

جبر و معادله

فصل ۴

عبارت‌های جبری

به عبارت $۲+۳$ توجه کنید، می‌توان به جای عدد ۲ و ۳ از حروف انگلیسی استفاده کرد. در این صورت عبارت به شکل $a+b$ تبدیل می‌شود. شما در سال قبل با عبارت‌هایی مثل عبارت‌های زیر آشنا شده‌اید.

$$۳a + ۵a = (۳ + ۵)a = ۸a$$

$$-۲c - ۴c = (-۲ - ۴)c = -۶c$$

$$۸b - ۳b = (۸ - ۳)b = ۵b$$

$$۳k - ۹k = (۳ - ۹)k = -۶k$$

$$۲(۵b) \equiv ۲ \times ۵b = ۱۰b$$

$$۳a \equiv ۳ \times a$$

توجه مهم:

➤ یک جمله‌ای: در عبارت جبری $۳ - ۵a + ۲b$ به هر کدام از $۲b$ ، $-۵a$ و ۳ یک جمله است.

➤ یک جمله‌ای‌های مشابه: یک جمله‌ای‌هایی که قسمت حرفی آنها مانند هم و توان‌های یکسان باشند، یک جمله‌ایهای مشابه هستند.

➤ چند جمله‌ای: به مجموع چند یک جمله‌ای، چند جمله‌ای گفته می‌شود. مانند:

$$-۲a + ۳b - ۳a - ۲b$$

✓ نکته: یک جمله‌ای $۲a$ را در نظر بگیرید، به ۲ ضریب یک جمله‌ای یا ضریب a گویند و به a قسمت حرفی یا متغیر گویند و توان این یک جمله‌ای «یک» می‌باشد.

✓ نکته: در جمع و تفریق عبارت‌های جبری، فقط جملات مشابه را می‌توان با هم جمع و یا از هم کم کرد. به این ترتیب که قسمت حرفی آنها را نوشته و ضرایب آنها را با هم جمع و یا تفریق می‌کنیم.

✓ نکته: برای ساده کردن یک عبارت جبری جمله‌های متشابه را با هم ساده می‌کنیم.
 ✓ نکته: در ضرب یک عدد در چند جمله‌ای، آن عدد را در تک تک جمله‌ها ضرب می‌کنیم.

مثال: عبارت زیر را ساده کنید.

$$2a + 6b - 3a - 11b$$

حل: طبق تعریف یک جمله‌ای‌های متشابه دو جمله $2a$ و $-3a$ با هم متشابه و دو جمله $6b$ و $-11b$ هم با یکدیگر متشابه هستند. پس داریم:

$$a(2 - 3) + b(6 - 11) = -a - 5b$$

مثال: به مثال‌های زیر در مورد ضرب یک عدد در یک جمله‌ای و چند جمله‌ای توجه کنید:

$$3 \times 2x = 6x$$

$$12 \times (-2t) = -24t$$

$$4(\Delta e - 3r) = 4\Delta e - 12r$$

یک مثال مهم

در پارکی دوچرخه کرایه می‌دهند. هزینه ثابت کرایه یک دوچرخه ۵۰۰ تومان است. برای هر ساعت هم ۲۰۰ تومان می‌گیرند. فرض کنید شخصی دوچرخه را برای n ساعت کرایه کرده است. هزینه او را با یک عبارت جبری نمایش دهید. اگر او دوچرخه را برای ۴ ساعت کرایه کند چقدر باید بپردازد؟

حل: چون هزینه یک ساعت کرایه دوچرخه ۲۰۰ تومان است، پس هزینه n ساعت کرایه برابر $200n$ می‌شود. از طرفی چون کرایه کردن دوچرخه مبلغ ۵۰۰ تومان کرایه ثابت دارد پس عبارت جبری برابر می‌شود با:

$$200n + 500$$

حال اگر این شخص برای ۴ ساعت دوچرخه کرایه کرده باشد کافیست به جای n در عبارت جبری عدد ۴ را گذاشت و مبلغی که شخص باید بپردازد را حساب کرد. پس داریم:

$$200n + 500 = 200 \times 4 + 500 = 800 + 500 = 1300$$

پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری

عبارت $4a$ را در نظر بگیرید. اگر جای a عدد 3 را بگذاریم، مقدار $4 \times 3 = 12$ بدست می آید. مقدار عددی $4a$ به ازای $a = 3$ برابر است با 12 . همین طور مقدار عددی عبارت $-b + 4$ به ازای $b = -3$ برابر است با $7 = 4 + (-3)$.

