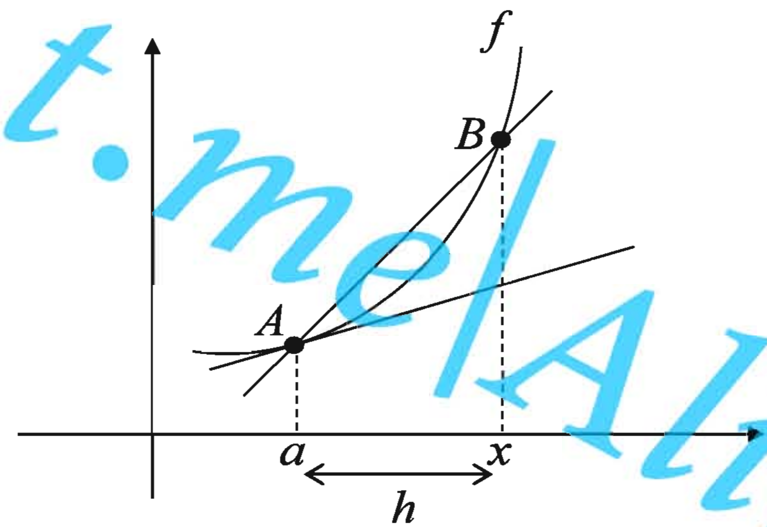
۱- مفهوم هندسی مشتق(تعبیر لایب نیتس از مشتق):



اگر تابع f در فاصله $[a,x]$ تعریف شده و پیوسته باشد و خطی نمودار آن را در نقاط A و B به طول های a و x به فاصله h قطع نماید آن گاه شیب خط AB یا ضریب زاویه آن برابراست با:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

حال اگر در شکل فوق نقطه A ثابت و نقطه B روی نمودار تابع f به نقطه A نزدیک و نزدیک تر شود تا فاصله h رفته رفته کوچکتر گردد تا جایی که h به سمت صفر میل نماید یا x به سمت میل a کند، آن گاه خط قاطع AB به خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه A تبدیل می شود که شیب آن یا ضریب زاویه آن برابر است با:

$$m_A=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

بنابراین لایب نیتس فرمود : شیب خط مماس بر نمودار تابع در یک نقطه یعنی مشتق تابع در آن نقطه

t.me/Alireza_Feizian

۲- مفهوم فیزیکی مشتق(تعبیر نیوتن از مشتق):

اگر معادله حرکت متحرکی بر حسب زمان به صورت $S(t)$ باشد و آن متحرک در لحظه $t_1 = t$ در مکان $S(t_1)$ و در لحظه $t_2 = t + h$ در مکان $S(t_2)$ قرار گیرد، آن گاه سرعت متوسط یا آهنگ متوسط تغییر مکان آن برابر است با:

$$V_{Ave} = \frac{S(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{S(t+h) - f(t)}{h}$$

حال اگر لحظه t_2 به لحظه t_1 نزدیک و نزدیک تر شود تا فاصله h رفته رفته کوچکتر گردد تا جایی که به سمت صفر میل نماید، آن گاه سرعت متوسط به سرعت لحظه ای و یا آهنگ آنی تغییر مکان متحرک تبدیل می شود که مقدار آن برابر است با:

$$V_t = \lim_{h \to 0} \frac{S(t+h) - f(t)}{h}$$

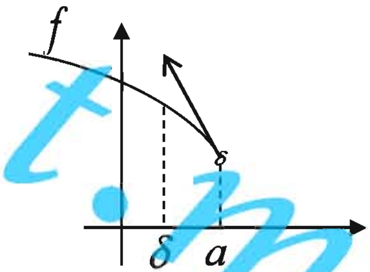
بنابراین نیوتن فرمود : آهنگ آنی تغییرات تابع در یک نقطه یعنی مشتق تابع در آن نقطه

۳- تعریف مشتق:

با توجه به مفهوم بیان شده برای مشتق تابع در یک نقطه، مشتق تابع f در نقطه به طول a را با نماد $f'(a)$ نمایش داده و به صورت های زیر تعریف می نمایند:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

