((فصل دوّم : آشنایی با مقاطع مخروطی))

درس۱ : آشنایی با مقاطع مخروطی

(❋) مقاطع مخروطی

۱	دی ۱۳۹۷	۰/۲۵ نمره

۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

صفحه‌ای با مولد سطح مخروطی دواری، موازی است و از رأس آن عبور نمی کند. فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک بیضی است.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۲ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولّد آن (d) نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه‌ی مخروط را قطع کند. فصل مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود.

۳	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۳ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی l عمود باشد و از رأس عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.

۴	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۴ : در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی L عمود باشد و از رأس آن عبور کند، شکل حاصل یک ..... خواهد بود.

۵	دی۹۹	۰/۲۵ نمره

۵ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد آن نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه‌ی مخروط را قطع کند. فصل مشترک حاصل یک .... خواهد بود.

۶	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۶ : جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید.

اگر صفحه‌ی P با مولد (d) موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند. در این صورت فصل مشترک صفحه‌ی P و سطح مخروطی یک .... است.

۷	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۷ : اگر صفحه‌ی P به گونه ای باشد که هر دو تکه ی بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور باشد، در این صورت فصل مشترک صفحه‌ی P و سطح مخروطی یک هذلولی است.

(❋) مکان هندسی

۱	دی ۱۳۹۷	۰/۲۵ نمره

۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d' و d به یک فاصله اند. نیمساز زاویه‌ی بین آن دو خط می باشد.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۲ : جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آنها یک .... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۳ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصلشان از دو نقطه‌ی ثابت، یک مقدار ثابت باشد، یک .... است.

۴	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۴ : دو نقطه‌ی A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند، نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله‌ی۳ سانتی متر باشد. (پیرامون وجود جواب بحث کنید.)

۵	شهریور ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۵ : نقاط A و B و C در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از نقطه‌ی به فاصله‌ی۳ سانتی متر باشد. (در مورد تعداد نقاط در حالت های مختلف بحث کنید.)

۶	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : نقاط A و B و C در صفحه مفروضند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از C به فاصله‌ی۳ سانتی متر باشد. (پیرامون جواب مسئله بحث کنید.)

۰/۲۵ نمره	خرداد ۱۳۹۹	۷

۷ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

مکان هندسی مرکز همه‌ی دایره هایی با شعاع ثابت r که بر دایره‌ی $C(O,r)$ در صفحه‌ی این دایره مماس خارج اند، دایره ی $C'(O,2r)$ است.

۱/۵ نمره	خرداد ۱۳۹۹	۸

۸ : نقاط A و B و C و D در صفحه مفروض اند، نقطه ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد.(بحث کنید.)

۰/۲۵ نمره	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۹

۹ : درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را معلوم کنید.

مکان هندسی مرکزهای همه‌ی دایره هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس اند، دو خط به موازات d و به فاصله‌ی r از d است.

۰/۵ نمره	شهریور ۱۳۹۹	۱۰

۱۰ : درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف : مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

ب : هرگاه صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

۰/۲۵ نمره	دی ۱۳۹۹	۱۱

۱۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله اند، نیمساز زاویه‌ی بین آن دو خط می باشد.

۱/۵ نمره	دی ۱۳۹۹	۱۲

۱۲ : نقطه‌ی A و خط d در صفحه‌ی مفروض اند. نقطه ای را بیابید که از A به فاصله‌ی۲ سانتی متر و از خط d به فاصله‌ی۳ سانتی متر باشد. در مورد روش حل بحث کنید.

۰/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	۱۳

۱۳ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

مکان هندسی مرکزهای همه‌ی دایره هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A مماس اند، یک نیم خط عمود بر خط d در نقطه‌ی A است.

۱۴	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۴ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه یا فضا است که همه‌ی آنها یک ویژگی ...... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

❋❋❋

درس۲ : دایره

(❋) دایره

۱	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره

۱ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که نقاط $A(۴,-۱)$ و $B(-۲,۱)$ دو سر قطری از آن باشند.

۲	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۲ : حدود a را طوری به دست آورید که $x^۲+y^۲-۳x+۵y+a=۰$ بتواند معادله‌ی یک دایره باشد.

