به نام خدا

خلاصه‌ای از فصل دوم ریاضی دوازدهم

گردآورنده: افسانه حیدری، دبیر ریاضی
ناحیه ۱ اهواز.

---

۱) دوره تناوب $y=\sin x$ و $y=\cos x$ برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این توابع به ترتیب 1 و -1 می باشد.

۲) دوره تناوب $y=a\sin x$ و $y=a\cos x$ برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این توابع به ترتیب $|a|$ و $-|a|$ می باشند.

۳) دوره تناوب $y=a\sin x+c$ و $y=a\cos x+c$ برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این توابع به ترتیب $|a|+c$ و $-|a|+c$ می باشند.

۴) دوره تناوب $y=\sin bx$ و $y=\cos bx$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن به ترتیب 1 و -1 می باشند.

۵) دوره تناوب $y=\sin bx+c$ و $y=\cos bx+c$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن به ترتیب $1+c$ و $-1+c$ می باشند.

۶) دوره تناوب $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ می باشند و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن به ترتیب $|a|+c$ و $-|a|+c$ می باشند.

مثال : دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $y=3\sin 2x-2$ $\quad T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

$max=|3|-2=1$ ، $min=-|3|-2=-5$

ب) $y=-\frac{1}{4}\cos(\pi x)$ $\quad T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\pi}=2$

$max=\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$ ، $min=-\left|-\frac{1}{4}\right|=-\frac{1}{4}$

پ) $y=\pi\sin(-x)+1$ $\quad T=\frac{2\pi}{|-1|}=2\pi$

$max=|\pi|+1$ ، $min=-|\pi|+1=-\pi+1$

ت) $y=8\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ $\quad T=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$

مثال : هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه $f(x)=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c$ می باشد. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نمایید.

الف)

با توجه به نمودار دوره تناوب π می باشد

$$\frac{2\pi}{|b|}=\pi \Rightarrow |b|=2 \xRightarrow{\text{سین}} \underline{b=2}$$

ماکزیمم $=7 \Rightarrow \begin{cases} |a|+c=7 \\ -|a|+c=-1 \end{cases}$ مینیمم $=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |a|=3 \Rightarrow a=3$ ، $c=4$

$y=a\sin bx+c$

$y=3\sin 2x+4$

طبق توضیحات در صفحه ۴ جزوه

یا $y=-3\sin(-2x)+4$ که با معادله بالای برابر است.

نکاتی درباره علامت های a و b در توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$

۱) مثبت یا منفی بودن b در کسینوس هیچ تاثیری ندارد چون cos، منفی را می‌خورد ولی در تابع sin اگر b مثبت باشد شروع نمودار با شیب مثبت خواهد بود و اگر b منفی باشد شروع نمودار با شیب منفی خواهد بود.

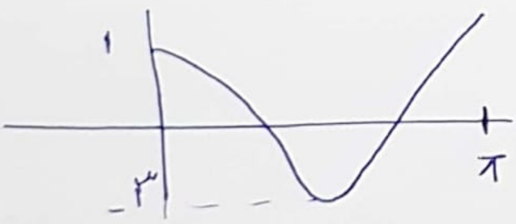
$\rightarrow y=\sin 2x$

$\rightarrow y=\sin(-2x)$

۲) درباره علامت a در تابع cos به این صورت تصمیم می‌گیریم:

۱) اگر شروع تابع مثل خود تابع cos با شیب منفی بود a را مثبت در نظر می‌گیریم و

۲) اگر شروع تابع مانند قرینه تابع cos بود a را منفی در نظر می‌گیریم.



$y=2\cos 2x-1$

a در اینجا مثبت است.

$$\begin{cases} |a|+c=1 \\ -|a|+c=-3 \end{cases}$$

$2c=-2 \Rightarrow \boxed{c=-1}$

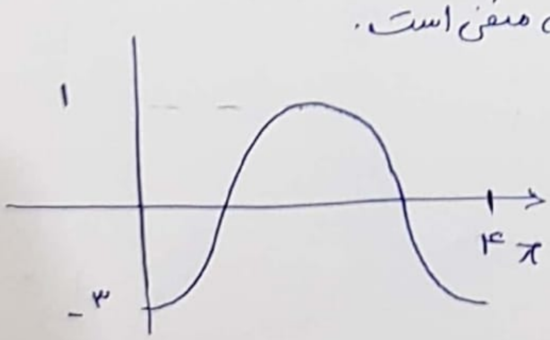
$2|a|=4 \rightarrow |a|=2$

$\Rightarrow \boxed{a=2}$

$T=\cancel{\pi}=\frac{2\cancel{\pi}}{|b|} \Rightarrow |b|=2 \Rightarrow \underline{b=2}$

علامت b را در cos همیشه مثبت بگیریم چون منفی هم بگیریم منفی را میخورد.

