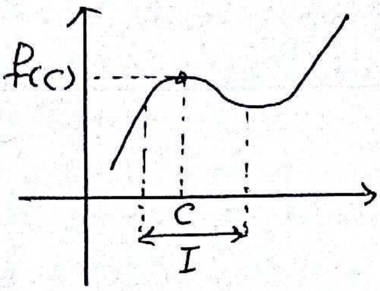
فصل ۵ (کاربردهای مشتق):

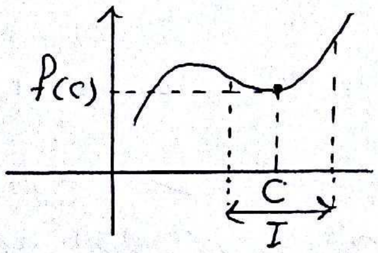
ماکزیمم و مینیمم نسبی:

۱) نقطه $x=c$ را یک نقطه ماکزیمم نسبی تابع f می‌گویند هرگاه یک همسایگی از c مانند $I\subseteq D_f$ باشد که به ازای هر $x\in I$ داشته باشیم: $f(c)\geq f(x)$ ($f(c)$ از تمام نقاط همسایگی اش بیشتر یا با آنها مساوی باشد) در این حالت $f(c)$ را یک نقطه ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامند.



$f(c)=$ ماکزیمم نسبی

۲) نقطه $x=c$ را یک نقطه مینیمم نسبی تابع f می‌گویند هرگاه یک همسایگی از c مانند $I\subseteq D_f$ باشد که به ازای هر $x\in I$ داشته باشیم: $f(c)\leq f(x)$ ($f(c)$ از تمام نقاط همسایگی اش کمتر یا با آنها مساوی باشد) در این حالت $f(c)$ را یک نقطه مینیمم نسبی تابع f می‌نامند.



$f(c)=$ مینیمم نسبی

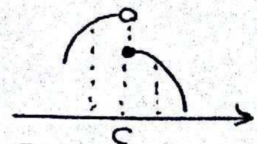
تذکر مهم:

۱) نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع را نقاط اکسترمم تابع می‌نامند.

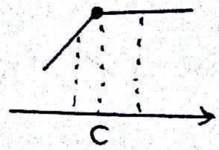
۲) اگر $x=c$ نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد آنگاه تابع در همسایگی این نقطه تعریف شده است.

۳) هر نقطه روی خط $y=c$ (تابع ثابت) هم مینیمم نسبی است و هم ماکزیمم نسبی

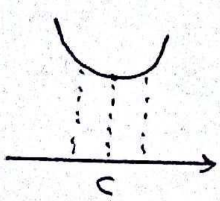
مثال) درکدام یک از شکل های زیر f(c) اکسترمم نسبی است؟



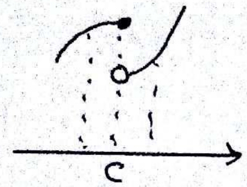
f(c) از نقاط همسایگی راست آن بیشتر و از نقاط همسایگی چپ آن کمتر است پس نه ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی



f(c) = ماکزیمم نسبی است



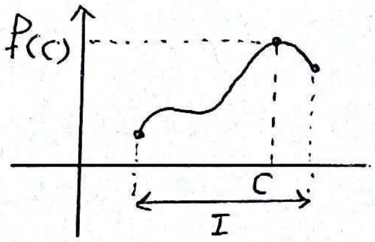
f(c) = مینیمم نسبی است



f(c) = ماکزیمم نسبی است

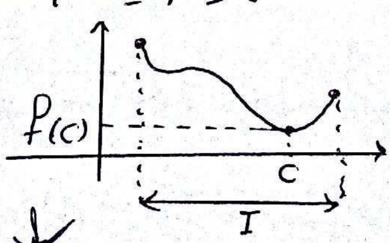
ماکزیمم و مینیمم مطلق:

۱) ماکزیمم مطلق تابع f در بازه I، بیشترین مقدار تابع در آن بازه است پس اگر نقطه x=c ماکزیمم مطلق تابع f باشد هیچ نقطه‌ای بالاتر از آن روی نمودار در آن بازه نباید وجود داشته باشد.



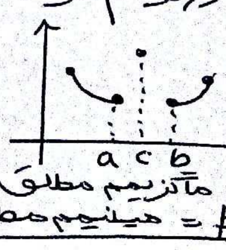
f(c) = ماکزیمم مطلق

۲) مینیمم مطلق تابع f در بازه I، کمترین مقدار تابع در آن بازه است پس اگر نقطه x=c مینیمم مطلق تابع f باشد هیچ نقطه‌ای پایین‌تر از آن روی نمودار در آن بازه نباید وجود داشته باشد.