۳	دی ۱۳۹۷	۱/۷۵ نمره

۳ : دایره های $x^۲+y^۲-۲x=۴$ و $x^۲+y^۲=۴$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۴	خرداد ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۴ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=-۵$ بر آن مماس باشد.

۵	خرداد ۱۳۹۸	۱ نمره

۵ : از نقطه‌ی $A(۲,۳)$ روی دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر دایره رسم کرده ایم. معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید.

۶	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : دایره های $x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$ و $x^۲+y^۲=۱$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۷	شهریور ۱۳۹۸	۱ نمره

۷ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که نقطه‌ی $O(-۲,۳)$ مرکز آن و $M(۱,-۱)$ یک نقطه از آن باشد.

۸	شهریور۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۸ : وضعیت خط $x+y=۲$ و دایره‌ی $x^۲+y^۲=۲$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۹	دی۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

معادله‌ی ضمنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادله‌ی یک دایره است، اگر و تنها اگر $a^۲+b^۲<۴c$ باشد.

۱۰	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۱۰ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(۲,-۲)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی $x^۲+y^۲+۲x-۴y=۴$ مماس خارج باشد.

۱۱	دی ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۱۱ : وضعیت خط $۳x+y=۰$ را نسبت به دایره‌ی $x^۲+y^۲-۴x-۴y+۷=۰$ مشخص کنید.

۱۲	خرداد ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۲ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(-۱,-۱)$ مرکز آن بوده و روی خط $۲x+y=۲$ وتری به طول ۴ ایجاد کند.

۱۳	خرداد ۱۳۹۹	۱ نمره

۱۳ : وضعیت نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ نسبت به دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ را تعیین کنید.

۱۴	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۵ نمره

۱۴ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(۰,۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله‌ی $x+y=۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ جدا کند.

۱۵	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱ نمره

۱۵ : وضعیت دو دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x=۴$ و $x^۲+y^۲=۴$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۶	شهریور۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۶ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

رابطه‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۴y+۱۰=۰$ معادله‌ی یک دایره است.

۱۷	شهریور۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۷ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(۳,۱)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادله‌ی $۴x+۳y+۵=۰$ مماس باشد.

۱۸	شهریور۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۸ : وضعیت خط $x-y-1=0$ و دایره‌ی $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۹	شهریور۱۳۹۹	۲ نمره

۱۹ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ باشد و با دایره به معادله‌ی

$$x^2+y^2-8x+4y+16=0$$

مماس داخل باشد.

۲۰	دی۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۲۰ : درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

نقطه‌ی $(3,-2)$ روی دایره‌ی $x^2+y^2+2x=0$ قرار دارد.

۲۱	دی۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۲۱ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=-5$ بر آن مماس باشد.

۲۲	دی۱۳۹۹	۲ نمره

۲۲ : وضعیت دو دایره‌ی $(x-1)^2+y^2=1$ و $x^2+(y-1)^2=1$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۲۳	خرداد ۱۴۰۰	۱ نمره

۲۳ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(2,1)$ بوده و بر خط $3x+4y=-5$ مماس باشد.

۲۴	خرداد ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۲۴ : وضعیت دایره‌ی $x^2+y^2-6x-2y+9=0$ با دایره ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید.

۲۵	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۲۵ : نقطه‌ی $(3,-2)$ روی دایره‌ی $x^2+y^2+2x=0$ قرار دارد.

۲۶	شهریور ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۲۶ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(0,1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله‌ی $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.

۲۷	شهریور ۱۴۰۰	۱ نمره

۲۷ : در نقطه‌ی $A(۲,۳)$ روی دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر آن رسم کرده ایم. معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید.

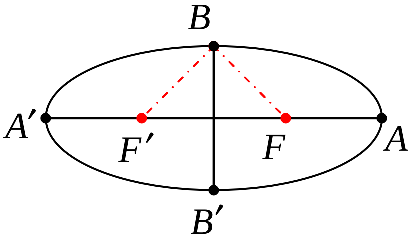
❋❋❋

درس ۳ : بیضی و سهمی

(❋) بیضی

۱	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره

۱ : در بیضی شکل مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' را تعیین کنید.



