بنام خدا

جزوه حسابان ۲

(دوازدهم ریاضی)

تهیه و تنظیم از :

امیر حسین مطلّبی دبیر ریاضی دبیرستان نمونه دولتی استاد شهریار ناحیه ۳ تبریز

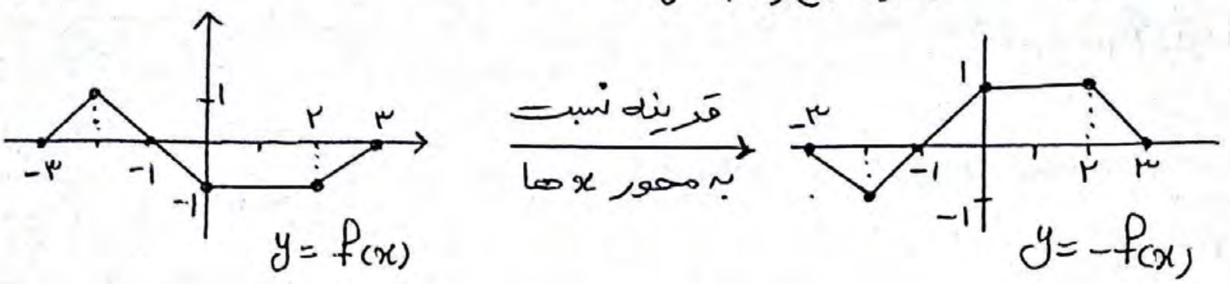
*** هزینه استفاده از این جزوه صلواتی بر محمّد و آل محمّد است ***

التماس دعا

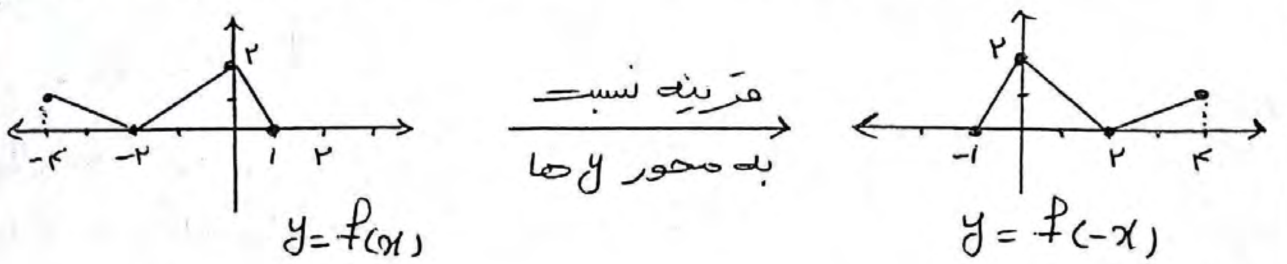
(فصل ۱)

درس ۱: تبدیل نمودار توابع:

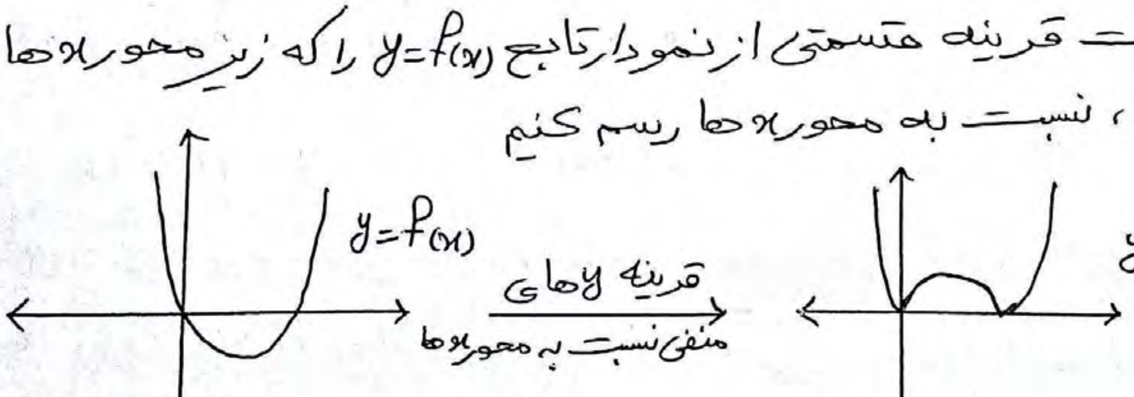
۱) برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ کافی است قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم.



۲) برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ کافی است قرینه نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور y ها رسم کنیم



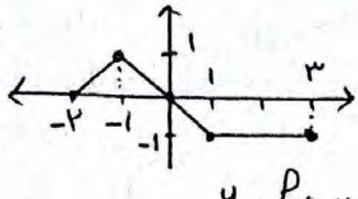
۳) برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ کافی است قرینه قسمتی از نمودار تابع $y=f(x)$ را که زیر محور x ها قرار دارد، نسبت به محور x ها رسم کنیم



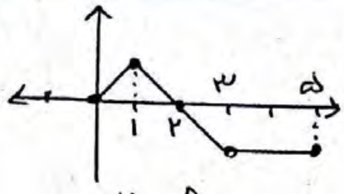
۴) برای رسم نمودار تابع $y=f(x+a)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) اگر a مثبت باشد نمودار به اندازه a به سمت چپ منتقل می‌شود

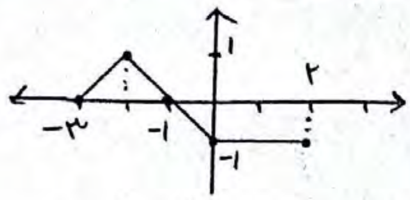
ب) اگر a منفی باشد نمودار به اندازه a به سمت راست منتقل می‌شود



$y=f(x)$



$y=f(x-2)$

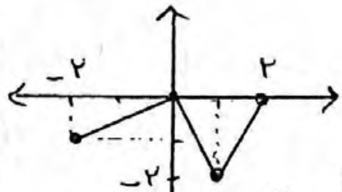


$y=f(x+1)$

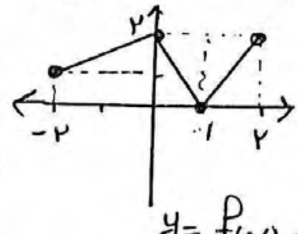
۵) برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+a$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ بصورت زیر عمل می کنیم:

الف) اگر a مثبت باشد نمودار به اندازه a واحد به سمت بالا منتقل می شود

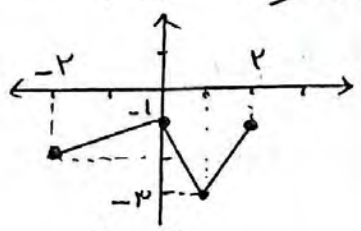
ب) اگر a منفی باشد نمودار به اندازه a واحد به سمت پایین منتقل می شود