مثال: مقدار عددی عبارت های زیر را به ازای مقادیر داده شده حساب کنید؟

$$\begin{cases} 3b - 3 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow 3 \times (-3) - 3 = -9 - 3 = -12$$

$$\begin{cases} y + 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 + 3 = 4$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}v - 5 \\ v = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} \times 3 - 5 = \frac{3}{3} - 5 = 1 - 5 = -4$$

➤ عبارت $ax + 6$ را در نظر بگیرید، مقدار عددی آن به ازای $a = 2$ و $x = 3$ مساوی است با:

$$ax + 6 = 2 \times 3 + 6 = 12$$

➤ همچنین عبارت $y^2 - y$ را در نظر بگیرید، مقدار عددی آن به ازای $y = -2$ مساوی است با:

$$y^2 - y = (-2)^2 - (-2) = 4 + 2 = 6$$

✓ نکته: هرگاه یک عدد منفی به توان یک عدد زوج مانند $2, 4, 6$ و ... برسد، حاصل یک عدد مثبت می شود.

✓ مثال: $(-2)^4 = +16$

✓ نکته: هرگاه یک عدد منفی به توان یک عدد فرد مانند $3, 1, 5$ و ... برسد، حاصل یک عدد منفی می شود.

✓ مثال: $(-2)^3 = -8$

مثال: مقدار عددی عبارت های زیر را به ازای مقادیر داده شده حساب کنید؟

$$\begin{cases} ab - 3 \\ b = -3 \Rightarrow 2 \times (-3) - 3 = -6 - 3 = -9 \\ a = 2 \end{cases}$$


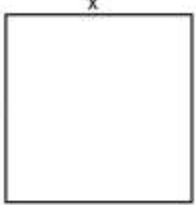
$$\begin{cases} ay^2 + 3 \\ y = 3 \Rightarrow -1 \times 3^2 + 3 = -9 + 3 = -6 \\ a = -1 \end{cases}$$

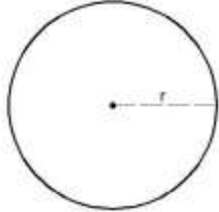
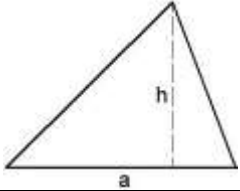
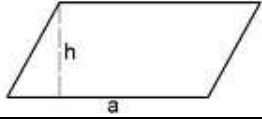
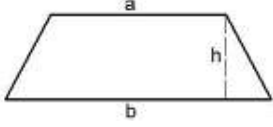
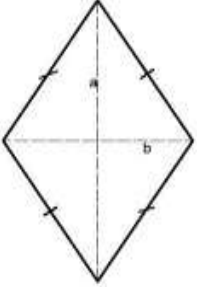
$$\begin{cases} av - x \\ v = 3 \Rightarrow 2 \times 3 - (-5) = 6 + 5 = 11 \\ a = 2 \\ x = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax^2 - 2y \\ x = 3 \Rightarrow -2 \times (3)^2 - 2 \times 0 = -2 \times 27 - 0 = -54 \\ a = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

مساحت اشکال هندسی

در جدول زیر مساحت اشکال هندسی پر کاربرد را ملاحظه می کنید.

