دانشکده می تواند از یکی از ۳ خط مترو استفاده کند. مریم به چند طریق میتواند به دانشکده برود؟</p> <p>✓ پاسخ:</p> <p>راه های مختلف رفتن از منزل به دانشکده: <math>3+4=7</math></p>

نکته ۲: "یا" نشان دهنده ی اصل جمع است.

نکته ۳: اگر در یک تصمیم گیری چند مرحله ای، انتخاب راه های پاسخ به هر قسمت وابسته به قسمت قبلی باشد، این انتخاب ها را وابسته گوئیم و اگر انتخاب پاسخ برای هر قسمت به پاسخ مرحله ی دیگر وابسته نباشد، آن ها را مستقل از هم می گوئیم.

**فاکتوریل:** اگر  $h$  یک عدد طبیعی باشد آن را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$h! = h \times (h-1) \times (h-2) \times (h-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

### جایگشت:

جایگشت: هر یک از راه های ممکن قرار گرفتن  $n$  شی مختلف در کنار یک دیگر، یک جایگشت از آن  $n$  شی نامیده می شود. به عبارت ساده تر طرز قرار گرفتن اشتیا را در کنار هم، تعداد جایگشت های  $n$  شی متمایز (مختلف) در کنار هم با  $p_n$  نمایش داده می شود و برابر  $n!$  است.

مثال ۳:
سه هم دانشگاهی به نام های علی، محسن و امیر به چند طریق می توانند روی یک نیمکت بنشینند؟
✓ پاسخ: تعداد جایگشت های ۳ نفر در کنار هم از ما خواسته شده که عبارت است از:
$N! = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

## مثال ۴:

با حروف کلمه ی "Magnet" چند کلمه ی ۶ حرفی متمایز می توان ساخت به طوری که هیچ حرفی تکرار نشود؟

✓ پاسخ: کلمه ی "Magnet" دارای ۶ حرف متمایز است، بنابراین خواهیم داشت:

$$۷۲۰ = ۶! = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = \text{تعداد کلمات مطلوب}$$

ببخشید استاد: اگر سوال می گفت با حروف کلمه ی "Magnet" چند کلمه ۴ حرف متمایز، بدون تکرار حروف، می توان

ساخت؟ بازم به صورت  $n! = ۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$  عمل می کردیم؟

پاسخ: جواب منفیه، ولی سوال خوبی کردی.

چون کلمه ی "Magnet" ۶ حرفی است و ما تعداد کلمات ۴ حرفی را می خواهیم، ۴ جای خالی به صورت زیر در نظر می

یریم. اولین خونه ی سمت چپ به ۶ حالت مختلف می تونه پر بشه (یکی از حروف M, a, g, n, e, t خونه ی بعدی به ۵

حالت پر می شه) چون از یک حرف در خونه ی قبلی استفاده کردیم) به همین ترتیب خونه های بعدی به ۴ حالت و ۳ حالت

قابل پر شدن هستن. لذا طبق اصل ضرب داریم:

۶	۵	۴	۳
---	---	---	---

$$\Rightarrow ۳۶۰ = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ = \text{تعداد کلمات (جایگشت های) ۴ حرفی مورد نظر}$$

استاد اگه سوال بگه با حروف کلمه "Magnet" کلمات ۳ حرفی می سازیم بازم از همین روش پر کردن خونه ها استفاده

می کنیم؟

پاسخ: دقیقا همین طوره. چون ۳ و ۲ از ۶ کم تر هستن. (کلمه ی "Magnet" دارای ۶ حرفه)

## جایگشت با تکرار

به طور کلی، تعداد جایگشت های  $n$  شی که در آن  $a_1$  شی مثل هم،  $a_2$  شی مثل هم، ... و  $a_k$  شی مثل هم باشند، برابر است با:

$$\text{تعداد جایگشت ها} = \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!}$$

## مثال ۵:

حروف کلمه ی "ساسان" چند جایگشت دارد؟ (با حروف کلمه ی ساسان چند کلمه ی ۵ حرفی می توان ساخت؟)

✓ پاسخ: در کلمه ی "ساسان" حرف "الف" ۲ بار و حرف "س" نیز ۲ بار تکرار شده و تعداد کل حروف نیز برابر ۵ می باشد، پس خواهیم داشت:

$$\text{تعداد جایگشت ها} = \frac{5!}{2! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 30$$