$y=f(x)$

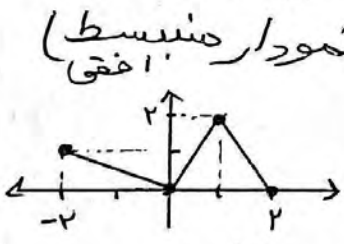


$y=f(x)+2$

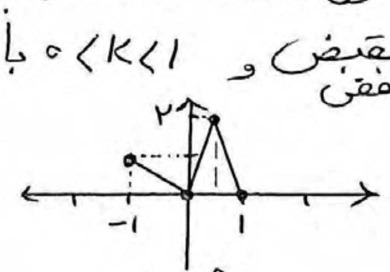


$y=f(x)-1$

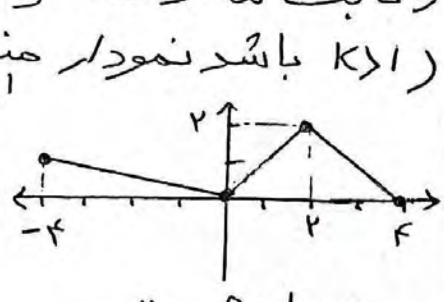
۶) برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ از روی نمودار $y=f(x)$، عرض نقاط را ثابت نگه داشته و طول همه نقاط را بر k تقسیم می کنیم ($k>1$ باشد نمودار منقبض افقی و $0<k<1$ باشد نمودار منبسط افقی)



$y=f(x)$



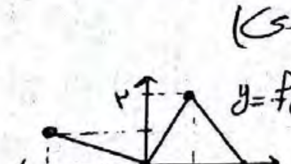
$y=f(2x)$



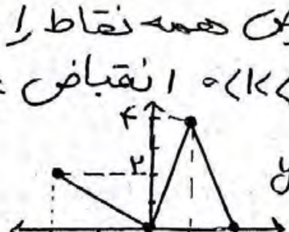
$y=f(\frac{1}{2}x)$

تذکر مهم: برد تابع های $y=f(x)$ و $y=f(kx)$ باهم برابرند

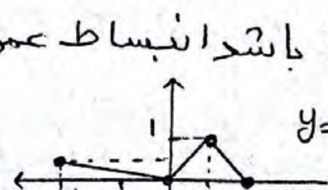
۷) برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ طول نقاط را ثابت نگه داشته و عرض همه نقاط را در k ضرب می کنیم ($k>1$ باشد انبساط عمودی و $0<k<1$ انقباض عمودی)



$y=f(x)$



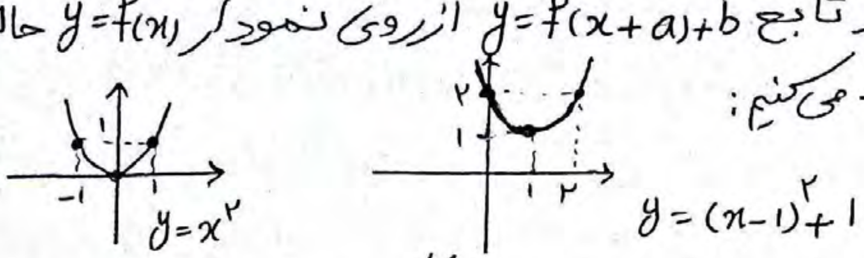
$y=2f(x)$



$y=\frac{1}{2}f(x)$

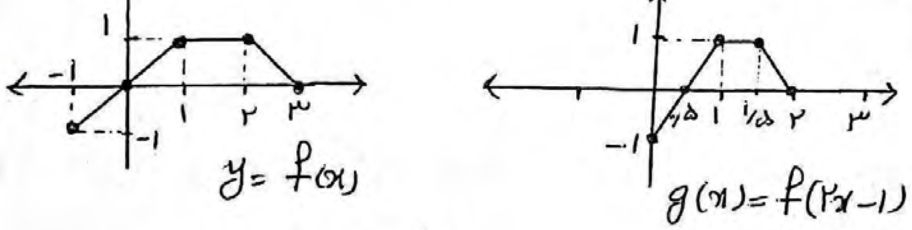
تذکر مهم: دامنه تابع های $y=f(x)$ و $y=kf(x)$ باهم برابرند

۸) برای رسم نمودار تابع $y=f(x+a)+b$ از روی نمودار $y=f(x)$ حالت‌های ۴ گانه را باهم ترکیب می‌کنیم:



(هماهنگ کشوری دیماه ۹۹-۰)

نمودار تابع $f(x)$ بصورت زیر است. نمودار تابع $g(x)=f(2x-1)$ را رسم، دامنه و برد آن را تعیین کنید. (۱نمره)

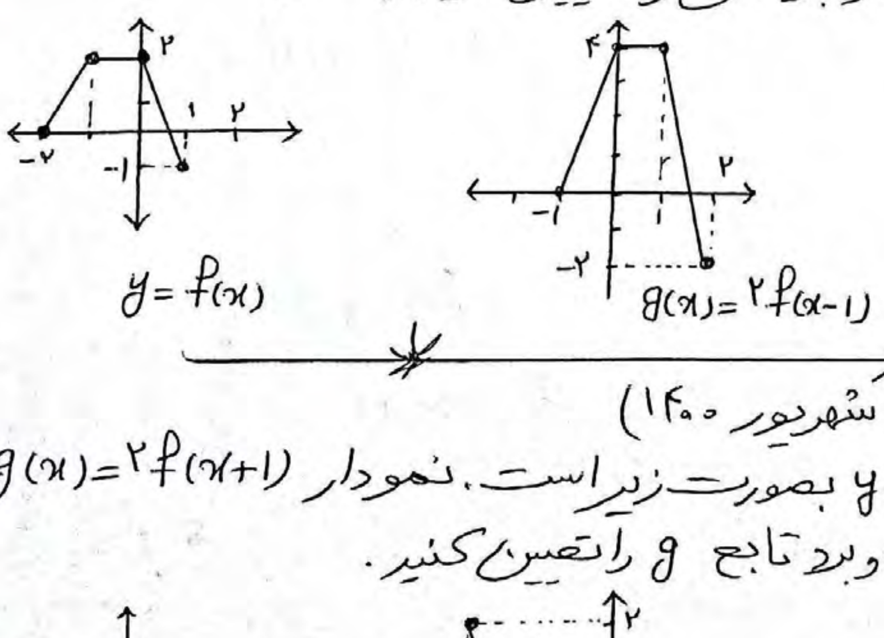


$D_g=[0,2]$

$R_g=[-1,1]$

(هماهنگ کشوری خرداد ۹۸)

نمودار تابع $y=f(x)$ بصورت زیر است. نمودار $g(x)=2f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید (۱نمره)

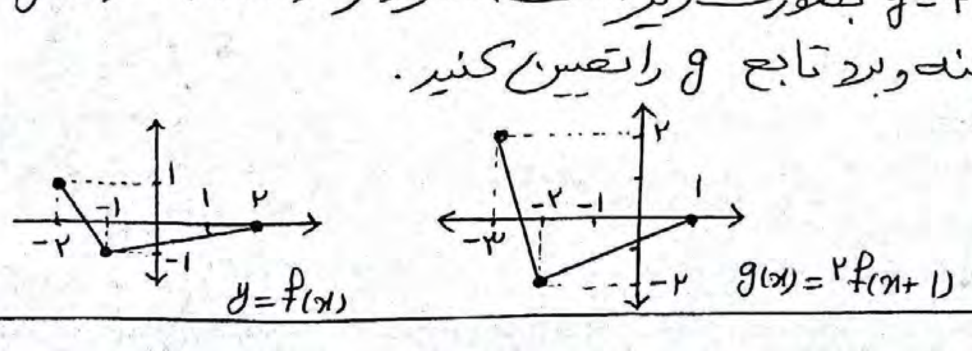


$D_g=[-1,2]$

$R_g=[-2,4]$

(هماهنگ کشوری شهریور ۱۴۰۰)

نمودار تابع $y=f(x)$ بصورت زیر است. نمودار $g(x)=2f(x+1)$ را رسم کرده، دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.