شروعش مانند قرینه cos است پس علامت a منفی است.



$T=4\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

$|a|+c=1$
$-|a|+c=-3$
$\Rightarrow 2c=-2 \rightarrow c=-1$

$|a|=2 \rightarrow \underline{a=-2}$

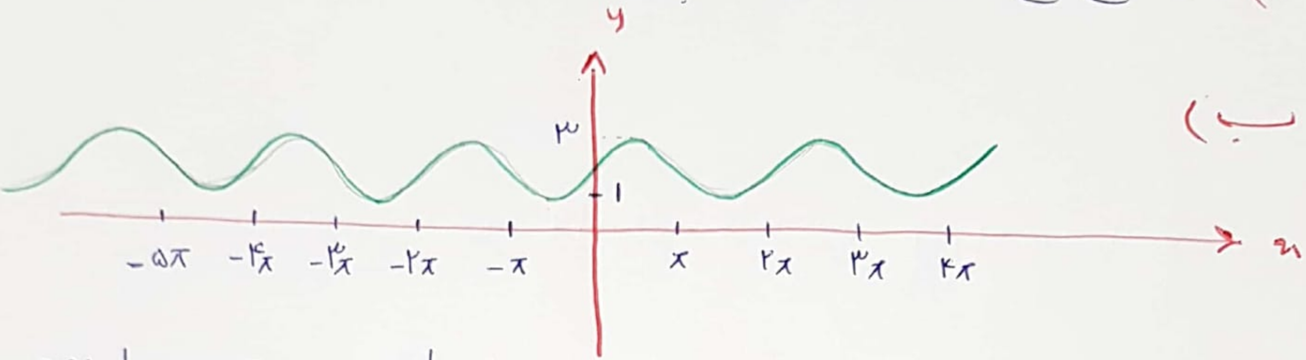
$y=-2\sin\frac{x}{2}-1$

۳) در تابع $y = a\sin bx + c$:

۱) اگر شروع تابع مثل خود تابع $\sin$ بود که a و b هم علامتند.

۲) اگر شروع تابع مثل قرینه تابع $\sin$ بود a و b مختلف العلامه هستند.

ب)



نمودار تابع مثل نمودار تابع $\sin$ است پس باید ضابطه به صورت $y=a\sin bx+c$ می باشد، دوره تناوب 2π است و ماکزیمم و مینیمم به ترتیب ۳ و ۱ می باشد پس $\Leftarrow$

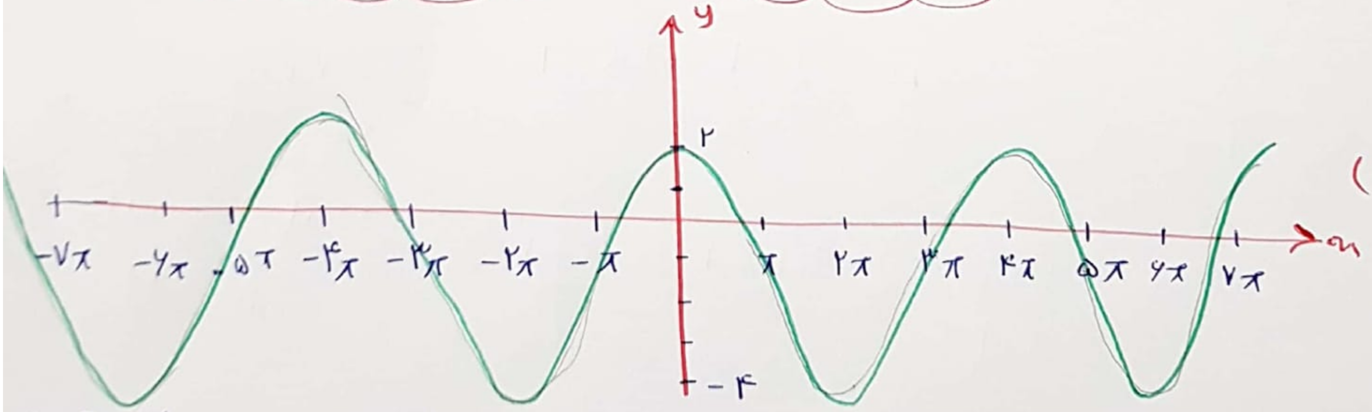
$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = 1$$

$$\begin{cases} |a| + c = 3 \\ -|a| + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{c = 2} \text{ و } |a| = 1$$