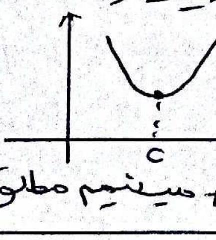
f(c) = مینیمم مطلق

مثال) درکدام یک از شکل های زیر f(c) اکسترمم مطلق است؟

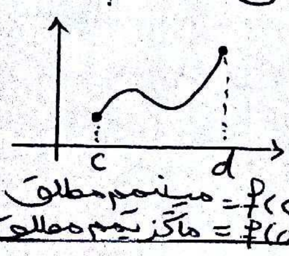


ماکزیمم مطلق = f(c)

مینیمم مطلق = f(a) = f(b)



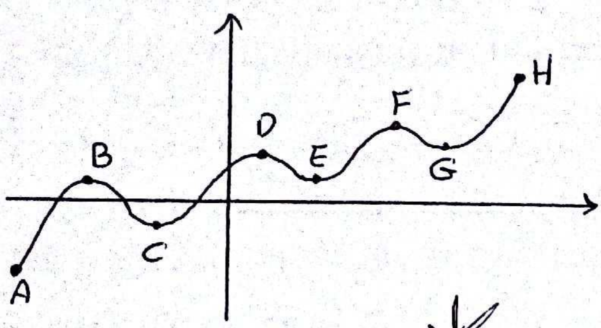
مینیمم مطلق f(c)



مینیمم مطلق = f(c)

ماکزیمم مطلق = f(d)

تذکر مهم:
اگر نمودار تابع چند نقطه ماکزیمم یا مینیمم داشته باشد بالاترین نقطه را ماکزیمم مطلق و بقیه را ماکزیمم نسبی می نامند و پایین ترین نقطه را مینیمم مطلق و بقیه را مینیمم نسبی می نامند.



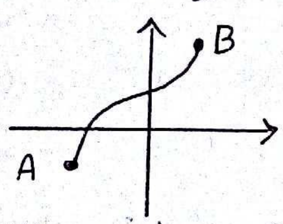
H = ماکزیمم مطلق

ماکزیمم نسبی = B, D, F

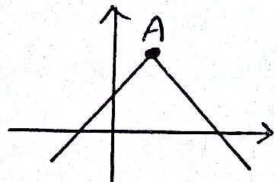
مینیمم مطلق = A

مینیمم نسبی = C, E, G

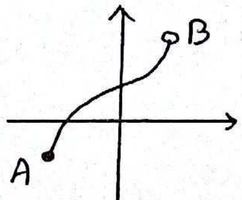
مثال) ماکزیمم و مینیمم مطلق را در نمودارهای زیر مشخص کنید.



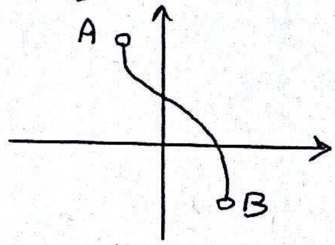
A = مینیمم مطلق
B = ماکزیمم مطلق



A = ماکزیمم مطلق
مینیمم مطلق وجود ندارد



A = مینیمم مطلق
ماکزیمم مطلق وجود ندارد



ماکزیمم و مینیمم مطلق وجود ندارد

نقاط بحرانی تابع:
نقطه $x=c$ از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی برای تابع f می نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد به عبارت دیگر نقطه $x=c$ از دامنه تابع f را نقطه بحرانی می نامند هرگاه در این نقطه مشتق تابع صفر شود یا موجود نباشد.

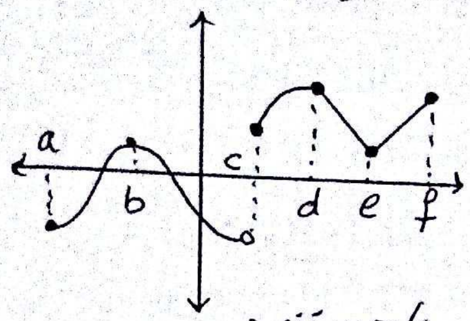
تذکر مهم: اگر $D_f=[a,b]$ باشد نقاط $x=a$ و $x=b$ نقاط بحرانی اند.

مثال ۱: نقاط بحرانی تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را در بازه $[-1,3]$ تعیین کنید.

$$f'(x)=6x^2+6x-12=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \in [-1,3] \\ x=1 \in [-1,3] \end{cases}$$

نقاط به طول $x=-1$ و $x=1$ و $x=3$ نقاط بحرانی تابع هستند.

مثال ۲ : مطلوبست تعیین نقاط بحرانی تابع زیر :



$x=a$ و $x=f$: چون نقاط ابتدایی و انتهایی دامنه هستند.

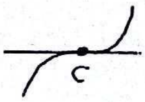
$x=b$: چون مشتق صفر است.

$x=c$: تابع ناپیوسته است.

$x=d$ و $x=e$: چون نقاط گوشه‌ای (زاویه‌ای) هستند.

مثال) کدامیک از جملات زیر درست است؟

۱) در تابع پیوسته f اگر $f'(c)=0$ آنگاه $x=c$ نقطه اکسترمم نسبی تابع است.



نادرست زیرا

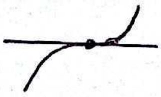
۲) هر نقطه اکسترمم نسبی، یک نقطه بحرانی تابع است.

درست زیرا در نقاط اکسترمم نسبی مشتق تابع صفر است.