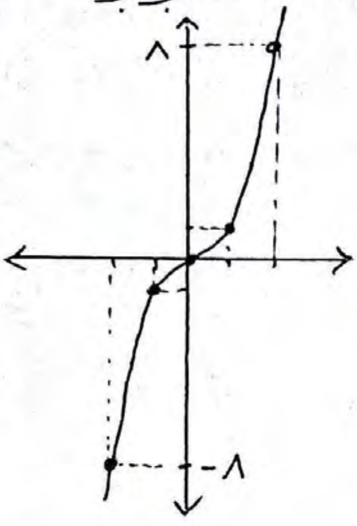


$D_g=[-3,1]$

$R_g=[-2,2]$

درس ۲ : تابع درجه سوم و توابع صعودی و نزولی :

هر تابع بصورت $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ را که در آن $a\neq 0$ باشد تابع درجه ۳ می نامند. نمودار این تابع در فصل ۵ درس ۴ مورد بررسی قرار خواهد گرفت که در اینجا بصورت خاص تابع $y=x^3$ را مورد بررسی قرار می دهیم. دامنه و برد تابع درجه ۳ برابر $\mathbb{R}$ است.



$y=f(x)=x^3$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۸	-۱	۰	۱	۸

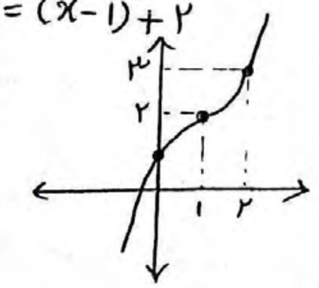
$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=\mathbb{R}$

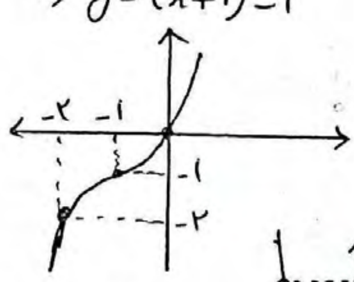
تذکر مهم :
نمودار تابع درجه ۳ به یکی از دو صورت زیر است :

مثال) از روی نمودار تابع $y=x^3$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

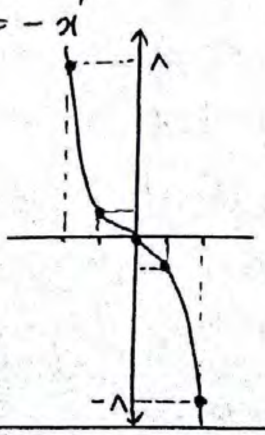
1) $y=(x-1)^3+2$



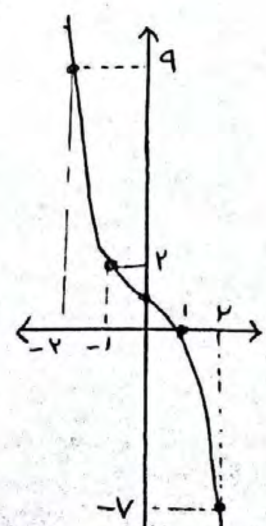
۲) $y=(x+1)^2-1$



۳) $y=-x^3$



۴) $y=-x^3+1$



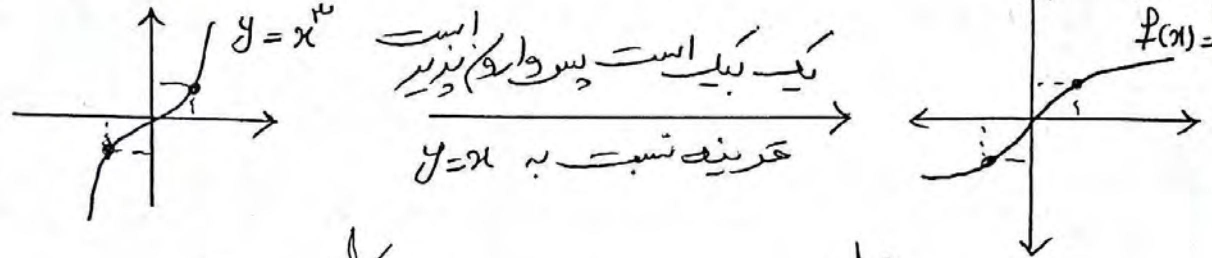
درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

(خرداد ۹۹) نمودار تابع $y=x^3$ در بازه $[0,1]$ پایین‌تر از نمودار تابع $y=x^2$ قرار دارد. (ص)

$x=\frac{1}{2}\in[0,1] \Rightarrow x^2 > x^3$

(خرداد ۹۸) اگر $k>1$ باشد نمودار $y=f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها بدست می‌آید (غ)

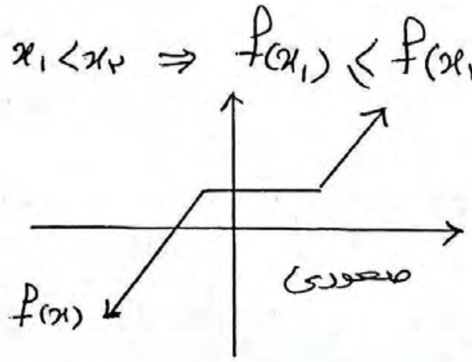
تمرین: نمودار $y=x^3$ و نمودار وارون (معکوس) آن را رسم کنید.