چون شروع تابع مثل خود $\sin$ است پس طبق نکته ۱ a و b هم علامتند.

$y = -\sin(-x) + 2$ یا $y = \sin x + 2$

پ)



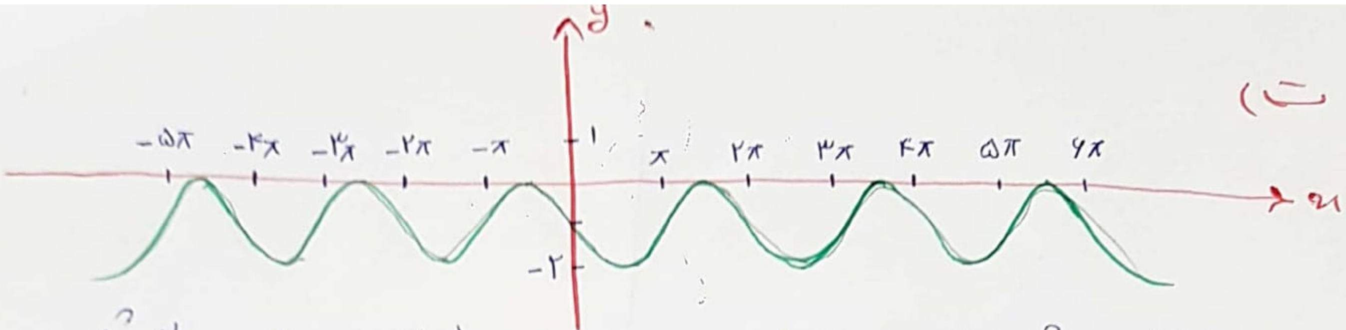
نمودار تابع مثل تابع $\cos$ است پس علامت a مثبت و ضابطه به صورت $y=a\cos bx+c$

دوره تناوب 4π می باشد $T = 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

علامت b در $\cos$ راحت تر است همیشه مثبت بگیریم چون منفی هم باشد تاثیری ندارد.

$$\begin{cases} |a| + c = 2 \\ -|a| + c = -4 \end{cases} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow \underline{c = -1} \text{ و } |a| = 3 \Rightarrow \underline{a = 3} \Rightarrow y = 3\cos\frac{x}{2} - 1$$

ت)



نمودار تابع شبیه تابع sin است پس $y = a\sin bx + c$ می باشد

$$T = 2\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 1$$

$$\begin{cases} |a| + c = 0 \\ -|a| + c = -2 \end{cases} \Rightarrow c = -1 \text{ و } |a| = 1$$

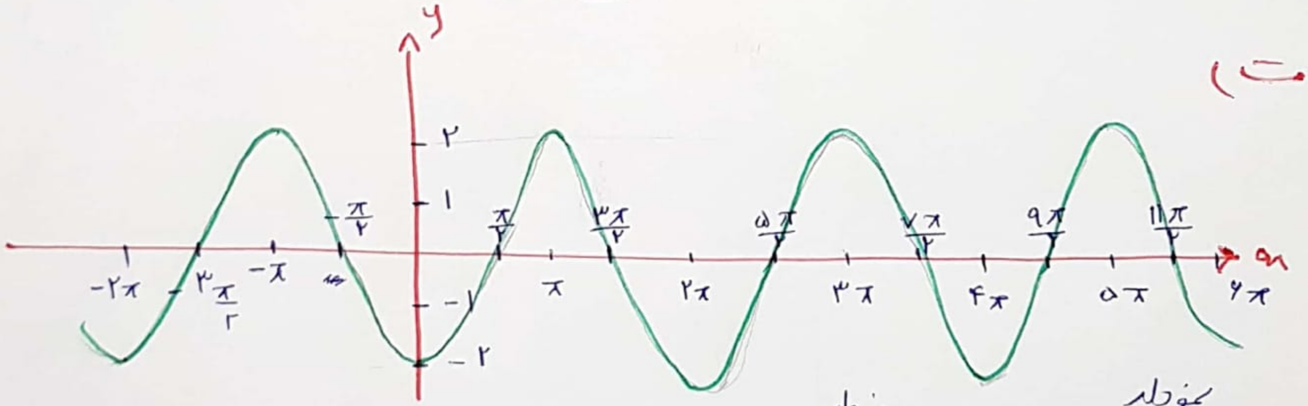
چون شروع تابع شکل قرینه sin است پس a و b مختلف العلامه هستند.