۲	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره

۲ : جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

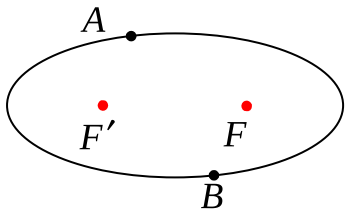
در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک .... می شود.

۳	خرداد ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۳ : اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۳}{۵}$ و طول قطر کوچک بیضی۱۶ باشد. طول قطر بزرگ بیضی و فاصله‌ی کانونی آن را به دست آورید.

۴	خرداد ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۴ : دو نقطه‌ی A و B مطابق شکل، روی بیضی و نقاط F و F' کانون های بیضی اند. اگر $AF'=BF$ باشد، ثابت کنید دو پاره خط AF و BF' موازی اند.

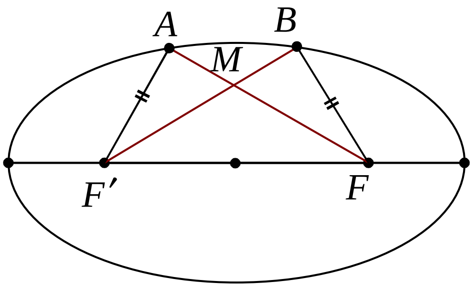


۵	تیر ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۵ : اگر $A(۲,۱۲)$ و $A'(۲,-۸)$ دو رأس بیضی(AA' قطر بزرگ بیضی) و خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۳}{۵}$ باشد. فاصله‌ی کانونی بیضی را به دست آورید.

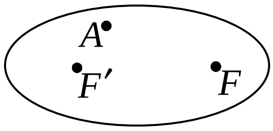
۶	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : دو نقطه‌ی A و B روی یک بیضی و F و F' کانون های بیضی اند. با توجه به شکل، اگر $AF'=BF$ باشد. نشان دهید مثلث FMF' متساوی الساقین است.



۷	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۷ : در شکل مقابل نقطه‌ی A داخل بیضی و نقاط F و F' کانون های بیضی اند. ثابت کنید که مجموع فواصل نقطه‌ی A از F و F' کوچکتر از قطر بزرگ بیضی است.



۸	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۸ : بیضی با قطرهای ۶ و ۱۰ مفروض است، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

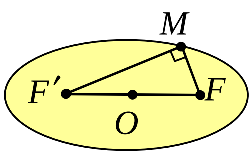
۹	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود.

۱۰	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۱۰ : نقطه‌ی M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه ای قرار دارد که فاصله‌ی آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. در صورتی که بدانیم مثلث MFF' قائم الزاویه است. طول MF را بدست آورید. (F و F' کانون های بیضی هستند.)



۱۱	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۱ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر مجموع فواصل نقطه‌ی A از دو کانون بیضی بیشتر از طول بزرگ باشد، نقطه‌ی A در .... بیضی است.

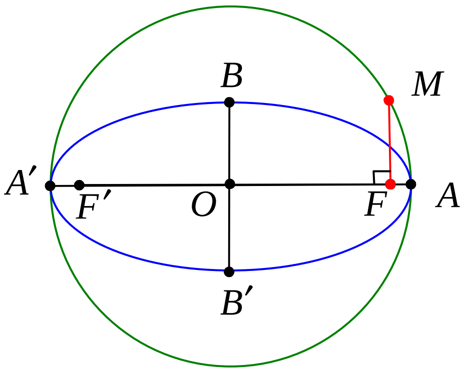
۱۲	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۲ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک دایره می شود.

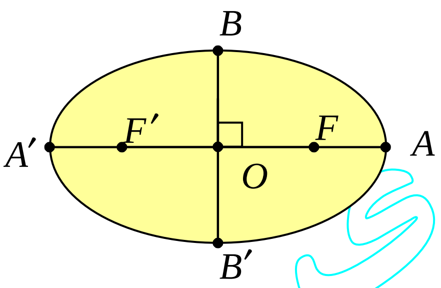
۱۳	خرداد ۱۳۹۹	۱ نمره

۱۳ : قطر دایره‌ی C مانند شکل مقابل، قطر بزرگ بیضی است. و از کانون F عمودی بر قطر AA' رسم کرده ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید که اندازه‌ی MF برابر نصف اندازه‌ی قطر کوچک بیضی است.