## مثال ۶:

با ۵، ۸، ۸، ۸، ۹ و ۹ چند عدد ۶ رقمی مختلف می توان ساخت؟

✓ پاسخ: با توجه به این که ۸ سه بار و ۹ دو بار و تعداد کل ارقام نیز ۶ می باشد می توان نوشت:

$$\text{تعداد جایگشت ها (اعداد ۶ رقمی)} = \frac{6!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3! \times 2!} = 60$$

به خاطر تکرار عدد ۹      به خاطر تکرار عدد ۸

## مسائل ترتیب

تعداد جایگشت های  $r$  شی از  $n$  شی را که ترتیب قرار گرفتن آن ها در کنار هم مهم است. ترتیب  $r$  شی از  $n$  شی می گوئیم و با نماد  $P(n,r)$  نمایش می دهیم:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

تذکر: در رابطه ی فوق  $r$  و  $n$  هر دو عدد طبیعی می باشند و  $r \leq n$  است.

مثال: از بین ۶ کارمند می خواهیم نفر اول را به عنوان رییس، نفر دوم معاون و نفر سوم را دفتر دار انتخاب کنیم به چند طریق این کار را می توان انجام داد؟

$$P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

## مسائل ترکیب

اگر بخواهیم از بین  $n$  شی  $r$  شی را انتخاب کنیم به طوری که ترتیب انتخاب ها مهم نباشد، از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

تذکر: در رابطه ی فوق  $r$  و  $n$  اعداد طبیعی بوده و  $r \leq n$  می باشد.

نکته: به طور کلی اگر در مسائل کلماتی مانند " کمیته، انجمن، تیم، گروه، دسته، مجموعه، زیر مجموعه و..." آمده باشد، معمولا بیان گر این موضوع هستند که باید آن ها را از راه ترکیب حل کنیم. در واقع در این حالت ها انتخاب به صورت یکجا صورت می گیرد و ترتیب آن ها مهم نیست.

## مثال ۷:

از بین ۵ کارمند می خواهیم یک انجمن سه نفره تشکیل دهیم به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

✓ پاسخ: چون ترتیب انتخاب این سه نفر مهم نیست، بنا براین با یک مساله ی ترکیب مواجه هستیم:

$$C(5,3) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = 10$$

## مثال ۸:

یک مجموعه ی ۶ عضوی چند زیر مجموعه ی ۴ عضوی دارد؟

✓ پاسخ: برای به دست آوردن تعداد زیر مجموعه های  $r$  عضوی از یک مجموعه ی  $n$  عضوی از ترکیب  $\binom{n}{r}$  استفاده

می کنیم:

$$\text{تعداد زیر مجموعه ها} = \binom{n}{r} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2! \times 4!} = \frac{30}{2} = 15$$

آزمون ۱	
۱	<p>۱. در یک میز غذا ۲ نوع سوپ، ۴ نوع پلو، ۳ نوع سالاد وجود دارد. به چند روش می توان یک وعده غذایی که شامل یک نوع سوپ، یک نوع پلو و یک نوع سالاد باشد، انتخاب کرد؟</p> <p>۲. الف) چند کلمه ۳ حرفی بدون تکرار با حروف کلمه ی "هرمزگان" می توان نوشت؟ (با معنی و بی معنی)</p> <p>ب) با حروف کلمه "ایرانیان" چند ترتیب مختلف می توان ساخت؟</p> <p>۳. درستی تساوی روبرو را نشان دهید:</p>
۲	<p>۱. <math>C(n, n) = C(n, 0)</math></p> <p>۴. کدام یک از تساوی های زیر درست، و کدام یک نادرست است؟</p> <p>الف) <math>p(5, 2) = \frac{5!}{3!}</math> (ب) <math>\frac{4!}{2!} = 2!</math></p> <p>پ) <math>1! + 3! + 4! = 8!</math> (ت) <math>C(4, 3) = 4</math></p>

پاسخ:

$$2 \times 4 \times 3 = 24 \quad (۱)$$

۱.

$$p(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210 \quad (۱)$$

۲. الف)

$$\frac{8!(0/25)}{3! \times 2! \times 2!(0/75)}$$

ب)

۳.