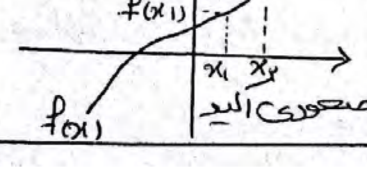
تابع صعودی:

تابع $y=f(x)$ را صعودی می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقادیر x، مقادیر تابع یعنی yها نیز بزرگ شود و یا ثابت بماند به عبارت دیگر:

اگر: $x_1, x_2 \in D_f$ و $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$



همچنین تابع $y=f(x)$ را صعودی اکید (اکیداً صعودی) می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقادیر x، مقادیر تابع یعنی yها نیز بزرگ شود به عبارت دیگر:

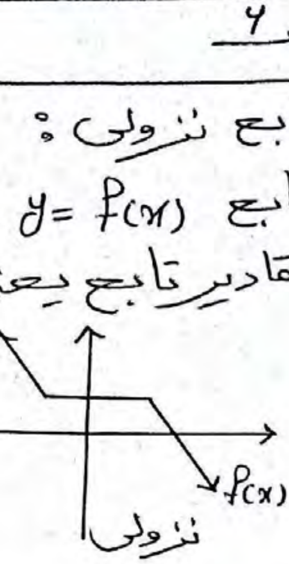


اگر $x_1, x_2\in D_f$ و $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

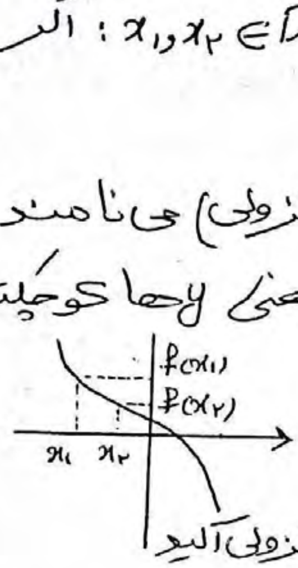
تابع نزولی:

تابع $y=f(x)$ را نزولی می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر تابع یعنی yها کاهش یابد و یا ثابت بماند به عبارت دیگر:

اگر: $x_1,x_2\in D_f$ و $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$



همچنین تابع $y=f(x)$ را نزولی اکید (اکیداً نزولی) می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقادیر x، مقادیر تابع یعنی yها کوچکتر شود به عبارت دیگر:



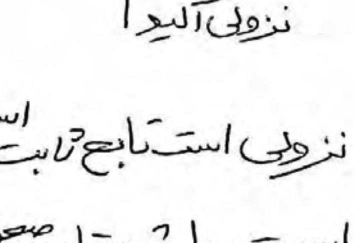
اگر: $x_1,x_2\in D_f$ و $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

تذکر مهم ۱: تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی است تابع ثابت است

تذکر مهم ۲: اگر خمیدگی تابعی به سمت راست باشد تابع صعودی و اگر خمیدگی تابعی به سمت چپ باشد تابع نزولی است.

(هماهنگ دیماه ۹۹):

با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & x\leq 1\\ -1 & x>1\end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی می‌باشد؟ (۱ نمره)



صعودی $[-\infty,0]\cup(1,+\infty)$

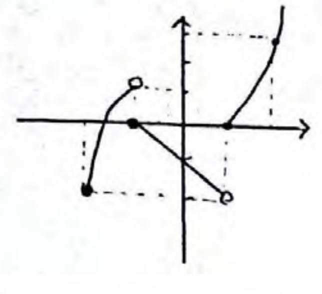
نزولی $[0,+\infty)$

(هماهنگ خرداد ۱۴۰۰)

به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا نزولی باشد .... می‌گوییم (یکنوا)

(هماهنگ شهریور ۱۴۰۰)

با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x^2+2 & -2\leq x<-1\\ -x-1 & -1\leq x<1\\ x^2-1 & 1\leq x\end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی می‌باشد. (۱ نمره)

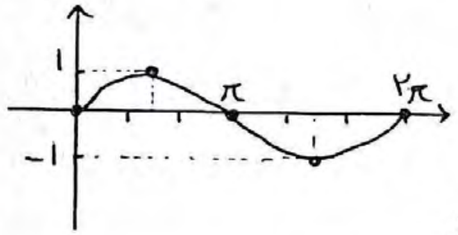


صعودی $[-2,-1)$

صعودی $[1,+\infty)$

نزولی $[-1,1)$

تمرین: نمودار تابع $y=\sin x$ را در بازه $[0,2\pi]$ رسم کرده و صعودی یا نزولی بودن آن را بررسی کنید.



x	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
$y=\sin x$	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

تذکر مهم ۱:

تابع f را در یک بازه یکنوا می‌گویند هرگاه در این بازه فقط صعودی یا نزولی باشد.

تذکر مهم ۲:

فرض کنیم تابع f در یک بازه صعودی و a و b متعلق به این بازه باشد آنگاه:

الف) اگر $f(a)<f(b)$ آنگاه $a<b$ ب) اگر $a<b$ آنگاه $f(a)\leq f(b)$

تذکر مهم ۳:

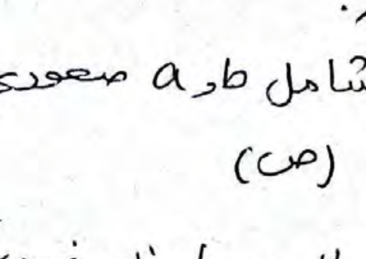
فرض کنیم تابع f در یک بازه نزولی و a و b متعلق به این بازه باشد آنگاه:

الف) اگر $f(a)<f(b)$ آنگاه $a>b$ ب) اگر $a<b$ آنگاه $f(a)\geq f(b)$

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

(هماهنگ دیماه ۹۹): تابع $f(x)$ در بازه شامل a و b صعودی است اگر $f(a) \leq f(b)$ آنگاه $a \leq b$ (ص)

(هماهنگ شهریور ۱۴۰۰): تابع $y = -\log_5^x + 1$ در دامنه خود، یک تابع اکیداً یکنوا است. (ص)



(هماهنگ کشوری شهریور ۱۴۰۰):

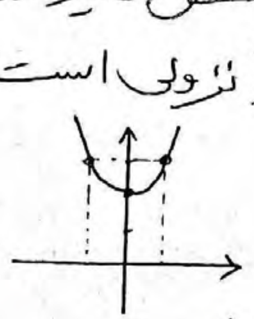
در $\left(\frac{1}{3}\right)^{10-2x} \leq \left(\frac{1}{81}\right)$ حدود x را بدست آورید (۰٫۵ نمره)

حل: تابع $y = a^x$ به ازای $0 < a < 1$ اکیداً نزولی است پس طبق تذکر مهم ۳ قسمت الف صفحه ۷ جزوه داریم:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{10-2x} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^4 \Rightarrow 10 - 2x \geq 4 \Rightarrow -2x \geq -6 \Rightarrow x \leq 3$$

(هماهنگ کشوری خرداد ۹۹):

نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه‌ای این تابع اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟ (۱ نمره)



اکیداً نزولی $(-\infty, 0)$

اکیداً صعودی $(0, +\infty)$

تمرین: مقدار x را بیابید. $\log_{0/5} \frac{2x+1}{3} \leq \log_{0/5} \frac{4x-1}{2}$

حل: می‌دانیم تابع $y = \log_a^x$ $(0 < a < 1)$ اکیداً نزولی است پس:

$$\frac{2x+1}{3} \geq \frac{4x-1}{2} \Rightarrow 4x + 2 \geq 12x - 3 \Rightarrow -8x \geq -5 \Rightarrow x \leq \frac{5}{8}$$

درس ۳: بخش‌پذیری و تقسیم:
اگر چند جمله‌ای $P(x)$ از درجه n را بر دو جمله‌ای درجه اول $x-a$ تقسیم کنیم خارج قسمتی مانند $Q(x)$ از درجه $n-1$ و باقیمانده‌ای مانند R (عدد ثابت) خواهیم داشت که طبق قضیه تقسیم داریم:

مقسوم = (خارج قسمت × مقسوم علیه) + باقیمانده

$$\boxed{P(x) = (x-a)\,Q(x) + R}$$

اگر در رابطه فوق، جواب مقسوم علیه یعنی ($x-a=0 \Rightarrow x=a$) را در مقسوم قرار دهیم خواهیم داشت:

$$P(a) = \underbrace{(a-a)}_{\text{صفر}}\,Q(a) + R \Rightarrow \boxed{P(a) = R}$$

نتیجه:
۱) برای پیدا کردن باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $(x-a)$ کافی است مقدار $P(a)$ را حساب کنیم $R = P(a)$

۲) اگر $P(a)=0$ باشد، باقیمانده برابر صفر است و $P(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

مثال ۱: باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 1$ را بر $(x-2)$ بدست آورید.