مساحت بر حسب عبارات جبری	مساحت به زبان شیرین فارسی	شکل هندسی
$S = x \times y$	طول \times عرض	
$S = x \times x = x^2$	یک ضلع \times خودش	

$S = \pi \times r \times r = \pi r^2$	شعاع \times شعاع $\times \frac{3}{14}$	
$S = \frac{a \times h}{2}$	(ارتفاع \times قاعده) تقسیم بر ۲	
$S = a \times h$	ارتفاع \times قاعده	
$S = \frac{(a + b) \times h}{2}$	(مجموع دو قاعده \times ارتفاع) تقسیم بر ۲	
$S = \frac{a \times b}{2}$	حاصلضرب دو قطر تقسیم بر ۲	

ساده کردن یک عبارت جبری

عبارت جبری $2xy - 3x^2y - 7$ یک چند جمله‌ای است. این چند جمله‌ای سه جمله دارد که عبارتند از: $2xy$ ، $-3x^2y$ و -7 . عبارت $-3x^2y$ یک تک جمله‌ای است. x^2y قسمت حرفی این تک جمله و این -3 ضریب عددی آن است.

دو تک جمله‌ای که قسمت حرفی یکسان دارند متشابه نامیده می‌شوند. مثلاً دو تک جمله‌ای $3xy$ و $-xy$ متشابه هستند ولی دو تک جمله‌ای $3xz$ و $3x^2$ متشابه نیستند. برای ساده کردن یک عبارت جبری جمله‌های متشابه را با هم جمع می‌کنیم.

مثال :

$$-3x^2y + 4 - 3x + 5x^2y - 11 + 7x = 2x^2y - 4x - 7$$

مثال : عبارت های زیر را ساده کنید؟

$$-\frac{2}{3}(4b) = -\frac{2 \times 4}{3}b = -\frac{8}{3}b$$

$$\left(-\frac{1}{2}a\right)(-2b) = -\frac{-2}{2}ab = ab$$

$$(-x)(-x) = x^2$$

توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع و تفریق

برای ضرب یک عدد یا یک حرف در یک چند جمله ای، باید آن عدد یا حرف را در تمامی

جملات چند جمله ای ضرب کرد. در حالت کلی داریم: $a(b+c) = ab+ac$ این تساوی ها
 $a(b-c) = ab-ac$

توزیع ضرب را نسبت به جمع و تفریق نشان می دهد. با استفاده از این دو خاصیت می توان
عبارت های جبری را ساده کرد.

مثال :

$$2(x+y) = 2x+2y$$

$$-3a(b-4) = -3ab+12a$$

✓ نکته: برای تقسیم دو یک جمله ای ضرایب را بر هم تقسیم و در قسمت حرفی از قواعد تقسیم اعداد
تواندار استفاده کنید. مثال:

$$\frac{15x^2y}{3x} = 5xy \quad \checkmark$$

✓ نکته: برای تقسیم یک چند جمله ای بر یک یک جمله کافیهست تک تک جمله ها را بر یک جمله ای تقسیم
کرد. در حالت کلی داریم:

$$\frac{a+b-c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d} \quad \checkmark$$

توزیع پذیری جمع نسبت به جمع

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

نوشتن یک عبارت جبری به صورت حاصلضرب دو عبارت جبری

برای ذکر این مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال: عبارت $3a + ab$ را به صورت حاصلضرب دو عبارت جبری بنویسید؟

برای حل مسائلی از این دست باید از فاکتورگیری استفاده کنیم. حال ببینیم فاکتورگیری چیست.

در چند جمله‌ای $3a + ab$ که از دو یک جمله‌ای $3a$ و ab تشکیل شده است، حرف a در یک جمله‌ایها مشترک است. پس می‌توانیم حرف a را بر تک تک جمله‌ها تقسیم کنیم، در اصل از حرف a فاکتور گرفته‌ایم. در حالت کلی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{3a}{a} + \frac{ab}{a} = a(3 + b)$$

اگر حاصل ضرب عبارت $a(3 + b)$ را بدست آوریم به عبارت $3a + ab$ می‌رسیم.

پس برای فاکتورگیری کافیست: عامل مشترک در یک جمله‌ای‌ها را پیدا کرده و آن را بر تک تک جمله‌ای‌ها تقسیم کرده تا حاصل به صورت دو عبارت جبری‌ای که در هم ضرب شده اند در آیند.