۳) اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد در این بازه هم مینیمم مطلق دارد و هم ماکزیمم مطلق

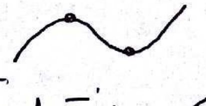
درست

۴) هر نقطه بحرانی تابع یک نقطه اکسترمم نسبی تابع است.



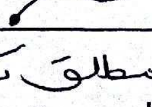
نادرست

۵) هر نقطه اکسترمم نسبی یک نقطه اکسترمم مطلق است.



نادرست

۶) هر نقطه اکسترمم مطلق، یک نقطه اکسترمم نسبی است.



نادرست

روش تعیین ماکزیمم یا مینیمم مطلق یک تابع در یک بازه :

۱) مشتق تابع را مساوی صفر قرار داده ریشه‌های مشتق را حساب کرده و مقدار f را به ازای ریشه‌های مشتق حساب می‌کنیم.

۲) مقدار f را در دو سر بازه پیدا می‌کنیم

۳) بزرگترین مقداری که در مرحله‌های ۱ و ۲ بدست می‌آید را ماکزیمم مطلق و کوچکترین این مقدارها، مینیمم مطلق تابع است.

مثال ۱: طول نقاط بحرانی و اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را در بازه $[-1,3]$ بدست آورید.

$f'(x)=6x^2+6x-12=0 \Rightarrow 6(x^2+x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \in [-1,3] \\ x=1 \in [-1,3] \end{cases}$

طول نقاط بحرانی $\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{cases}$

$f(1)=-7$, $f(-1)=13$, $f(3)=45$

$(3,45)=$ ماکزیمم مطلق

$(1,-7)=$ مینیمم مطلق

(هماهنگ دیماه ۹۹):

مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^3-3x+1$ را در بازه $[-1,2]$ تعیین کنید (۱٫۵ نمره)

$f'(x)=3x^2-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \in [-1,2] \\ x=-1 \in [-1,2] \end{cases}$

$f(1)=-1$, $f(-1)=3$, $f(2)=3$

$\max f(x)=3$

$\min f(x)=-1$

(هماهنگ خرداد ۱۴۰۰):

اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=x^3-3x^2+1$ را در بازه $[-1,1]$ تعیین کنید (۱٫۵ نمره)

$f'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \in [-1,1] \\ x=2 \notin [-1,1] \end{cases}$

$f(1)=-1$, $f(0)=1$, $f(-1)=-3$

$\max f(x)=1$

$\min f(x)=-3$

$(0,1)=$ ماکزیمم مطلق

$(-1,-3)=$ مینیمم مطلق

(هماهنگ خرداد ۹۸): مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt{x^2-2x+4}$ را در بازه $[0,2]$ تعیین کنید (۱٫۵ نمره)

$f'(x)=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+4}}=0 \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x=1 \in [0,2]$

مقدار ماکزیمم مطلق $f(0)=f(2)=2$

$f(0)=2$, $f(1)=\sqrt{3}$, $f(2)=2$

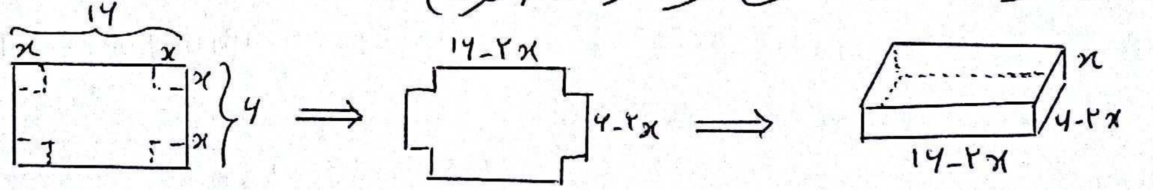
مقدار مینیمم مطلق $f(1)=\sqrt{3}$

بهینه سازی :

یکی از کاربردهای ریاضی، بهینه سازی است یعنی وقت، سرمایه و مواد اولیه کمتری مصرف کنیم و سود بیشتری بدست آوریم پس باید دنبال مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق باشیم برای این منظور ابتدا تابعی که می خواهیم بیشترین یا کمترین مقدار را بگیرد، می نویسیم بعد از تابع مشتق گرفته و با پیدا کردن نقاط بحرانی مقادیر اکسترمم مطلق را بدست می آوریم.

(هماهنگ کشوری شهریور ۱۴۰۰) :

ورق فلزی مستطیل شکلی به طول 16 cm و عرض 6cm درنظر بگیرید. می خواهیم از چهار گوشه آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه x بر می گردانیم تا یک جعبه سرباز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد (۱٫۲۵ نمره)



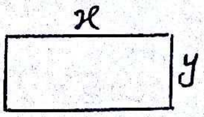
$x =$ ارتفاع جعبه ، $6-2x =$ عرض جعبه $, x \in [0,3]$ ، $16-2x =$ طول جعبه $, x \in [0,8]$

$$V(x) = (16-2x)(6-2x)(x) \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x \qquad 0 \leq x \leq 3$$

$$V'(x) = 12x^2 - 88x + 96 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \notin [0,3] \\ x = \frac{4}{3} \in [0,3] \end{cases}$$

چون $V(0) = V(3) = 0$ پس به ازای $x = \frac{4}{3}$ بیشترین مقدار حجم حاصل می شود

مثال ۱ : اگر محیط یک مستطیل 24cm باشد طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکزیمم شود.