و به دو حالت زیر است:

$a = 1 ,\ b = -1 \rightarrow y = \sin(-x) - 1$

$a = -1 ,\ b = 1 \rightarrow y = -\sin x - 1$

ث)



~~معادله~~ نمودار این تابع مانند نمودار cos است پس معادله آن به صورت

$y = a\cos bx + c$

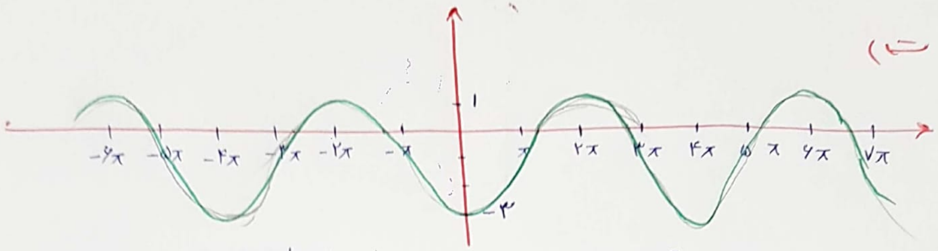
$$T = 2\pi = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b| = 1 \rightarrow \boxed{b = 1}$$

$$\begin{cases} |a| + c = 2 \\ -|a| + c = -2 \end{cases} \rightarrow \boxed{c = 0} \text{ و } |a| = 2$$

$|a| = 2 \rightarrow$ a منفی است چون ابتدای نمودار شیبش مثبت است $\rightarrow \boxed{a = -2}$

$y = -2\sin x$

ت)



نمودار این تابع شبیه تابع cos است. پس ضابطه تابع به صورت $y = a\cos bx + c$ می باشد.

$$T = 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} |a| + c = 1 \\ -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow \underline{c = -1} \,,\, |a| = 2 \Rightarrow \underline{a = -2}$$

a باید منفی باشد چون مانند قرینه cos شروع شده

$$y = -2\cos\frac{1}{2}x - 1$$

ذکر چند نکته:

۱) دوره تناوب توابعی مانند $\sin^{2n-1}(ax+d)$ و $\cos^{2n-1}(ax+d)$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ (که $n \in \mathbb{Z}$ و $a \neq 0$)

۲) دوره تناوب توابعی مانند $\sin^{2n}(ax+d)$ و $\cos^{2n}(ax+d)$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ می باشد.

۳) دوره تناوب توابعی مانند مثال های زیر از رابطه $\frac{\text{ک م م صورت}}{\text{ب م م مخرج}}$ محاسبه می شود.

1) $f(x) = \sin 3x - \cos 5x$

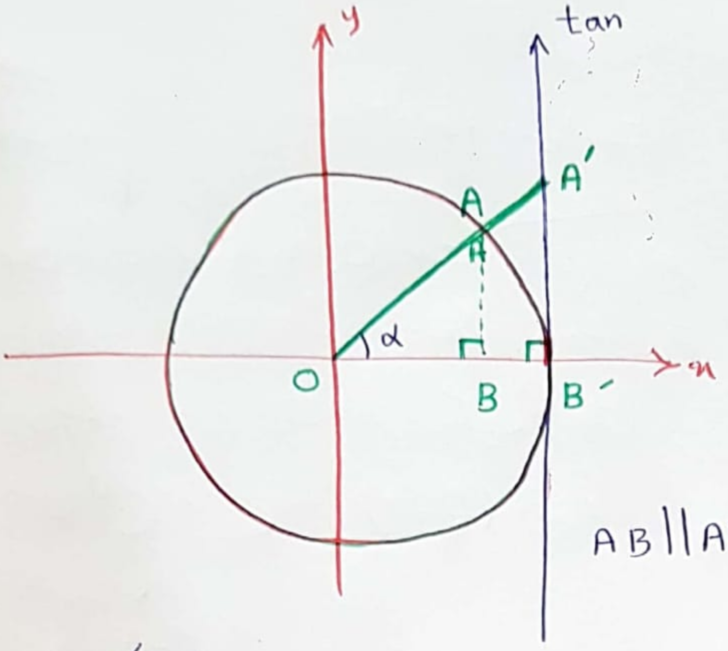
$$T_1 = \frac{2\pi}{3} \quad T_2 = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