مثال: عبارت $4a^2 + 2ab$ را به صورت ضرب دو عبارت جبری بنویسید.

در چند جمله‌ای بالا که از دو جمله تشکیل شده است عبارت $2a$ مشترک است پس هر کدام از جمله‌ها را بر $2a$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{4a^2}{2a} + \frac{2ab}{2a} = 2a(2a + b)$$

❖ تمرین در کلاس

(۱) تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$3x - 2x =$$

$$5t - 11t =$$

$$23a + 12a - 40a =$$

$$-3b + 4b =$$

$$-2u + 2u =$$

$$12p - 10p =$$

$$\frac{-2}{4}a + a \frac{1}{9} =$$

$$b - 2b =$$

$$\frac{3}{8}h - \frac{2}{8}h + \frac{9}{8}h =$$

۲) عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$2a - 3b - 6a + 11b =$$

$$15x + 8y - 2y =$$

$$q - 2q + 3e - 12w =$$

$$\frac{2}{5}b - \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}a =$$

$$5 \times 3u - 3 \times 4u =$$

$$4 \times \frac{3}{5}b + 12 \times \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}a =$$

۳) حاصل جمع و تفریق زیر را حساب کنید.

$$\begin{aligned} &(3x + 2y - c) \\ &+ (-x + 3y + 2c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(3y - 6u - 5c) \\ &- (-y + 3u + 2c) \end{aligned}$$

۴) جملات درست و غلط را مشخص کنید.

➤ عبارتهای $-3ab^2$ و $3a^2b$ متشابه هستند.

➤ عبارت $-3a + 5ab$ یک عبارت دو جمله‌ای است.

➤ دو جمله‌ی $-\frac{2}{7}xy^2$ و $\frac{-2}{7}xy$ متشابه هستند.

➤ اگر a و b طول و عرض یک مستطیل باشند رابطه $2(a+b)$ نشان دهنده محیط مستطیل است.

➤ مقدار عددی عبارت $(-x+1)^2$ به ازای $x=2$ برابر -1 است.

۵) عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$2x - 4y + 2 - 5y + 11x =$$

$$2xyc - 2y - 4xyc + 2 =$$

$$11m^2 - 22n^3 + 3mn - 4m^2 + 2n^3 =$$

۶) ضرب های زیر را انجام دهید.

$$- 3(9x) =$$

$$- 11(-4xy) =$$

$$2x(3 + y) =$$

$$2xyc(2x + 4y) =$$

$$3a(-2d + 7b) =$$

$$(2x - y)(2 + y) =$$

$$(a + b)(a - b) =$$

۷) هر یک از عبارت های زیر را ساده کنید.

$$5x(2x - y) - 1 \cdot x^2 + xy =$$

$$4a(3a - 2b) - 12a^2 + ab =$$

$$3x(2xy - y) - 6x^2y + xy =$$

$$3(2x - y) - 3(x + y) =$$

$$2(3x + 5y) - 3y - 6x =$$

$$3x(2x - 5y) - 5x^2 - 3 =$$

$$(2x + 2y)(2x - 2y) =$$

$$2x - 5)(2x + 5) =$$

$$a(3a + b) + a^2 - 2ab =$$

$$(x + 5)(x - 2) =$$

$$(m + n)^2 =$$

$$(x + 3)^2 =$$

$$(x - 5)^2 =$$

$$(x - 7)^2 =$$

۸) عبارت های زیر را به صورت حاصل ضرب دو عبارت جبری بنویسید.

$$x^2y - 2x =$$

$$abc + ab^2 =$$

$$acb^2 - a^2b =$$

$$9a^2b^3 - 6a^3b^2 =$$

$$12ab - 8bc =$$

$$8ax^2 - 6a^2x =$$

۹) هر یک از عبارت های زیر را ساده کنید.