۱۴	خرداد ۱۳۹۹	۱/۵ نمره

۱۴ : در بیضی مقابل طول قطر بزرگ $\sqrt{۲}$ برابر طول قطر کوچک است. اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' چند درجه است؟



۱۵	خرداد ۱۳۹۹	۱ نمره

۱۵ : اگر در یک بیضی طول قطر کوچک ۲۴ و فاصله‌ی کانون تا مرکز آن برابر ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

۱۶	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۱۶ : در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

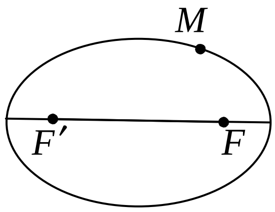
در صورتی که خروج از مرکز بیضی برابر ...... باشد، بیضی تبدیل به یک دایره می شود.

۱۷	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۵ نمره

۱۷ : در یک بیضی خروج از مرکز برابر $\frac{۴}{۵}$ و اندازه‌ی قطر بزرگ بیضی برابر ۲۰ است. طول قطر کوچک بیضی و اندازه‌ی کانونی آن را بیابید.

۱۸	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۲۵ نمره

۱۸ : در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی و کانون های F و F' مشخص شده اند.
خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه ای مانند N قطع کند.
ثابت کنید $NF' = MF'$



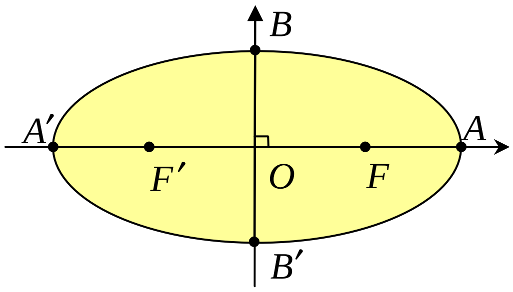
۱۹	شهریور ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۹ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر طول قطر بزرگ بیضی دو برابر فاصله‌ی کانونی آن باشد، خروج از مرکز بیضی برابر .... است.

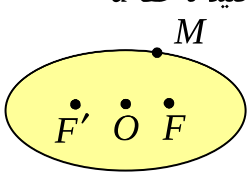
۲۰	شهریور ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۲۰ : مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله‌ی F از هر دو نقطه‌ی O و A برابر ۴ است. طول قطر کوچک بیضی را محاسبه کنید.



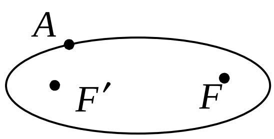
۲۱	شهریور ۱۳۹۹	۱ نمره

۲۱ : در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی و کانون های F و F' مشخص شده اند. خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $MF' = NF'$



۲۲	دی ۱۳۹۹	۱ نمره

۲۲ : دو نقطه‌ی A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانون های بیضی اند.
اگر $AF' = BF$ باشد، ثابت کنید دو پاره خط AF و BF' موازیند.



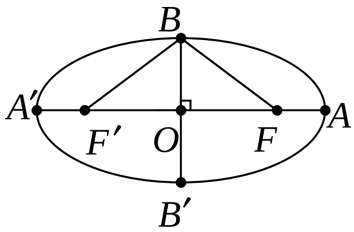
۲۳	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۲۳ : جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید.

در بیضی، در حالتی که $\frac{c}{a}=۰$ بیضی به .... تبدیل می شود.

۲۴	خرداد ۱۴۰۰	۱ نمره

۲۴ : در بیضی شکل مقابل، اگر $OA=a$ و $OB=b$ و $OF=c$ باشد، ثابت کنید: $a^۲=b^۲+c^۲$

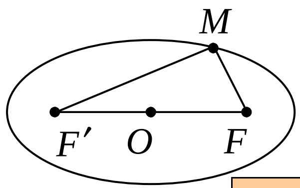


۲۵	خرداد ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۲۵ : نقطه‌ی M روی بیضی به اقطار ۱۰ و ۶ واحد به گونه ای قرار دارد که فاصله‌ی آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

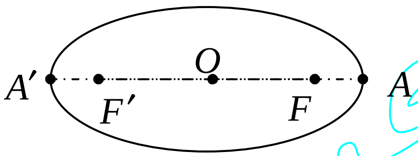
الف) نشان دهید مثلث MFF' قائم الزاویه است.