2) $g(x) = \cos^2 15x - \tan^3 6x + \sin^5 9x$

$$T_1 = \frac{\pi}{15} \quad T_2 = \frac{\pi}{6} \quad t_3 = \frac{2\pi}{9} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

3) $h(x) = \frac{2\sin x - 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x} \overset{\div \cos x}{=\!=} \frac{2\tan x - 3}{4\tan x + 5} \Rightarrow T = \pi$

تابع tan (تانژانت)



از سال گذشته به یاد دارید که

$AB = \sin\alpha$ و $OB = \cos\alpha$

و طبق قضیه تالس داریم:

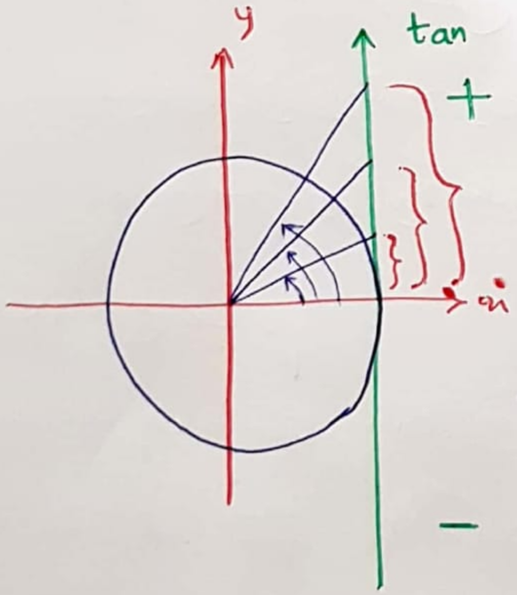
$$AB \parallel A'B' \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

$$\xRightarrow[\text{شعاع دایره مثلثاتی}]{OB' = 1} \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha}{A'B'} \Rightarrow A'B' = \tan\alpha$$

بنابراین برای پیدا کردن tan هر زاویه باید از مرکز دایره به انتهای آن زاویه روی دایره وصل و امتداد دهیم تا محور tan را قطع کند.

تغییرات tan

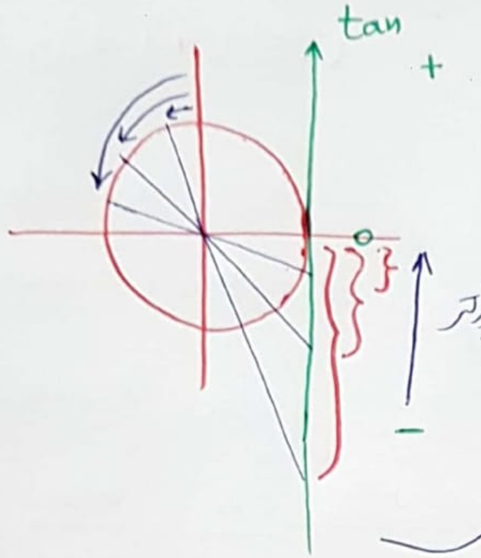
الف) در ربع اول:



همان طور که در شکل نمایان است،

در ناحیه اول tan مثبت است و هرچه زاویه بزرگتر می‌شود مقدار تانژانت نیز افزایش می‌یابد بنابراین تانژانت در ربع اول $(0, \frac{\pi}{2})$ اکیداً صعودی است.