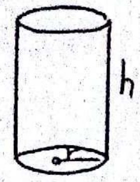


$$2x + 2y = 24 \Rightarrow x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x$$

$$S(x) = xy = x(12 - x) \Rightarrow S(x) = 12x - x^2$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 6} \qquad y = 12 - x = 12 - 6 \Rightarrow \boxed{y = 6}$$

مثال ۲: در استوانه‌ای جمع شعاع قاعده و ارتفاع برابر ۶ است. بیشترین حجم این استوانه را بدست آورید.



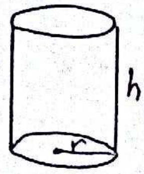
$r+h=6 \Rightarrow h=6-r$

$V=\pi r^2 h=\pi r^2(6-r) \Rightarrow V(r)=\pi(6r^2-r^3)$

$V'(r)=\pi(12r-3r^2)=0 \Rightarrow 12r-3r^2=0 \Rightarrow \begin{cases} r=0 & \text{غ ق ق} \\ r=4 & \text{ق ق} \end{cases}$

$r=4 \Rightarrow h=6-r=6-4=2 \Rightarrow V=\pi r^2 h=\pi(4)^2(2)=32\pi$

مثال ۳: می‌خواهیم با یک صفحه فلزی به مساحت 27π یک استوانه در باز با حجم ماکزیمم بسازیم. شعاع قاعده r، ارتفاع و حجم این استوانه چقدر است؟



$\text{مساحت قاعده} + \text{مساحت بدنه} = 27\pi \Rightarrow \pi r^2+2\pi r h=27\pi$

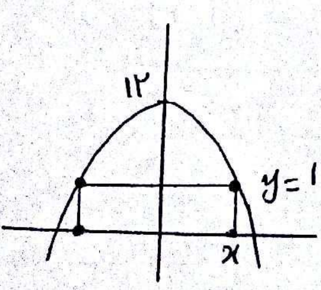
$\Rightarrow h=\dfrac{27\pi-\pi r^2}{2\pi r} \Rightarrow h=\dfrac{27-r^2}{2r}$

$V=\pi r^2 h=\pi r^2\left(\dfrac{27-r^2}{2r}\right) \Rightarrow V(r)=\dfrac{\pi}{2}(27r-r^3)$

$V'(r)=\dfrac{\pi}{2}(27-3r^2)=0 \Rightarrow 27-3r^2=0 \Rightarrow r^2=9 \Rightarrow \boxed{r=3} \Rightarrow h=\dfrac{27-3^2}{2(3)} \Rightarrow \boxed{h=3}$

$V=\pi r^2 h=\pi(3)^2(3) \Rightarrow \boxed{V=27\pi}$

مثال ۴: ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور xها و دو رأس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی به معادله $y=12-x^2$ باشد.



عرض مستطیل $= y$ طول مستطیل $= 2x$

$S=(2x)(y) \Rightarrow S(x)=2xy=2x(12-x^2)=24x-2x^3$

$S'(x)=24-6x^2 \Rightarrow S'(x)=0 \Rightarrow 24-6x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2$

$y=12-x^2=12-(2)^2 \Rightarrow y=8$

پس ابعاد مستطیل برابر ۸ و ۴ خواهد بود.

تشخیص صعودی و نزولی بودن تابع از روی مشتق :

یکی از کاربردهای مشتق، تشخیص صعودی و نزولی بودن تابع است. برای این منظور مشتق تابع را محاسبه کرده و آن را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های مشتق را پیدا می‌کنیم پس مشتق را تعیین علامت می‌کنیم بازه‌هایی که مشتق تابع مثبت باشد، تابع در آن بازه‌ها صعودی و بازه‌هایی که مشتق تابع در آن بازه‌ها منفی باشد تابع نزولی است.

مثال ۱ : مشخص کنید تابع $f(x)=x^3-3x^2+1$ در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

$$f'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)=3x^2-6x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

در بازه $(0,2)$ نزولی و در بازه‌های $(2,+\infty)$ و $(-\infty,0)$ صعودی است

مثال ۲ : مشخص کنید تابع $f(x)=2x^3-9x^2+12x+3$ در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

$$f'(x)=6x^2-18x+12=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$y'=6x^2-18x+12$		$+$	0	$-$	0	$+$	
	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

در بازه $(1,2)$ نزولی و در بازه‌های $(2,+\infty)$ و $(-\infty,1)$ صعودی است.

(هماهنگ کشوری خرداد ۹۸) :

تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ در چه بازه ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است (۱/۲۵ نمره)

$$f'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

در بازه $(-\infty,0)$ نزولی و در بازه $(0,+\infty)$ صعودی است.