$$(2a - 2b)^2 =$$

$$(3x - 4)(2x + 4) =$$

$$(-2 + 4x)(3x + 2)^2 =$$

$$(a + b)^3 =$$

$$(2x - 4)^3 =$$

۱۰) مقدار عددی عبارت های جبری زیر را به ازای مقادیر داده شده به دست آورید.

$$4a^2 - 1 \quad a = 3$$

$$-3b^2 + 1 \quad b = -2$$

$$a^2 + 2b \quad a = 2 \quad b = -3$$

$$2x^2 - y^2 \quad x = 3 \quad y = -4$$

$$-4a + b^2a \quad a = 2 \quad b = 3$$

$$6x - y^3 \quad x = -1 \quad y = -2$$

$$2ax + x^2 \quad x = 3 \quad a = -4$$

$$-2xy + y^2 \quad x = -3 \quad y = 4$$

$$\frac{1}{5}x + y^2 \quad x = 5 \quad y = -2$$

معادله

فرض کنید که یک ترازو داریم، که در یک کفه آن یک جرم ۱۰ کیلویی و در کفه دیگر آن یک جرم ۵ کیلویی و یک جسم دیگر که جرم آن را نمی دانیم قرار داده ایم. این ترازو به حال تعادل در آمده است. برای پیدا کردن جرم جسم نامعلوم (x) باید رابطه زیر را حل کنیم تا مشخص شود که جرم آن جسم چقدر است.

$$5 + x = 10$$

ریاضی پایه هشتم.....آموزشگاه های هدف / راه رشد..... مدرس : مهندس حسین صفایی خواه

به عبارت جبری بالا یک معادله می گویند. در اصل دو طرف این تساوی با هم برابر است. برای بدست آوردن مقدار x یا همان حل معادله، ساده ترین راه این است که بگوییم، چه عددی را با ۵ جمع کنیم تا حاصل ۱۰ شود. این کاملاً مشخص است، اگر به جای x عدد ۵ را بگذاریم، حاصل ۱۰ می شود که برابر طرف دیگر تساوی است.

✓ ساده ترین نوع معادله، معادله یک مجهولی است، که در آن مجهول دارای توان ۱ و ضریب ۱ است. شکل این معادله به صورت روبرو است : $x+a=b$ و a اعداد گویا و x مجهول است.

✓ یادآوری: یک جمله ای ax^n را در نظر بگیرید. a ضریب یک جمله ای و x مجهول و n توان مجهول است.

روش حل معادله

در حالت کلی برای حل هر گونه معادله مراحل زیر را انجام دهید:

۱- در صورت وجود پرانتز عبارت جبری مورد نظر را محاسبه کنید.

$$3(2x-1) = 9 \Rightarrow 6x - 3 = 9$$

۲- تمام مجهول ها را به یک سمت و تمام معلوم ها را به سمت دیگر تساوی ببرید. (توجه توجه : هر عدد یا حرف در صورتی که از یک سمت به سمت دیگر معادله منتقل شود، علامتش تغییر می کند)

$$6x - 3 = 9 \Rightarrow 6x = 9 + 3 \Rightarrow 6x = 12$$

۳- مقدار مجهول برابر است با مقدار معلوم تقسیم بر ضریب مجهول.

$$6x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{6} = 2$$

نکته: به طرفین معادله می توان مقداری را اضافه یا کم کرد.

$$3x + 7 = 11 \Rightarrow 3x + 7 - 7 = 11 - 7 \Rightarrow 3x = 4$$

نکته: طرفین یک معادله را می توان در عددی غیر صفر ضرب و یا تقسیم کرد. در معادله هایی که اعداد کسری به عنوان ضریب و یا عدد معلوم هستند، بهتر است طرفین معادله را در مخرج مشترک کسرها ضرب کرد.