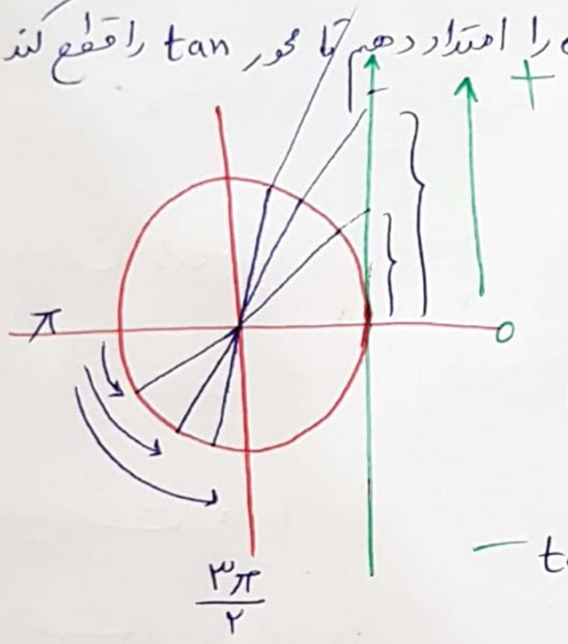
ب) ناحیه دوم



مقدار tan منفی است

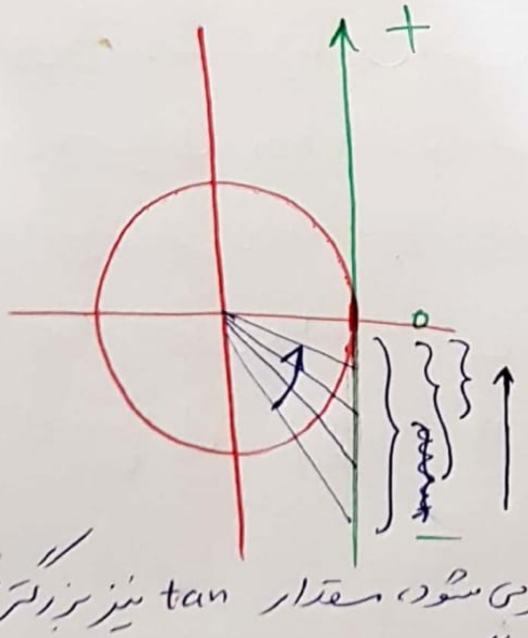
همان طور که در شکل نمایان است در ربع دوم هر چه زاویه بزرگتر می شود، مقدار tan بزرگتر می شود و به سمت صفر نزدیک می شود.
یعنی تابع در ربع دوم $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ اکیداً صعودی است.

* دقت کنید که در ناحیه دوم و سوم انتهای کمان را امتداد دهیم تا محور tan را قطع کند.



پ) ربع سوم:

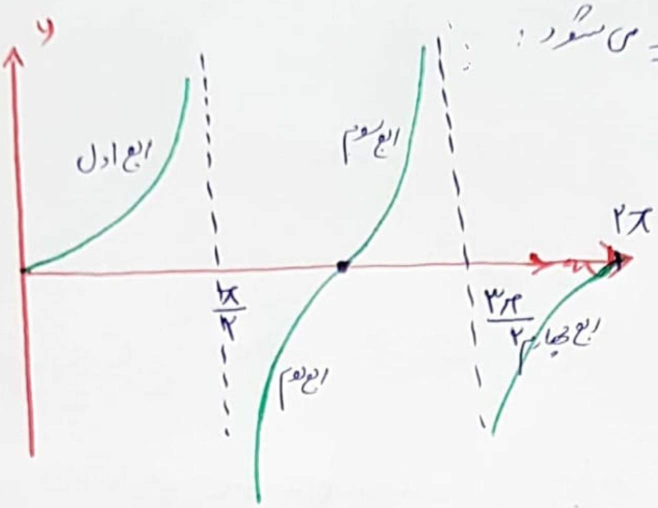
در ناحیه سوم مقدار tan مثبت است
وقتی از π به سمت $\frac{3\pi}{2}$ حرکت می کنیم مقدار tan از صفر شروع می شود و همچنان زیاد می شود. پس تابع tan در ربع سوم نیز اکیداً صعودی است.



ت) ربع چهارم

در ناحیه چهارم مقدار tan مثبت است
وقتی از $\frac{3\pi}{2}$ به 2π حرکت می کنیم مقدار tan از مقدارهای بسیار کوچک منفی شروع و به صفر نزدیک می شود و مقدار tan زیاد می شود. یعنی هرچه زاویه بزرگتر می شود، مقدار tan نیز بزرگتر می شود
پس tan در بازه $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ اکیداً صعودی است.