آزمون مشتق اول برای پیدا کردن ماکزیمم و مینیمم نسبی:
مشتق تابع را حساب کرده و مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های مشتق را پیدا می‌کنیم سپس مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم نقاطی که مشتق تابع در اطراف آنها تغییر علامت بدهند نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی هستند

مثال ۱: ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $f(x)=x^3-3x^2+3$ را بدست آورید.

$$f'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$y'=3x^2-6x$			0		0		
y	$-\infty$	$\nearrow$	3 Max	$\searrow$	-1 Min	$\nearrow$	$+\infty$

$(0,3)$ نقطه ماکزیمم نسبی — $(2,-1)$ نقطه مینیمم نسبی

مثال ۲: ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $f(x)=2x^3-9x^2+12x+3$ را بدست آورید.

$$f'(x)=6x^2-18x+12=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$y'=6x^2-18x+12$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	8 Max	$\searrow$	7 Min	$\nearrow$	$+\infty$

$(1,8)$ نقطه ماکزیمم نسبی — $(2,7)$ نقطه مینیمم نسبی

مثال ۳: جدول تغییرات تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را مشخص کنید.

$$f'(x)=6x^2+6x-12=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$y'=6x^2+6x-12$			0		0		
y	$-\infty$	$\nearrow$	20 Max	$\searrow$	-7 Min	$\nearrow$	$+\infty$

$(-2,20)$ نقطه ماکزیمم نسبی — $(1,-7)$ نقطه مینیمم نسبی

مثال ۴: اگر تابع $f(x)=ax^2+bx$ در $x=1$ دارای ماکزیمم نسبی برابر 7 باشد مقادیر a و b را بدست آورید.

$$f'(x)=2ax+b \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 2a(1)+b=0 \Rightarrow \boxed{2a+b=0}$$

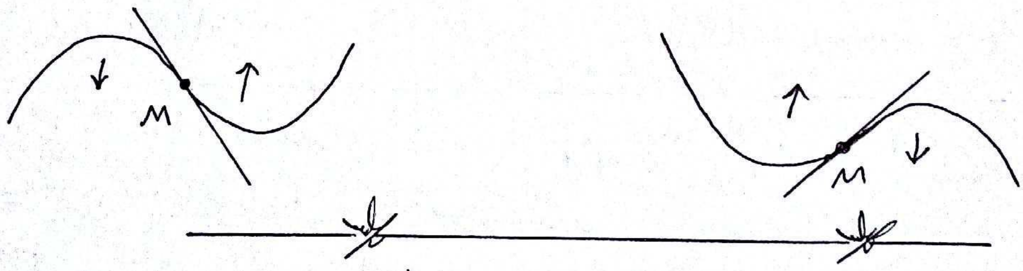
$$f(1)=7 \Rightarrow a(1)^2+b(1)=7 \Rightarrow \boxed{a+b=7}$$

$$\begin{cases} 2a+b=0 \\ a+b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=-7 \\ b=14 \end{matrix}$$

جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن:

اگر تابع f در بازه I مشتق پذیر بوده و در هر نقطه بازه I، مماس بر منحنی را رسم کنیم و نمودار منحنی بالای خط مماس قرار گیرد می گوئیم تقعر منحنی در بازه I به سمت بالا است و اگر در هر نقطه بازه I نمودار منحنی پایین خط مماس قرار گیرد می گوئیم تقعر منحنی در بازه I به سمت پایین است.

هرگاه خط مماس بر منحنی در نقطه ای مانند M واقع بر منحنی موجود باشد و جهت تقعر منحنی در نقطه M عوض شود نقطه M را نقطه عطف (بازگشت) منحنی تابع می نامند. مماس بر منحنی در نقطه عطف از نمودار تابع عبور می کند.



طرز تعیین تقعر و نقطه عطف منحنی:

مشتق دوم را محاسبه کرده آن را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌ها را محاسبه می کنیم. پس مشتق دوم را تعیین علامت می کنیم در بازه ای که مشتق دوم مثبت باشد تقعر منحنی رو به بالا و در بازه ای که مشتق دوم منفی باشد تقعر منحنی رو به پایین است، همچنین اگر مشتق دوم در اطراف نقطه ای تغییر علامت دهد آن نقطه، نقطه عطف منحنی تابع است.

مثال ۱: جهت تقعر و طول نقطه عطف تابع $y=x^3-6x^2-3x$ را درصورت وجود بدست آورید:

$$y'=3x^2-12x-3 \Rightarrow y''=6x-12=0 \Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$y''=6x-12$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\frown$	-22	$\smile$	$+\infty$

$M\begin{vmatrix}2\\-22\end{vmatrix}$ نقطه عطف

تقعر رو به بالا $(2,+\infty)$

تقعر رو به پایین $(-\infty,2)$

مثال ۲: (هماهنگ کشوری خرداد ۹۹):

جهت تقعر و نقطه عطف تابع $f(x)=x^3+3x^2+1$ را مشخص کنید (۲ نمره)

$$f'(x)=3x^2+6x \Rightarrow f''(x)=6x+6=0 \Rightarrow x=-1$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\frown$	0	$\smile$	$+\infty$