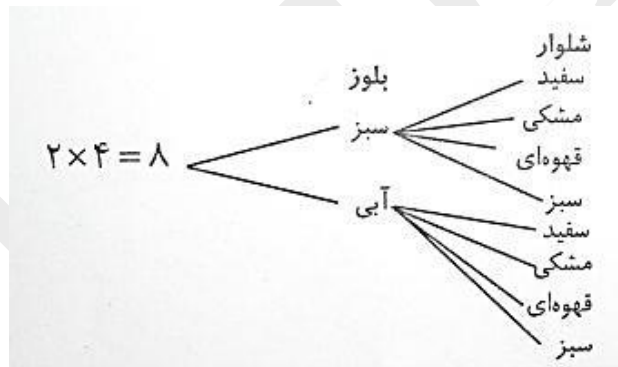
$$C(n, n) = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1 \quad (0/5)$$

$$C(n, 0) = \frac{n!}{n!(n-0)!} = 1 \quad (5)$$

۴. الف) درست (ب) نادرست (پ) نادرست (ت) درست هر دو مورد (۰/۲۵)

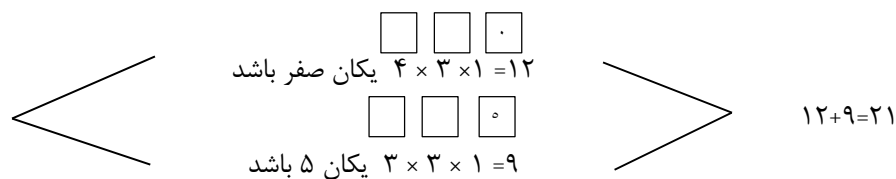
آزمون ۲	
۱	۱. اگر ۲ بلوز به رنگ های سبز و آبی و ۴ شلوار به رنگ های سفید، مشکی، قهوه ای و سبز داشته باشیم، به چه طریق می توان آن ها را پوشید؟ نمودار درختی آن را رسم کنید.
۲	۲. جایگشت های متمایز کلمه <u>شهریار</u> با کدام زیر یکسان است؟ (الف) کیخسرو (ب) طهماسب (ج) اردشیر (د) فریدون
۱	۳. با ارقام ۲ و ۰ و ۹ و ۳ و ۵ چند عدد سه رقمی می توان نوشت به طوری که تکرار ارقام مجاز نباشد و نیز مضرب ۵ باشد؟
۱	۴. با ارقام ۹ و ۶ و ۲ و ۷ و ۳ چند عدد چهار رقمی زوج بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟ $P(7,5) = nP(5,3)$
۱	۵. حاصل عبارات مقابل را بیابید.
	الف) $\frac{4!}{4!} =$
	ب) $(2, 6) = C$

پاسخ:



۲. پس جواب اردشیر می شود  $\frac{6!}{3!} \Rightarrow 2 =$  تعداد حروف تکراری و ۶- تعداد کل حروف شهریار

۳. اعدادی مضرب ۵ هستند که یکان آن ها ۰ یا ۵ باشند.



\*توجه: در خانه صدگان عدد صفر نباید قرار گیرد.



$$\begin{cases} P(7,5) = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} \\ p(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} \end{cases} \Rightarrow \frac{7!}{2!} n \times \frac{5!}{2!} \Rightarrow 7! = n \times 5! \Rightarrow 7 \times 6 \times 5! = n \times 5! \Rightarrow 7 \times 6 = n \Rightarrow 42 =$$

$n$

۴. عددی زوج است که یکنانش زوج باشد و ۶ و ۲ اعداد زوج مساله اند، پس در خانه یکان ۲ حالت زوج داریم:

یکان



$$4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$$

۵. الف)

$$\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

$$\text{ب) } C(6,2) = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 1 \times 4!} = \frac{30}{2} = 15$$

آزمون

سوالات امتحانی نوبت دوم درس: ریاضی (۳) سال سوم دبیرستان  
رشته: علوم انسانی و معارف اسلامی  
هماهنگ کشوریتاریخ امتحان: ۹/۳/۱  
مدت امتحان:

۱۲۰ دقیقه

## فصل اول

۱. دامنه ی توابع زیر را مشخص کنید.  
 ۱/۵ الف)  $y = 3x^2 + 4x - 2$  ب)  $y = \frac{5}{7x-6}$  ج)  $y = \sqrt{2x+16}$

۲. با توجه به جدول رو به رو ضابطه (فرمول) تابع را نوشته، سپس دامنه آن را بنویسید

x	۶	۷	۸	۹
y	۲	۳	۴	۵

۳. اگر  $f(x) = |2x+1|$  و  $g(x) = \sqrt{8-x}$  و  $h(x) = x^2$  باشند، مقادیر زیر را محاسبه کنید.