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow P(2) = 4(2)^3 - 3(2)^2 + (2) + 1 = 23 \Rightarrow \boxed{R = 23}$$

مثال ۲: باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 - x + 1$ را بر $(x+1)$ بدست آورید.

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow R = P(-1) = (-1)^5 + (-1)^4 + 2(-1)^3 + 1 + 1 = 0 \Rightarrow \text{بخش‌پذیر است}$$

مثال ۳ : مقدار m را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $P(x) = mx^3 + 2x^2 - x - 3$ بر $2x+1$ بخش‌پذیر باشد.

$$2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow R=0 \Rightarrow P(-\frac{1}{2})=0$$

$$\Rightarrow m(-\frac{1}{2})^3 + 2(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{m=-16}$$

مثال ۴ : مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که چند جمله‌ای $P(x) = ax^4 + bx^3 - 3x^2 + x + 2$ بر $(x-1)$ بخش‌پذیر بوده و باقیمانده تقسیم آن بر $(x+1)$ برابر (-4) باشد.

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow P(1)=0 \Rightarrow a(1)^4 + b(1)^3 - 3(1) + (1) + 2 = 0 \Rightarrow a+b=0$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow P(-1)=-4 \Rightarrow a(-1)^4 + b(-1)^3 - 3(-1) + (-1) + 2 = 0 \Rightarrow a-b=-2$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-1} \quad \boxed{b=1}$$

مثال ۵ : m و n را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $P(x) = mx^5 + 2nx^2 + x - 3$ بر $x^2 - 4$ بخش‌پذیر باشد.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow P(2)=0 \\ x=-2 \Rightarrow P(-2)=0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} P(2)=0 \Rightarrow 32m + 8n + 2 - 3 = 0 \\ P(-2)=0 \Rightarrow -32m + 8n - 2 - 3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 32m + 8n = 1 \\ -32m + 8n = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m = -\frac{1}{16} \\ n = \frac{3}{8} \end{matrix}$$

مثال ۶ : m و n را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $P(x) = mx^4 + nx^3 - 2x - 1$ بر x^2+1 بخش‌پذیر باشد

حل : مقسوم از درجه ۴ و مقسوم علیه از درجه ۲ است پس حتماً خارج قسمت

از درجه ۲ خواهد بود :
$$mx^4+nx^3-2x-1=(x^2+1)(ax^2+bx+c)$$

$$\Rightarrow mx^4+nx^3-2x-1=ax^4+bx^3+(a+c)x^2+bx+c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=a \\ n=b \\ a+c=0 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=1},\ \boxed{b=-2},\ \boxed{c=-1}$$
$$\boxed{n=-2},\ \boxed{m=1}$$

خارج قسمت $=Q(x)=x^2-2x-1$

مثال ۷ : چند جمله‌ای درجه سومی بنویسید که با قیمانده تقسیم آن بر $(x+1)$ و $(x+2)$ و $(x+3)$ مساوی ۲ بوده و بر $(x-1)$ بخشپذیر باشد.

$$P(x)=K(x+1)(x+2)(x+3)+2$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow P(1)=0 \Rightarrow 24K+2=0 \Rightarrow \boxed{K=-\frac{1}{12}}$$

$$P(x)=-\frac{1}{12}(x+1)(x+2)(x+3)+2$$

مثال ۸ : با قیمانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $(x+1)$ برابر ۲ و بر $(x-2)$ برابر ۳ می‌باشد. با قیمانده تقسیم $P(x)$ بر $(x+1)(x-2)$ را بدست آورید.

$$P(x)=Q(x)(x+1)(x-2)+ax+b$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow P(-1)=2 \Rightarrow Q(-1)(-1+1)(-1-2)-a+b=2$$
$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow P(2)=3 \Rightarrow Q(2)(2+1)(2-2)+2a+b=3$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -a+b=2 \\ 2a+b=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{3},\ b=\frac{7}{3} \Rightarrow R=ax+b=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$$

مثال ۹ : با قیمانده تقسیم $2x^5+x^4-x^2-1$ را بر x^2+1 بدست آورید.

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \qquad P(x)=2x^5+x^4-x^2-1=2x(x^2)^2+(x^2)^2-(x^2)-1$$

$$\xRightarrow{x^2=-1} R=2x(-1)^2+(-1)^2-(-1)-1 \Rightarrow R=2x+1$$

تعمیم (عمومیت دادن) اتحادهای چاق و لاغر برای توان های بالاتر از ۳ :

۱) عبارت (x^n-y^n) $(n\in N)$ همواره بر $(x-y)$ بخشپذیر است

علت : $x-y=0 \Rightarrow x=y \Rightarrow P(y)=y^n-y^n=0$

$$(x^n-y^n)=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

مثال) $x^5-32=x^5-2^5=(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)$

۲) عبارت (x^n-y^n) زمانی بر $(x+y)$ بخشپذیر است که n زوج باشد.

علت : $x+y=0 \Rightarrow x=-y \Rightarrow P(-y)=(-y)^n-y^n \xRightarrow{n\ \text{زوج}} y^n-y^n=0$

$$n\in 2k:\ (x^n-y^n)=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\dots+xy^{n-2}-y^{n-1})$$

مثال) $x^6-64=x^6-2^6=(x+2)(x^5-2x^4+4x^3-8x^2+16x-32)$

۳) عبارت (x^n+y^n) زمانی بر $(x+y)$ بخشپذیر است که n فرد باشد.