$M\begin{vmatrix}-1\\0\end{vmatrix}$ نقطه عطف

تقعر رو به بالا $(-1,+\infty)$

تقعر رو به پایین $(-\infty,-1)$

مثال ۳: به ازای چه مقادیری از a و b نقطه $A(1,-3)$ نقطه عطف تابع $y=x^3+ax^2+bx$ است؟

$$A(1,-3)\in f \Rightarrow -3=1^3+a(1)^2+b(1) \Rightarrow \boxed{a+b=-4}$$

$$y'=3x^2+2ax+b \Rightarrow y''=6x+2a \xrightarrow{x=1} 6(1)+2a=0 \Rightarrow \boxed{a=-3} \Rightarrow \boxed{b=-1}$$

مثال ۴: (هماهنگ کشوری خرداد ۱۴۰۰):

اگر نقطه $A(-1,1)$ نقطه عطف منحنی $f(x)=x^3+ax^2+bx-1$ باشد مقادیر a و b را بدست آورید (۱ نمره)

$$A(-1,1)\in f \Rightarrow f(-1)=1 \Rightarrow (-1)^3+a(-1)^2+b(-1)-1=1 \Rightarrow \boxed{a-b=3}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow f''(x)=6x+2a \xrightarrow{f''(-1)=0} -6+2a=0 \Rightarrow \boxed{a=3}$$

$$\boxed{b=0}$$

مثال ۵: (هماهنگ دیماه ۹۹):

درهر نقطه‌ای که جهت تقعر منحنی تابع عوض شود آن نقطه، نقطه عطف تابع است (ص)

(هماهنگ کشوری شهریور ۱۴۰۰):

جهت تقعر تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ را در دامنه‌اش بررسی کرده و نقطه عطف آن را در صورت وجود بدست آورید (۱٫۲۵ نمره)

$D_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \Rightarrow f''(x)=\frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f''		$+$	ت ن	$-$	
		$\cup$		$\cap$	

$f'(1)=+\infty$ پس تابع در $x=1$ مماس قائم دارد و $x=1$ نقطه عطف است

(هماهنگ خرداد ۹۸):

مقادیر a و b را در تابع $f(x)=ax^3+bx^2-1$ چنان بیابید که $A(1,1)$ نقطه عطف منحنی باشد (۱٫۲۵ نمره)

$$A(1,1)\in f \Rightarrow f(1)=1 \Rightarrow a(1)^3+b(1)^2-1=1 \Rightarrow \boxed{a+b=2}$$

$$f'(x)=3ax^2+2bx \Rightarrow f''(x)=6ax+2b \xRightarrow{f''(1)=0} 6a(1)+2b=0 \Rightarrow 6a+2b=0$$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 6a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=-1 \\ b=3 \end{matrix}$$

رسم نمودار توابع:

مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) ابتدا دامنه تابع را مشخص می‌کنیم

۲) مجانب‌های منحنی را در صورت وجود بدست می‌آوریم و حد تابع را در بینهایت حساب می‌کنیم

۳) محل برخورد منحنی با محورهای مختصات را بدست می‌آوریم.

۴) مشتق اول تابع را تعیین علامت کرده و نقاط اکسترمم تابع را مشخص می‌کنیم

۵) مشتق دوم تابع را تعیین علامت کرده و جهت تقعر و نقطه عطف را مشخص می‌کنیم

۶) هر تابع بصورت $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$ باشد را یک تابع هموگرافیک می‌نامند و نمودار آن به یکی از دو صورت یا است
تابع هموگرافیک نقطه عطف ندارد و نیازی به محاسبه f'' نیست

۷) جدول تغییرات تابع را رسم و از روی آن نمودار تابع را رسم می‌کنیم

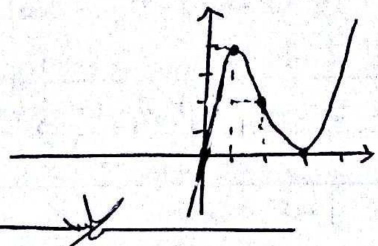
مثال ۱: جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=x^3-6x^2+9x$ را رسم کنید

$D_f=\mathbb{R}$ $\quad y'=3x^2-12x+9=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

$y''=6x-12=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$y=0 \Rightarrow x^3-6x^2+9x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$ طول نقاط برخورد با محور x ها

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
y''		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			Max		عطف		Min		



(هماهنگ دیماه ۹۹):

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ را رسم کنید (۲ نمره)

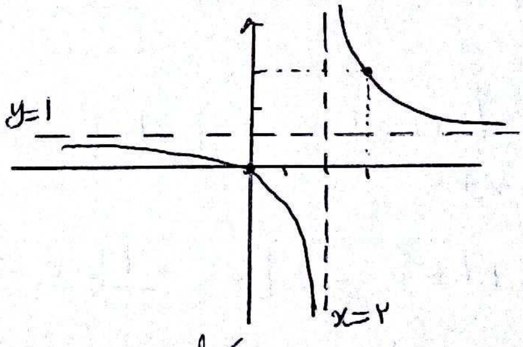
$D_f=\mathbb{R}-\{2\}$ $\quad y'=\dfrac{-2}{(x-2)^2}<0 \Rightarrow$ تابع نزولی

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	|	$-$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	1

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \Rightarrow \boxed{y=1}$ مجانب افقی

$x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$ مجانب قائم

نقاط کمکی: $A\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}3\\3\end{vmatrix}$