ب) طول MF را به دست آورید. (F' و F کانون های بیضی هستند و $MF < MF'$)



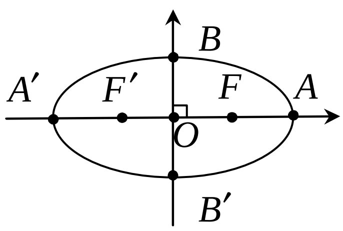
۲۶	شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۲۶ : در بیضی روبرو نقاط A و A' دو سر قطر بزرگ و نقاط F و F' کانون های بیضی هستند. ثابت کنید $A'F'=AF$



۲۷	شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۲۷ : در بیضی مقابل، طول قطر کوچک $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول قطر بزرگ است. اندازه‌ی زاویه‌ی $F'BF$ را به دست آورید.



۲۸	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۲۸ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

در حالتی که $\frac{c}{a}=۱$ بیضی به یک ..... تبدیل می شود.

(*)سهمی

۱	دی ۱۳۹۷	۱/۲۵ نمره

۱ : معادله‌ی سهمی را بنویسید که $F(۱,-۲)$ کانون و $S(۱,۲)$ رأس آن باشد. سپس خط هادی آن را بنویسید.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۲ نمره

۲ : سهمی $y^۲ - ۲y + ۸x + ۹ = ۰$ مفروض است.

الف : مختصات رأس، مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی را به دست آورید.

ب : نمودار سهمی را رسم کنید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۲ نمره

۳ : سهمی به معادله‌ی $y^۲ = ۴x - ۴y$ مفروض است. مختصات رأس سهمی، مختصات کانون سهمی و معادله‌ی خط هادی را بنویسید و سپس نمودار سهمی را رسم کنید.

۴	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۴ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه‌ی ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند را .... می نامیم.

۵	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۵ : اگر نقطه‌ی $A(۲,۳)$ رأس سهمی و $y = ۷$ معادله‌ی خط هادی سهمی باشد.

الف: معادله‌ی سهمی را بنویسید.

ب : مختصات کانون سهمی را به دست آورید.

۶	دی ۱۳۹۸	۱/۷۵ نمره

۶ : سهمی $y^۲ = ۴x - ۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره ای رسم می کنیم. معادله‌ی دایره را بنویسید و سپس مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۷	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۷ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه‌ی سهمی بتابد، بازتاب آن از .... خواهد گذشت.

۸	خرداد ۱۳۹۹	۲/۵ نمره

۸ : الف : مختصات رأس ، کانون و معادله‌ی خط هادی سهمی $x^2-4y+8x=0$ را به دست آورید.

ب : نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.

۹	خرداد ۱۳۹۹	۲ نمره

۹ : سهمی $y^2=4x-4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ دایره ای رسم می کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۰	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۲ نمره

۱۰ : سهمی $x^2=2y-4x$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و مختصات نقطه‌ی برخورد سهمی و محور های مختصات را بیابید.

۱۱	شهریور ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۱ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک ..... ثابت غیر واقع برآن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

۱۲	شهریور ۱۳۹۹	۱/۷۵ نمره

۱۲ : مختصات کانون، مختصات رأس و معادله‌ی خط هادی سهمی به معادله‌ی $y^2-6y+16x+25=0$ را تعیین کنید.

۱۳	شهریور ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۳ : معادله‌ی سهمی را بنویسید که $A(4,6)$ رأس و $y=3$ معادله‌ی خط هادی آن باشد.

۱۴	دی ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۴ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

رأس سهمی به معادله‌ی $y^2+2x-2y=0$ ، نقطه‌ای به مختصات .... است.

۱۵	دی ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۵ : معادله‌ی سهمی را بنویسید که $A(1,2)$ رأس و $F(1,-2)$ کانون آن باشد. سپس خط هادی آن را بیابید.

۱۶	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۶ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه‌ی سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.