۱/۵ الف)  $2h(3) + f(-2)$  ب)  $\frac{g(-1) \times f(0)}{3}$

۴. خط به معادله ی  $5x + 2y = 10$  را با استفاده از ضریب زاویه (شیب) خط و عرض از مبدا رسم کنید.

۲ (طریقه ی رسم را کامل بنویسید.)

۵. ضریب زاویه (شیب) خط های زیر را تعیین کنید.

۱ الف) خطی که از دو نقطه ی  $A(1, -4)$  و  $B(0, 3)$  بگذرد.

ب) خط  $y = -2$

## فصل دوم

۱ ۶. معادله ی درجه دومی بنویسید که ۹- و ۲+ جواب های آن باشند.

۳ ۷. معادله ی زی را به روش های خواسته شده حل کنید.

الف)  $3x^2 - 7x + 4 = 0$  (فرمول کلی با دلتا:  $\Delta$ )

ب)  $x^2 - 10x + 16 = 0$  (تجزیه)

ج)  $(x-5)^2 = 16$  (ریشه ی زوج)

۱ ۸. مجموع و حاصل ضرب ریشه ها معادله ی  $4x^2 - 3x - 1 = 0$  را بدون حل معادله به دست آورید.

۱/۵ ۹. معادله ی  $x + 2 = \sqrt{3x+4}$  را حل کنید.

۱ ۱۰. ابتدا مختصات راس و معادله ی محور تقارن سهمی به معادله  $y = (x-3)^2 + 1$  را به دست آورده،

سپس نمودار آن را رسم کنید.

فصل سوم	
۰/۷۵	۱۱. در یک آزمون سه گزینه ای با ۲ سوال، چند راه ممکن برای پاسخگویی به سوالات وجود دارد در صورتی که به هر دو سوال پاسخ داده شود؟
۱/۲۵	۱۲. با ارقام ۹ و ۴ و ۷ و ۳ و بدون تکرار ارقام، چند عدد چهار رقمی می توان ساخت؟
۱	۱۳. به چند طریق می توان از بین ۸ نفر دانش آموز یک کلاس، ۳ نفر برای رفتن به اردو انتخاب کرد؟
۹/۷۵	۱۴. با حروف کلمه ی "خرداد" چند ترتیب مختلف می توان ساخت؟
۱/۲۵	۱۵. درستی تساوی رو به رو را نشان دهید.
	$P(۶,۲) = ۶ C(۵,۱)$

## پاسخ آزمون

۱. دامنه ی توابع چند جمله ای  $\mathbb{R}$  می باشد،  $D = \mathbb{R}$  (۰/۵) الف

ب)  $\{ \text{ریشه های مخرج} \} - \mathbb{R} = \text{دامنه توابع گویا}$  (۰/۵)  $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{6}{7} \right\}$   $x \frac{6}{7} \Rightarrow x \frac{6}{7} \Rightarrow 7x - 6 = 0$

= دامنه توابع رادیکالی (با فرجه زوج) (۰/۵)  $2x + 16 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -16 \Rightarrow x \geq -8$

حل می کنیم  $\rightarrow$  عبارت زیر رادیکال (ج)  $\geq 0$

۲.

$$\left. \begin{matrix} (6, 2) \\ (7, 3) \end{matrix} \right\} y - 2 = \frac{3 - 2}{7 - 6} (x - 6) \rightarrow y = x - 4 \quad (0/5)$$

$$, D = \{6, 7, 8, 9\}$$

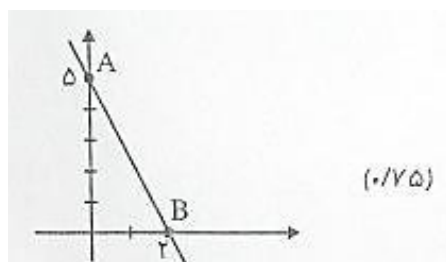
۳.