(هماهنگ خرداد ۱۴۰۰):

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ را رسم کنید (۲٫۵ نمره)

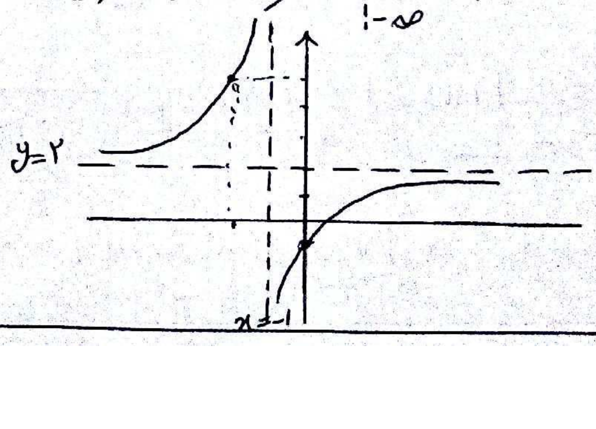
$D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ $\quad y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0 \Rightarrow$ تابع صعودی

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	|	$+$		$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	2

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2 \Rightarrow \boxed{y=2}$ مجانب افقی

$x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$ مجانب قائم

نقاط کمکی: $A\begin{vmatrix}0\\-1\end{vmatrix}$ $\quad B\begin{vmatrix}-2\\5\end{vmatrix}$



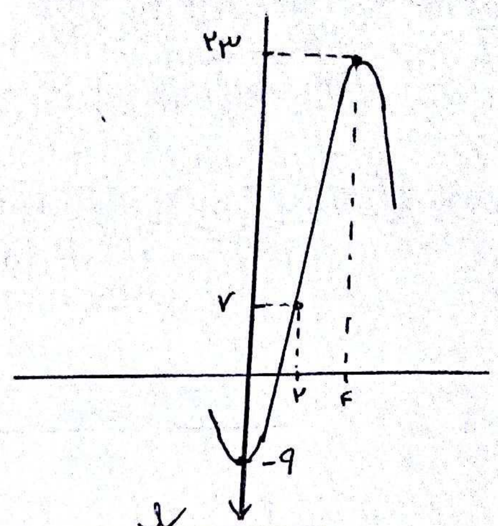
(هماهنگ کشوری شهریور ۱۴۰۰):

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=-x^3+6x^2-9$ را رسم کنید (۱/۵ نمره)

$D_f=\mathbb{R}$ $\quad f'(x)=-3x^2+12x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$

$f''(x)=-6x+12=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f''		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-9 Min	$\nearrow$	7 عطف	$\nearrow$	23 Max	$\searrow$	$-\infty$



(هماهنگ کشوری خرداد ۹۹):

جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ را رسم کنید (۲ نمره)

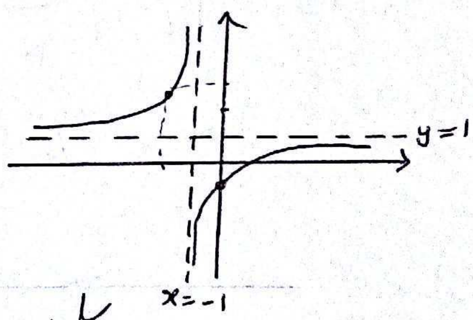
$D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ $\quad y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0 \Rightarrow$ تابع صعودی

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'		$+$		$+$	⫶	$+$		$+$	
f	1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$ ⫶ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	1

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \Rightarrow \boxed{y=1}$ مجانب افقی

$x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$ مجانب قائم

نقاط کمکی: $A\begin{vmatrix}0\\-1\end{vmatrix}$ $\quad B\begin{vmatrix}-2\\3\end{vmatrix}$



(هماهنگ کشوری خرداد ۹۸):

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ را رسم کنید (۱/۷۵ نمره)

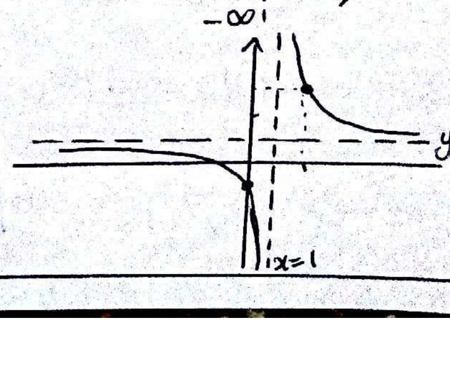
$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ $\quad y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0 \Rightarrow$ تابع نزولی

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		$-$		$-$	⫶	$-$		$-$	
f	1	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ⫶ $+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	1

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \Rightarrow \boxed{y=1}$ مجانب افقی

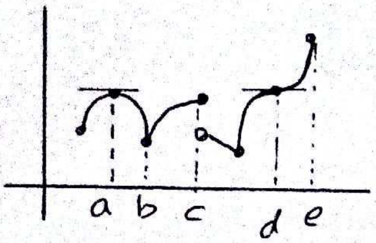
نقاط کمکی: $A\begin{vmatrix}0\\-1\end{vmatrix}$ $\quad B\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix}$