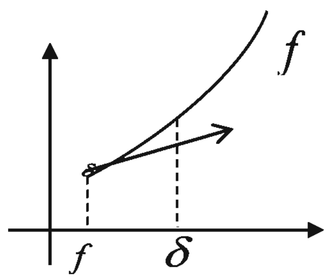
٤-تعریف مشتق چپ:



اگر تابع f در فاصله $(a-\delta,a]$ تعریف شده باشد، حاصل هر یک از حدهای زیر را مشتق چپ تابع f در نقطه a نامیده و آن را با نماد $f'_-(a)$ نمایش می دهند.از نظر هندسی مشتق چپ تابع در یک نقطه شیب نیم خطی است که از چپ در آن نقطه بر نمودار تابع مماس می شود،که آن را نیم مماس چپ تابع در آن نقطه می نامند.

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

٥-تعریف مشتق راست:



اگر تابع f در فاصله$[a,a+\delta)$ تعریف شده باشد، حاصل هر یک از حدهای زیر را مشتق راست تابع f در نقطه a نامیده و آن را با نماد $f'_+(a)$ نمایش می دهند.از نظر هندسی مشتق راست تابع در یک نقطه شیب نیم خطی است که از راست در آن نقطه بر نمودار تابع مماس می شود،که آن را نیم مماس راست تابع در آن نقطه می نامند.

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

٦-تعریف مشتق پذیری تابع در یک نقطه:

تابع f را در نقطه a مشتق پذیر می نامند اگر و فقط اگر مشتق های چپ و راست آن در این نقطه موجود، متناهی و برابر باشند، یعنی:

تابع f را در نقطه a مشتق پذیر است. $\Leftrightarrow$ $f'_+(a)=f'_-(a)=$ یک عدد حقیقی

t.me/Alireza_Feizian

از نظر هندسی اگر تابع f در نقطه a مشتق پذیر باشد، آن گاه دو نیم مماس راست و چپ تابع در این نقطه بر هم منطبق شده و تابع در این نقطه یک مماس کامل و غیر قائم دارد.

۷-قضیه پیوستگی و مشتق پذیری:

اگر تابع f را در نقطه a مشتق پذیر باشد، آن گاه در این نقطه پیوسته است.

۸-تعریف نقطه گوشه:

اگر تابع f در نقطه a پیوسته و مشتق های چپ و راست آن در این نقطه هر دو موجود و حقیقی امّا نابرابر باشند و یا یکی موجود و حقیقی و دیگری نامتناهی باشد آن گاه نقطه به طول a را نقطه زاویه دار یا گوشه نمودار تابع f می نامند. در نقطه زاویه دار تابع می توان دو نیم مماس چپ و راست را بر نمودار تابع رسم نمود.

۹-تعریف مماس قائم:

اگر تابع f در نقطه a پیوسته و مشتق های چپ و راست آن در این نقطه هر دو نامتناهی باشند آن گاه خط $x=a$ را خط مماس قائم بر منحنی تابع f در نقطه به طول a می نامند. به عبارت دیگر $x=a$ را مماس قائم تابع f می نامیم، هرگاه:

$$\left|\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right|=+\infty \quad \text{یا} \quad \left|\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=+\infty$$

t.me/Alireza_Feizian

۱- تابع مشتق:

مشتق تابع f در هر نقطه دلخواه x که درآن مشتق پذیر باشد را تابع مشتقِ آن نامیده و به صورت زیر تعریف می نمایند:

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

۲- فرمول های مشتق:

۱) $f(x)=u(x)\pm v(x) \Rightarrow f'(x)=u'(x)\pm v'(x)=u'\pm v'$ **مشتق مجموع یا تفاضل دو تابع برابر است با مجموع یا تفاضل مشتق های هریک از آن ها**
۲) $f(x)=u(x)\times v(x) \Rightarrow f'(x)=u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x) = u'\times v+v'u$ **مشتق حاصلضرب دو تابع برابر است با مشتق اولی در دومی + مشتق دومی در اولی**
۳) $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times v(x)}{v^{۲}(x)}=\frac{u'v-v'v}{v^{۲}}$ **مشتق حاصل تقسیم دو تابع برابر است با مشتق صورت در مخرج - مشتق مخرج در صورت تقسیم بر مربع مخرج**
۴) $y=f(g(x)) \Rightarrow y'=g'(x)\times f'(g(x))$ **مشتق ترکیب دو تابع برابر است با مشتق تابع درونی در مشتق تابع بیرونی بر حسب درونی**