علت : $x+y=0 \Rightarrow x=-y \Rightarrow P(-y)=(-y)^n+y^n \xRightarrow{n\ \text{فرد}} -y^n+y^n=0$

$$n\in 2k+1:\ (x^n+y^n)=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\dots-xy^{n-2}+y^{n-1})$$

مثال) $x^5+1=x^5+1^5=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

۴) عبارت (x^n+y^n) تحت هیچ شرایطی بر $(x-y)$ بخشپذیر نیست

علت : $x-y=0 \Rightarrow x=y \Rightarrow P(y)=y^n+y^n=2y^n\neq 0$

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۹):

چند جمله‌ای (x^6-1) را با عامل $(x-1)$ تجزیه کنید. (۱ نمره)

$$x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۱۴۰۰):

با باقیمانده تقسیم عبارتهای $P(x)=x^3+ax+1$ و $q(x)=2x^2-x+1$ بر $(x+2)$ یکسان می‌باشد. مقدار a را بیابید (۱/۵ نمره)

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow \begin{cases} P(-2)=-2a-7 \\ q(-2)=11 \end{cases} \Rightarrow -2a-7=11 \Rightarrow \boxed{a=-9}$$

(هماهنگ کشوری - شهریور ۱۴۰۰):

چند جمله‌ای x^5+32 را برحسب عامل $(x+2)$ تجزیه کنید (۱/۵ نمره)

$$x^5+2^5=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۱۳۹۹):

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای x^3+ax^2+bx+1 بر $(x-2)$ و $(x+1)$ بخشپذیر باشد. (۱ نمره)

$$\begin{array}{l} x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow P(2)=0 \Rightarrow \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow P(-1)=0 \Rightarrow \end{array} \begin{cases} 4a+2b=-9 \\ a-b=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-\frac{3}{2}}\ \boxed{b=-\frac{3}{2}}$$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸):

اگر چند جمله‌ای $f(x)=x^2+ax-3$ بر $(x+1)$ بخشپذیر باشد باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-2)$ را بدست آورید (۰/۷۵ نمره)

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$f(-1)=0 \Rightarrow 1-a-3=0 \Rightarrow \boxed{a=-2}$ $\qquad x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow f(2)=4-4-3=-3$

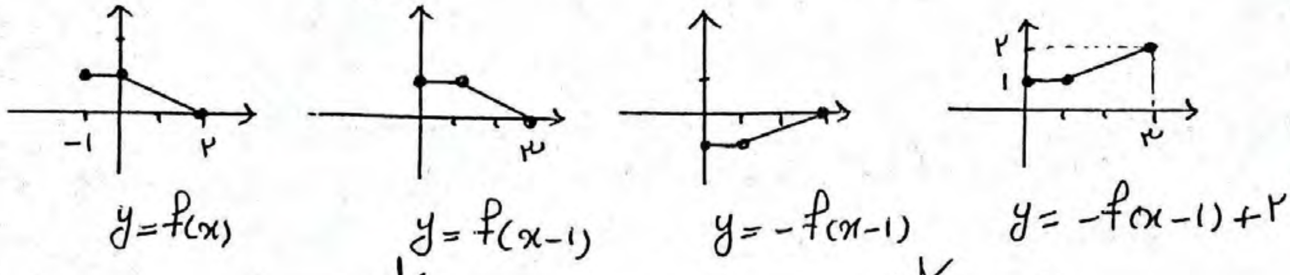
(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸):

چند جمله‌ای x^6-1 را برحسب عامل $(x+1)$ تجزیه کنید (۰/۵ نمره)

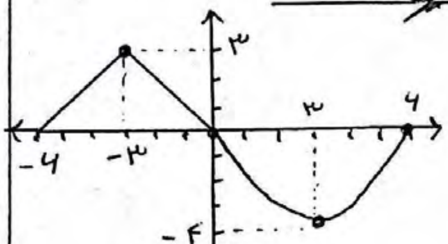
$$x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$$

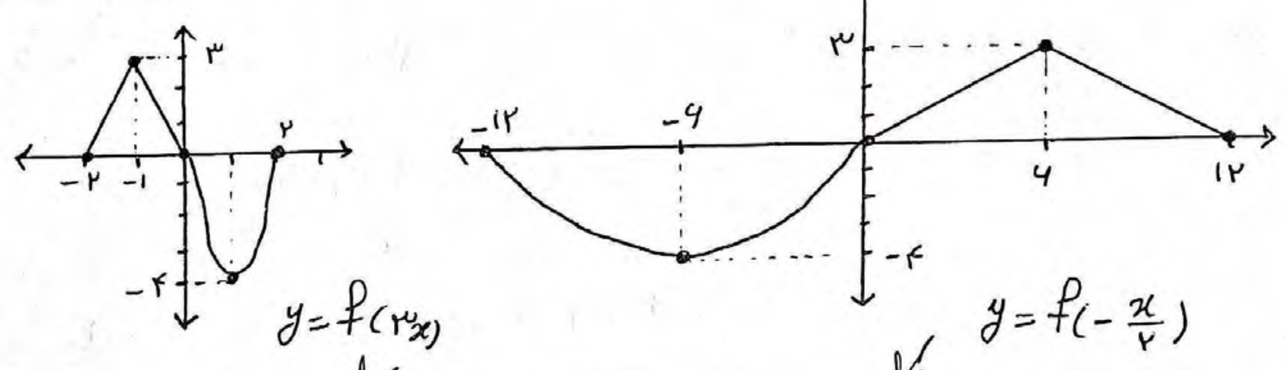
تمرینات مهم فصل ۱

۱) باتوجه به نمودار $y=f(x)$ ، نمودار $y=-f(x-1)+2$ را رسم کنید.



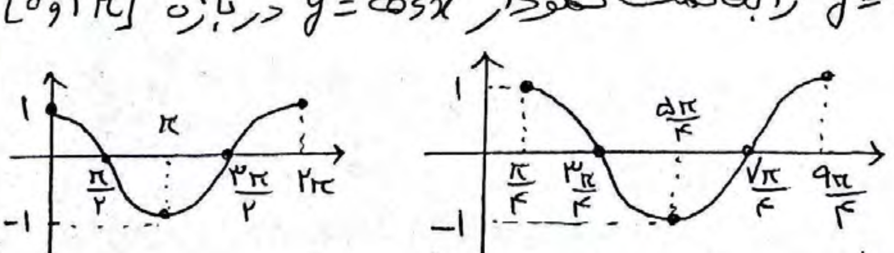
۲) اگر نمودار تابع $y=f(x)$ بصورت مقابل باشد نمودار توابع $y=f(-\frac{x}{2})$ و $y=f(3x)$ را رسم کنید.



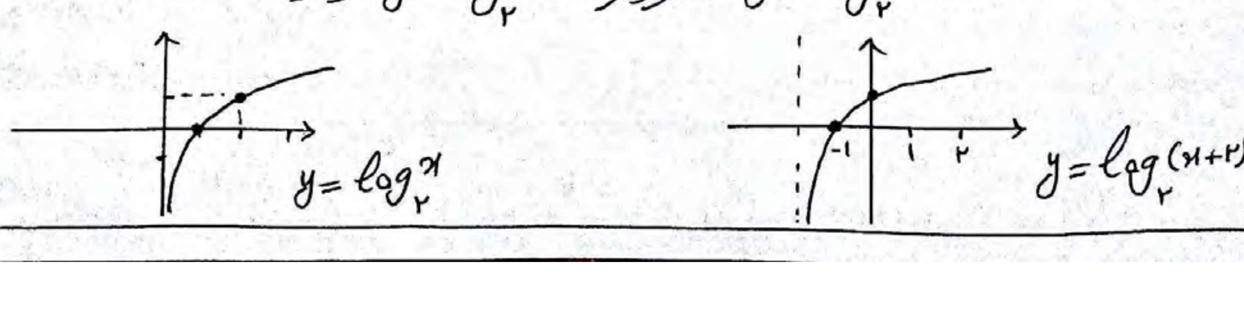


۳) (هماهنگ کشوری خرداد ۱۴۰۰):