$$\left. \begin{matrix} \text{الف} \\ h(3) = 3^2 \quad (0/25) \\ f(-2) = |-4 + 1| = 3 \quad (0/25) \end{matrix} \right\} 2h(3) + f(-2) = (2 \times 9) + 3 = 21$$

$$\left. \begin{matrix} \text{ب} \\ g(-1) = \sqrt{8 - (-1)} = \sqrt{9} = 3 \quad (0/25) \\ f(0) = |0 + 1| = 1 \quad (0/25) \end{matrix} \right\} \frac{g(-1) \times f(0)}{3} = \frac{3 \times 1}{3} = 1 \quad (0/25)$$

$$2y = -5x + 10 \Rightarrow y = \frac{-5}{2}x + 5 \quad (0/5) \quad 4.$$

ابتدا نقطه ی  $A(0, 5)$  (عرض از مبدا) را روی محور عرض ها تعیین کرده سپس از نقطه ی  $A$  به اندازه ی ۵ واحد به سمت پایین خیز و ۲ واحد به سمت راست (رفت) حرکت می کنیم تا نقطه ای  $B$  به دست آید. خطی که از این دو نقطه می گذرد نمودار خط مطلوب است.



$$\text{الف) } \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-4)}{\pm(+1)} = \frac{2+4}{-1} = 7 \quad (0/25) \quad .5$$

(0/25)

ب) خط  $y = -2$  موازی محور طول هاست، لذا شیب آن صفر است.  $(m=0)$  (0/5)

$$\left. \begin{array}{l} x = -9 \Rightarrow (x+9) = 0 \quad (0/25) \\ x = 2 \Rightarrow (x-2) = 0 \quad (0/25) \end{array} \right\} (x+9)(x-2) = 0 \Rightarrow x^2 + 7x - 18 = 0 \quad (0/25)$$

دو ریشه ی حقیقی داریم  $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 49 - 48 = 1 > 0$  الف)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm 1}{2} \quad (0/25) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \quad (0/25) \\ x_2 = \frac{8}{2} \quad (0/25) \end{cases}$$

ب)  $x^2 - 10x + 16 = 0$  اتحاد جمله ی مشترک  $\rightarrow (x-2)(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \quad (0/25) \\ x-8=0 \Rightarrow x=8 \quad (0/25) \end{cases}$  (0/5)

$$\text{ج) } \sqrt{(x-5)^2} = \sqrt{16} \Rightarrow x-5 = \pm 4 \quad (0/25) \begin{cases} x = 9 \quad (0/25) \\ x = 1 \quad (0/25) \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{4} = \frac{3}{4} \quad \left( \frac{3}{4} \right) \quad a = 4, b = -3, c = -1$$

$$x_1 + x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{4} \quad (0/5)$$

$$3x + 4 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq \frac{-4}{3} \Rightarrow D = x \geq \frac{-4}{3}$$

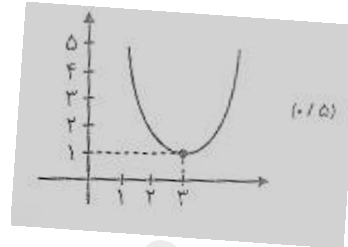
$$(x+2)^2 = (\sqrt{3x+4})^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 3x + 4 \quad (0/25) \quad (0/5)$$

هر دو جواب قابل قبول هستند چون در دامنه صدق می کند.

.۱۰

(۰/۲۵) مختصات راس: (۳،۱)

(۰/۲۵) محور تقارن:  $X=3$



.۱۱

(۰/۲۵)  $3 \times 3 = 9$

(۰/۵)

.۱۲

۴ ۳ ۲ ۱

$$\Rightarrow 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \quad (۰/۲۵)$$

حالت حالت حالت حالت

(۱)

.۱۳

$$C(8,3) = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 5!} = 56 \quad (۰/۵)$$

.۱۴

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60 \quad (۰/۲۵)$$

.۱۵

$$p(6,2) = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! = 30} \quad (۰/۲۵)$$

$$C(5,1) = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5!}{4! \times 1} = 5 \quad (۰/۲۵)$$

$$P(6,2) = 6C(5,1)$$

(۰/۲۵) برقرار است.  $۳۰=۶\times ۵$

" این تمام چیزیه که می فواستیم بگیریم نه تمام چیزی که می تونستیم بگیریم "

آرزوی کنم روز امتحان روز خوب همه ی شما عزیزان باشد.