$x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$ مجانب قائم



تمرینات مهم فصل ۵

۱) نمودار تابعی را رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد



نقطه ماکزیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن برابر صفر باشد $x=a$

نقطه مینیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد $x=b$

نقطه ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن ناپیوسته باشد $x=c$

نقطه ای داشته باشد که اکسترمم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد $x=d$

---

۲) ضرایب a و b را در تابع $f(x)=x^3+ax+b$ طوری پیدا کنید که در نقطه $(1,2)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد

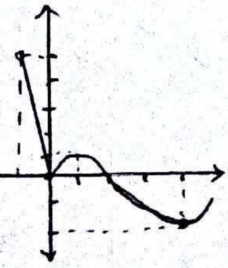
$f'(x)=3x^2+a$

$$(1,2)\in f \Rightarrow f(1)=2 \Rightarrow 1^3+a(1)+b=2 \Rightarrow \boxed{a+b=1}$$

$$f'(1)=0 \Rightarrow 3(1)^2+a=0 \Rightarrow \boxed{a=-3} \Rightarrow \boxed{b=4}$$

---

۳) نمودار تابعی مانند f را به گونه ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند:



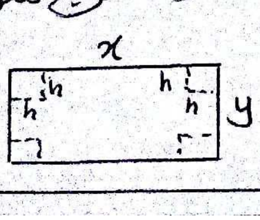
$f(-1)=5$ و $f(4)=-2$ ، $f(0)=0$

نقطه $(1,1)$ ماکزیمم نسبی این تابع باشد

---

۴) یک برگه کاغذی مستطیل شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه های آن و تا زدن اضلاع یک مکعب ساخته شده است اگر $h=2\,cm$ و $xy=100\,cm^2$ مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار ممکن شود

ارتفاع $=h=2$ ، عرض $=y-2h=y-4$ ، طول $=x-2h=x-4$



$$V=(x-4)(y-4)(2)=2xy-8(x+y)+32 \overset{xy=100}{=} 232-8(x+y)$$

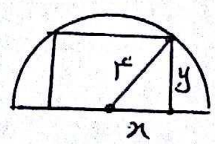
چون: $xy=100 \Rightarrow y=\frac{100}{x}$

$$V(x)=232-8\left(x+\frac{100}{x}\right) \Rightarrow V'(x)=-8\left(1-\frac{100}{x^2}\right)=-8+\frac{800}{x^2}=0$$

$\Rightarrow x^2=100 \Rightarrow \boxed{x=10}$ بیشترین مقدار حجم در $x=10$ رخ می‌دهد

$$x=10 \Rightarrow y=\frac{100}{x}=\frac{100}{10} \Rightarrow y=10$$

۵) یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است اگر شعاع دایره $4cm$ باشد طول و عرض مستطیل را طوری بدست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.



$$x^2+y^2=4^2 \Rightarrow y^2=16-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{16-x^2}$$

$$S_{\text{مستطیل}}=2x\cdot y=2x\sqrt{16-x^2} \Rightarrow S'(x)=2\sqrt{16-x^2}+\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}\times 2x$$

$$\Rightarrow S'(x)=\frac{32-4x^2}{\sqrt{16-x^2}}=0 \Rightarrow 32-4x^2=0 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x=2\sqrt{2}$$

بیشترین مقدار مساحت به ازای $x=2\sqrt{2}$ بدست می‌آید.

$$y=\sqrt{16-x^2}=\sqrt{16-8}=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \Rightarrow S_{max}=2xy=2\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=16$$

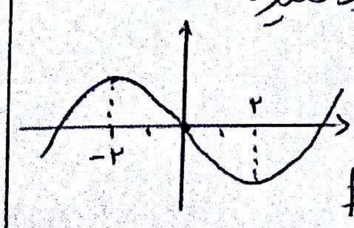
۶) مقادیر a و b و c را در تابع $f(x)=ax^3+bx^2+c$ طوری بدست آورید که در شرایط زیر صدق کند: $f(0)=1$ و $f(1)=2$ و طول نقطه عطف $x=\frac{1}{2}$

$f(0)=1 \Rightarrow \boxed{c=1}$ $\quad f(1)=2 \Rightarrow a+b+1=2 \Rightarrow \boxed{a+b=1}$

$f'(x)=3ax^2+2bx \Rightarrow f''(x)=6ax+2b \Rightarrow f''(\frac{1}{2})=0 \Rightarrow \boxed{3a+2b=0}$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \quad \boxed{a=-2} \quad \boxed{b=3}$$

۷) اگر $(0,0)$ نقطه عطف تابع درجه سوم با ضابطه $y=x^3+ax^2+bx+c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است a و b و c را پیدا کنید.



$f(0)=0 \Rightarrow \boxed{c=0}$ $\quad x=\pm 2 \xrightarrow{\text{طول نقاط اکسترمم}} f'(2)=f'(-2)=0$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow \begin{cases} f'(2)=0 \Rightarrow 4a+b=-12 \\ f'(-2)=0 \Rightarrow -4a+b=-12 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=0} \quad \boxed{b=-12}$$

(پایان)