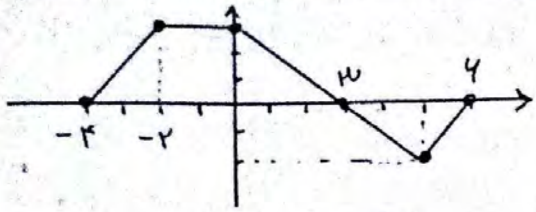
نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{4})$ را به کمک نمودار $y=\cos x$ در بازه $[0,2\pi]$ رسم کنید (۰٫۷۵ نمره)

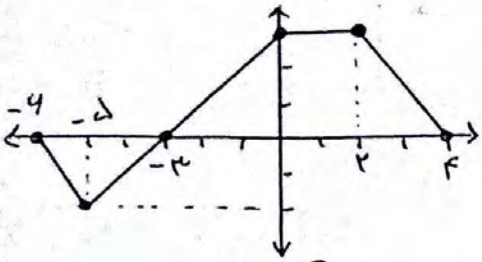


۴) از روی نمودار $y=\log_2 x$ نمودار $y=\log_2(x+2)$ را رسم کنید.

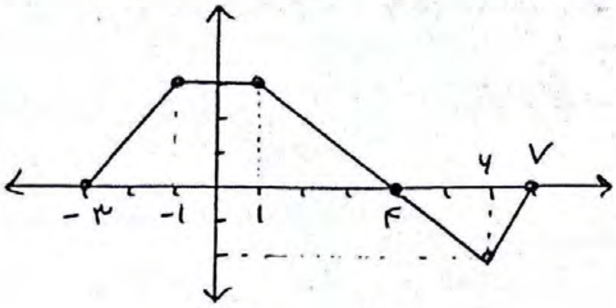


۵) نمودار تابع f بصورت مقابل رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

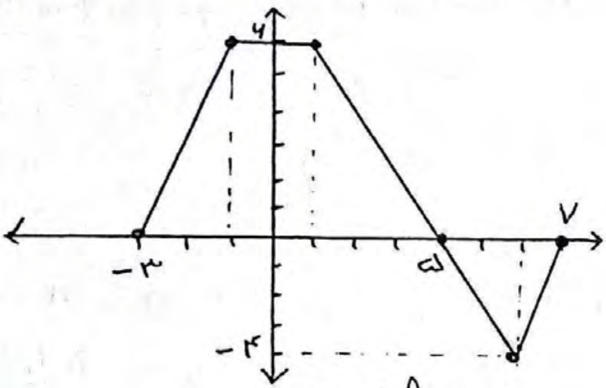




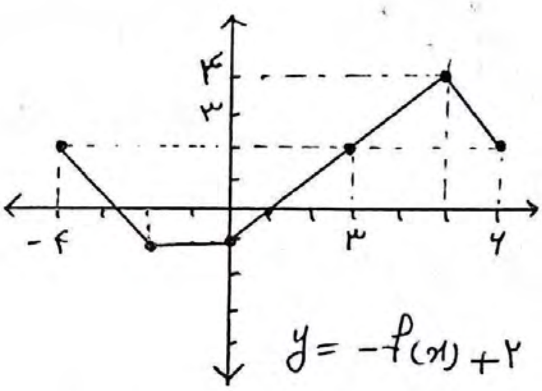
$y = f(-x)$



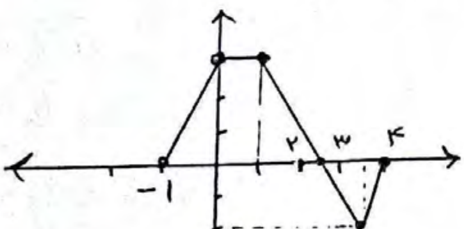
$y = f(x-1)$



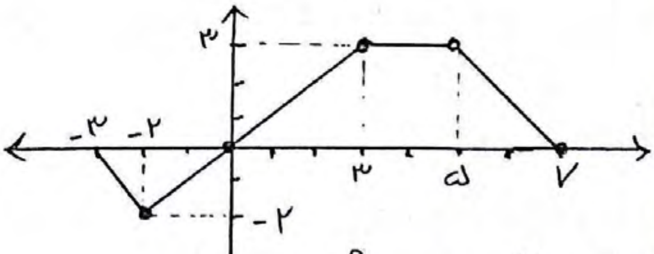
$y = 2f(x-1)$



$y = -f(x) + 2$

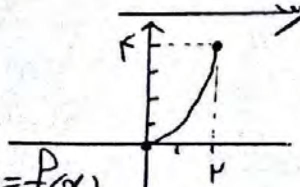


$y = f(2x-1)$

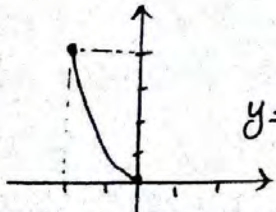


$y = f(3-x) = f(-x+3)$

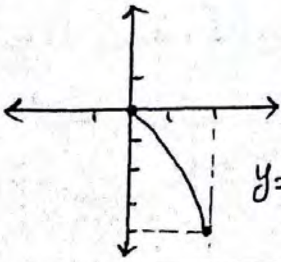
۶) نمودار تابع f بصورت مقابل است. نمودار توابع خواسته شده را بدست آورید.



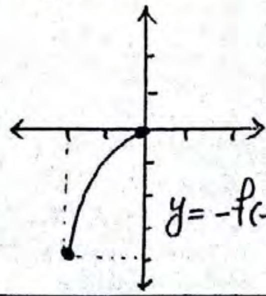
$y = f(x)$



$y = f(-x)$

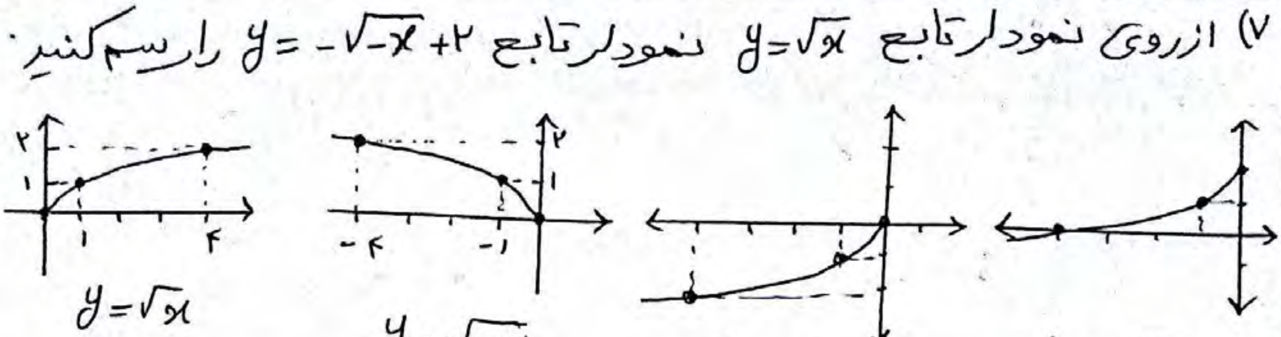


$y = -f(x)$



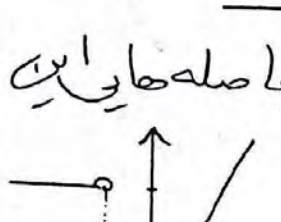
$y = -f(-x)$

۷) از روی نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نمودار تابع $y=-\sqrt{-x}+2$ را رسم کنید.