اگر بخواهیم تغییرات گفته شده در ربع اول، دوم، سوم و چهارم را روی محور مختصات پیاده کنیم به صورت زیر می شود:



نکاتی در زمینه tan

۱) تانژانت در بازه های $(0, \frac{\pi}{2})$ و $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ و $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ و $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ همواره اکیداً صعودی است.

۲) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ پس tan جایی صفر است که sin، صفر است پس tan در $(k \in Z, x = k\pi)$ صفر است و جایی تعریف نشده است که cos، صفر است

پس tan در $(x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z)$ تعریف نشده است.

۳) پس tan، در $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $k \in Z$ تعریف نشده است.

بنابراین اگر بازه ای را انتخاب کنیم که در آن بازه نقطه ای وجود داشته باشد که tan در آن نقطه تعریف نشده باشد، تابع در آن بازه صعودی نیست. به طور کلی تابع tan در این بازه ها غیر یکنوا است. (در بازه ها که در آن بازه نقطه ای باشد که تانژانت تعریف نشده باشد)

۴) دامنه tan برابر است با $R - \{x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\}$

۵) برد tan برابر است با $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی).

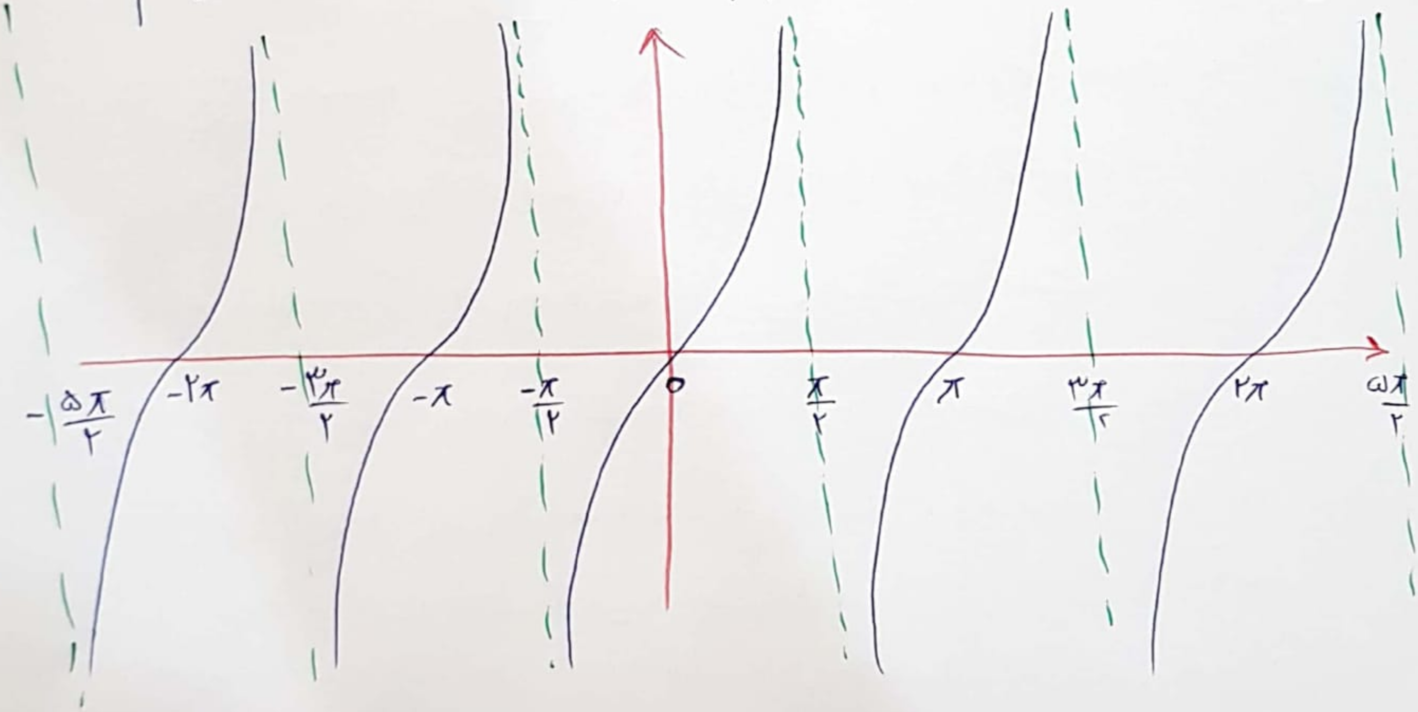
۶) تابع tan در بازه‌های $(0,\frac{\pi}{2})$ و $(\frac{\pi}{2},\pi)$ و $(\pi,\frac{3\pi}{2})$ و $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$
و هر زیرمجموعه‌ای از این بازه‌ها، اکیداً صعودی است.