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = -2 \Rightarrow 6 \times \left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = -2 \right) \Rightarrow 3x + 4 = -12 \Rightarrow 3x = -16$$

❖ تمرین در کلاس

(۱) معادلات زیر را حل کنید.

$$-3x = 12$$

$$-5y = -12$$

$$\frac{2}{3}c = -4$$

$$8x - 10 = 12$$

$$2x - \frac{4}{5} = 1$$

$$2x - 8 = -6x$$

$$4x - 3 = -1/6$$

$$9x + 3 = -4x$$

راهبرد تشکیل معادله

در سال گذشته آموختید که برای حل برخی از مسائل، می توان با راهبرد تشکیل معادله، معادله ای بنویسیم و پاسخ مسئله را بدست بیاوریم. با یک مثال این مورد را شرح می دهیم.

مثال : یک کارگر با حقوق ۳ هفته ای خود توانست یک بیل به قیمت ۳۸۰ تومان بخرد و ۴۰ تومان برایش باقی ماند. این کارگر به طور متوسط چقدر حقوق می گیرد؟
با توجه به این مسئله رابطه زیر را می توانیم بنویسیم:

$$\text{(پول باقیمانده)} + \text{(قیمت بیل)} = \text{(حقوق هفتگی)} \times ۳$$

اگر حقوق هفتگی را برابر مجهول x بگیریم معادله به شکل زیر در می آید:

$$۳x = ۳۸۰ + ۴۰$$

از حل معادله مقدار حقوق بدست می آید: $x = \frac{۴۲۰}{۳} = ۱۴۰$
پس حقوق این کارگر ۱۴۰ تومان در هفته است.

مثال : از ۵ برابر عددی ۳ تا کم می کنیم، عدد ۱۷ بدست می آید. آن عدد کدام است؟
عدد مورد نظر را x می گیریم، پس داریم:

$$۵x - ۳ = ۱۷ \Rightarrow ۵x = ۱۷ + ۳ \Rightarrow ۵x = ۲۰ \Rightarrow x = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

عدد مورد نظر ۴ است.

❖ تمرین در کلاس

(۱) عرض مستطیلی ۵ سانتیمتر و محیط آن ۲۲ سانتیمتر است. طول آن را بدست آورید؟

(۲) هفت برابر عددی به اضافه ی ۲ مساوی ۵۸ است. آن عدد کدام است؟

(۳) $\frac{۳}{۴}$ عددی منهای $\frac{۱}{۲}$ همان عدد مساوی ۸- است. آن عدد کدام است؟

(۴) پنج برابر عددی منهای ۴ مساوی است با خود آن عدد به اضافه ی ۱۶. آن عدد کدام است؟

(۵) اگر از سه برابر عددی ۲ واحد کم کنیم حاصل مساوی همان عدد است. آن عدد چیست؟

(۶) اگر به چهار برابر عددی ۵ واحد اضافه کنیم، حاصل همان عدد می شود. آن عدد چیست؟

۷) برای معادلات زیر یک مساله بنویسید و آن را حل کنید.

$$3x + 5 = 62$$

$$5x - 7 = 8$$

$$3x - 2 = 18$$

۸) معادلات زیر را حل کنید.

$$10x - 15 = 5x + 20$$

$$12x - 10 = 6x + 32$$

$$3x - 7 = 7x - 3$$

$$5x - 3 = 3x - 17$$

$$4x - 10 = 20 - 2x$$

$$-9x + 51 = 81x$$

$$-3 - 5x = 2x + 18$$

$$12x + 16 = -4 + 7x$$

$$7x - 15 = -3x + 35$$

$$6x - 5 = 10x + 7$$

$$5x - 7 = 8x$$

۹) معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{5}{6}x$$

$$\frac{5}{7}x - \frac{9}{14} = \frac{2}{2}$$

$$\frac{2}{4}x + \frac{5}{6} = \frac{2}{3}x$$

$$\frac{1}{2}x - 4 = -\frac{2}{2}x + 3$$

$$\frac{2}{4}x + \frac{5}{6} = \frac{2}{4}x$$

$$\frac{2}{5}x - 2 = 1$$

$$\frac{2}{4}x - 9 = \frac{7}{2}$$

$$\frac{3x+1}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{-2x+3}{x-1} = \frac{-2}{9}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{4x-5}{3}$$