$y=\sqrt{x}$ $\quad y=\sqrt{-x}$ $\quad y=-\sqrt{-x}$ $\quad y=-\sqrt{-x}+2$

۸) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq -1 \\ 2 & x<-1 \end{cases}$ را رسم کنید. در چه فاصله هایی این تابع صعودی و در چه فاصله هایی نزولی است؟



$[0,+\infty)$ صعودی $\quad [-1,0]$ نزولی

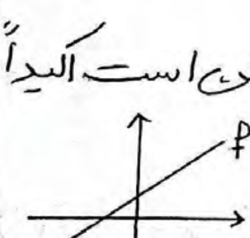
$(-\infty,-1)$ تابع ثابت (هم صعودی هم نزولی)

۹) الف) اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد آیا صعودی نیز هست؟ چرا؟ بلی

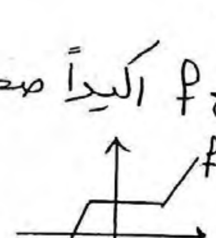
$a<b \xRightarrow{\text{اکیداً صعودی}} f(a)<f(b) \Rightarrow$ f صعودی است

ب) اگر تابع f در یک فاصله صعودی باشد آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟ مثال بزنید.

جواب: ممکن است تابع f اکیداً صعودی باشد و ممکن است اکیداً صعودی نباشد



f صعودی و اکیداً صعودی است.



f صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست.

۱۰) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند اگر $f(a)<f(b)$ نشان دهید که: $a<b$

حل: فرض کنیم $a \not< b$ (فرض خلف) دراینصورت $a>b$ و چون f اکیداً صعودی است در نتیجه $f(b)<f(a)$ و این خلاف فرض است پس فرض خلف باطل و $a<b$ است.

۱۱) اگر $\log(x+1) \le \log(2x-3)$ ، حدود x را بدست آورید.

حل: مبنای لگاریتم ۱۰ و بزرگتر از ۱ است پس تابع لگاریتم اکیداً صعودی است پس:

$$\log(x+1) \le \log(2x-3) \Rightarrow x+1 \le 2x-3 \Rightarrow 4 \le x$$

---

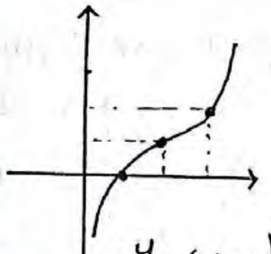
۱۲) اگر چند جمله‌ای x^2+ax-2 بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد مقدار a را تعیین کنید.

$$x-a=0 \Rightarrow x=a \Rightarrow R=P(a)=0 \Rightarrow a^2+a(a)-2=0$$

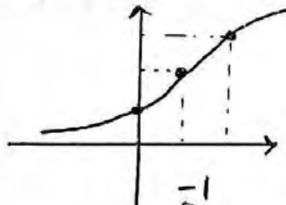
$$\Rightarrow 2a^2=2 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$$

---

۱۳) نمودار تابع $f(x)=(x-2)^3+1$ را رسم کرده نشان دهید f وارون‌پذیر است و نمودار f^{-1} را رسم کرده ضابطه f^{-1} را بدست آورید.



$y=(x-2)^3+1$



f^{-1}

حل: هر خط موازی محور xها نمودار f را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند پس f یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

$$y=(x-2)^3+1 \Rightarrow y-1=(x-2)^3 \Rightarrow$$

$$x-2=\sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-1}+2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}+2$$

---

۱۴) اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند نشان دهید که تابع $f+g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است؟ برای تابع $f-g$ چه می‌توان گفت؟

$$a<b \Rightarrow \begin{cases} f(a)<f(b) \\ g(a)<g(b) \end{cases} \xrightarrow{+} f(a)+g(a) < f(b)+g(b) \Rightarrow$$ اکیداً صعودی $f+g$

تابع $f-g$ ممکن است صعودی، نزولی و یا ثابت باشد

$f(x)=3x+1 \Rightarrow$ صعودی اکید
$g(x)=2x+1 \Rightarrow$ صعودی اکید
$\Rightarrow f(x)-g(x)=x \Rightarrow$ صعودی اکید

$f(x)=x+3 \Rightarrow$ صعودی اکید
$g(x)=2x+3 \Rightarrow$ صعودی اکید
$\Rightarrow f(x)-g(x)=-x \Rightarrow$ نزولی اکید

$f(x)=x+1 \Rightarrow$ صعودی اکید
$g(x)=x+2 \Rightarrow$ صعودی اکید
$\Rightarrow f(x)-g(x)=-1 \Rightarrow$ ثابت

۱۵) اگر باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای x^3+kx^2+2 بر $x-2$ برابر با ۶ باشد k را تعیین کنید.

$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow R=f(2)=6 \Rightarrow 2^3+k(2)^2+2=6 \Rightarrow \boxed{k=-1}$

۱۶) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای x^3+ax^2+bx+1 بر $x-2$ و $x+1$ بخشپذیر باشد.

$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow f(2)=0 \Rightarrow 2^3+a(2)^2+b(2)+1=0 \Rightarrow \begin{cases}4a+2b=-9\\ a-b=0\end{cases} \Rightarrow a=-\frac{3}{2},\ b=-\frac{3}{2}$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow f(-1)=0 \Rightarrow (-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+1=0$

۱۷) هریک از چند جمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل‌های خواسته شده تجزیه کنید.

الف) x^6-1 با عامل $x-1$

$x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

ب) x^6-1 با عامل $x+1$

$x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$

پ) x^5+32 با عامل $x+2$

$x^5+2^5=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$

۱۸) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند اگر $f(a)\leqslant f(b)$ نشان دهید که: $a\geqslant b$

حل: فرض کنیم $a \ngeqslant b$ (فرض خلف) پس $a<b$ و چون f اکیداً نزولی است در نتیجه $f(a)>f(b)$ و این خلاف فرض است بنابراین فرض خلف باطل و $a\geqslant b$ است.

۱۹) اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}\leqslant\frac{1}{64}$ حدود x را بدست آورید.

حل: تابع $y=a^x$ به ازای $0<a<1$ اکیداً نزولی است پس:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow 3x-2\geqslant 6 \Rightarrow 3x\geqslant 8 \Rightarrow x\geqslant\frac{8}{3}$