۷) تابع tan در $k\pi$ ها (مضارب π) . $(\dots,-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi,\dots)$
صفر می‌باشد.

۸) دوره تناوب تابع tan، π می‌باشد.

۹) دوره تناوب تابع $y=a\tan bx+c$ برابر $\frac{\pi}{|b|}$ می‌باشد.

پس می‌توان نمودار tan را با توجه به مطالب ذکر شده به صورت زیر رسم کرد.



مثال: نمودار هر یک از تابع‌های داده شده را در بازه‌های ذکر شده رسم کنید و سپس دوره تناوب هر تابع را روی شکل نشان دهید.

الف) $y=\tan 2x$ $\quad [-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

ب) $y=-\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}$ $\quad [-5\pi,5\pi]$

الف) $y = \tan 2x$ $T = \frac{\pi}{2}$ $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$\tan 2x = 0 \longrightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

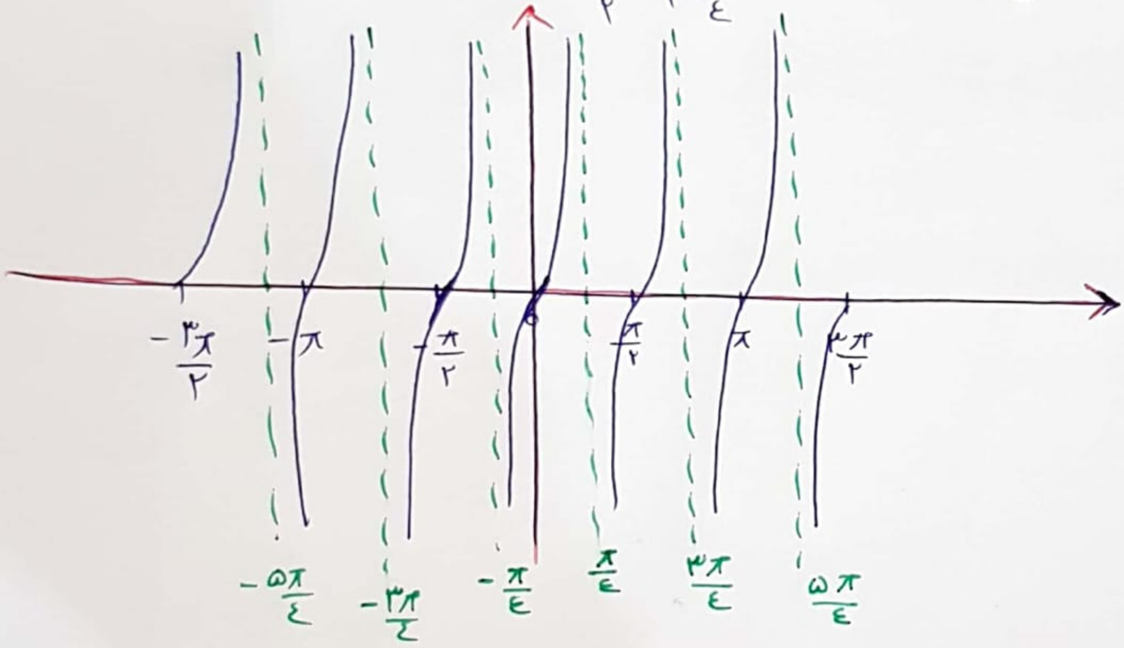
k	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$

در این نقاط تابع محور x ها را قطع می کند (محل برخورد tan با محور tan)

$\tan 2x =$ تعریف نشده $\rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

k	-2	-1	0	1
x	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$



ب) $y = -\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}$ $T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

با توجه به علامت - نمودار نسبت به محور x ها قرینه می شود

$\frac{x}{2} = k\pi \rightarrow x = 2k\pi$

محل تلاقی با محور x ها