t.me/Alireza_Feizian

فرمول های مشتق

	معادله تابع	مشتق تابع	مثال
۱	$y = au^n$	$y' = anu'u^{n-1}$	$y = 2(5x^2 - 4x + 1)^7$ $y' = 2 \times 7 \times (10x - 4)(5x^2 - 4x + 1)^6$
۲	$y = \dfrac{au + b}{cu + d}$	$y' = \dfrac{(ad - bc)u'}{(cu + d)^2}$	$y = \dfrac{5x^4 + 7}{6x^4 + 4} \Rightarrow y' = \dfrac{(5 \times 4 - 7 \times 6)(4x^3)}{(6x^4 + 4)^2}$
۳	$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{x^2 - 6x + 1} \Rightarrow y' = \dfrac{2x - 6}{2\sqrt{x^2 - 6x + 1}}$
۴	$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \sqrt[5]{\sin x} \Rightarrow y' = \dfrac{\cos x}{5\sqrt[5]{\sin^4 x}}$
۵	$y = \sqrt[n]{u^m}$	$y' = \dfrac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$	$y = \sqrt[17]{(3x^2 - 5x)^4} \Rightarrow y' = \dfrac{4(6x - 5)}{17\sqrt[17]{(3x^2 - 5x)^{13}}}$

t.me/Alireza_Feizian

فرمول های مشتق

	معادله تابع	مشتق تابع	مثال
۶	$y=\lvert u\rvert$	$y'=\dfrac{uu'}{\lvert u\rvert}$	$y=\lvert 5x^3-x\rvert \Rightarrow y'=\dfrac{(5x^3-x)(15x^2-1)}{\lvert 5x^3-x\rvert}$
۷	$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$	$y=\sin\sqrt{4x^2-3x} \Rightarrow y'=\dfrac{8x-3}{2\sqrt{4x^2-3x}}\cos\sqrt{4x^2-3x}$
۸	$y=\cos u$	$y'=-u\sin u$	$y=\cos\sqrt[3]{x} \Rightarrow y'=\dfrac{-1}{3\sqrt[3]{x^2}}\sin\sqrt[3]{x}$
۹	$y=\tan u$	$y'=u'(1+\tan^2 u)$	$y=\tan\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow y'=(-\dfrac{2}{x^3})(1+\tan^2\dfrac{1}{x^2})$
۱۰	$y=\cot u$	$y'=-u'(1+\cot^2 u)$	$y=\cot\sqrt[4]{x^3} \Rightarrow y'=-(\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x^1}})(1+\cot^2\sqrt[4]{x^3})$

t.me/Alireza_Feizian

	معادله تابع	مشتق تابع	مثال
۱۱	$y=a\sin^{n}u$	$y'=anu'\cos u(\sin u)^{n-۱}$	$y=۴\sin^{۷}\sqrt{x}$ $y'=۴\times ۷\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\sin^{۶}\sqrt{x}$
۱۲	$y=a\cos^{n}u$	$y'=-anu'\sin u(\cos u)^{n-۱}$	$y=۳\cos^{۱۰}\lvert x\rvert$ $y'=-۳\times ۱۰\times\frac{x}{\lvert x\rvert}\sin\lvert x\rvert\cos^{۹}\lvert x\rvert$
۱۳	$y=a\tan^{n}u$	$y'=anu'(۱+\tan^{۲}u)(\tan u)^{n-۱}$	$y=۵\tan^{۳}(۸x^{۲}-۳x)$ $y'=۱۵(۱۶x-۳)(۱+\tan^{۲}(۸x^{۲}-۳x))\tan^{۲}(۸x^{۲}-۳x)$
۱۴	$y=a\cot^{n}u$	$y'=-anu'(۱+\cot^{۲}u)(\cot u)^{n-۱}$	$y=۲\cot^{۵}(\frac{x-۱}{x+۱})$ $y'=-۱۰(\frac{۲}{(x+۱)^{۲}})(۱+\cot^{۲}(\frac{x-۱}{x+۱}))\cot^{۵}(\frac{x-۱}{x+۱})$

t.me/Alireza_Feizian

t.me/Alireza_Feizian

گردآوری: علیرضا فیضیان