۱۷	خرداد ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۱۷ : اگر نقطه‌ی $A(۲,۳)$ رأس سهمی و $y=۷$ معادله‌ی خط هادی سهمی باشد.

الف : معادله‌ی سهمی را به دست آورید. ب : مختصات کانون سهمی را بیابید.

۱۸	خرداد ۱۴۰۰	۰/۷۵ نمره

۱۸ : در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه‌ی دایره ای به قطر۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد، مفروض است. فاصله‌ی کانونی این دیش را به دست آورید.

۱۹	شهریور ۱۴۰۰	۲ نمره

۱۹ : سهمی به معادله‌ی $y^۲-۲y+۸x+۹=۰$ را در نظر بگیرید.

الف : مختصات رأس ، کانون و معادله‌ی خط هادی سهمی را به دست آورید.

ب : نمودار سهمی را رسم کنید.

❋❋❋

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل دوّم هندسه۳ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس۱ : آشنایی با مقاطع مخروطی

(❋) مقاطع مخروطی

۱ : نادرست

۲ : درست

۳ : درست

۴ : نقطه

۵ : بیضی

۶ : خط

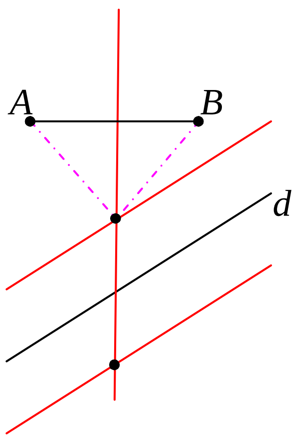
۷ : نادرست

(❋) مکان هندسی

۱ : نادرست

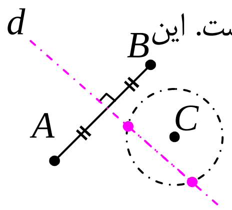
۲ : ویژگی مشترک

۳ : بیضی



۴ : مکان هندسی نقاط که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف AB و مکان هندسی نقاطی که از d به فاصله ۳ سانتی متر باشد، دو خط موازی d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر در دو طرف آن هستند. بنابراین نقطه‌ی برخورد خط l (عمود منصف AB) و دو خط موازی d' و d'' خطوط موازی d جواب مسئله است.

بحث : اگر l یکی از دو خط d' و d'' را قطع کند دیگری را هم قطع می کند و مسئله د جواب دارد. اگر l با دو خط d' و d'' موازی باشد، مسئله جواب ندارد. اگر l بر یکی از دو خط d' و d'' منطبق باشد. مسئله بیشمار جواب دارد.



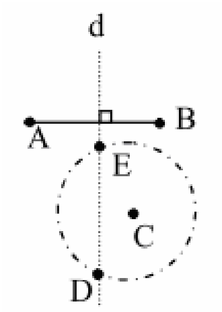
۵ : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند، عمود منصف پاره خط AB است. این خط را رسم می کنیم و آن را خط d می نامیم. مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی C به فاصله‌ی۳ سانتی متر باشند، یک دایره به مرکز C و شعاع۳ سانتی متر است. این دایره را رسم می کنیم. محل برخورد دایره و خط d جواب مسأله است.

بحث :

اگر خط d دایره را قطع کند، مسأله دو جواب دارد.

اگر خط d بر دایره مماس باشد، مسأله یک جواب دارد.

اگر خط d دایره را قطع نکند، مسأله جواب ندارد.

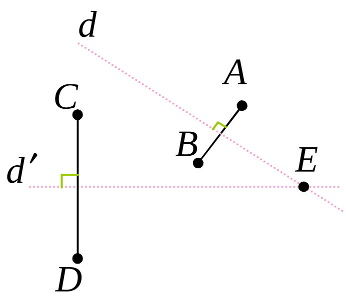


۶ : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط AB و مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی C به فاصله‌ی۳ واحد است، دایره ای به مرکز C و شعاع ۳ است. بنابراین نقطه‌ی برخورد خط عمود منصف d و دایره جواب مسئله است که در شکل مقابل نقاط D و E می باشند. حال اگر خط عمود منصف d و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند، مسئله دو جواب دارد و اگر مماس شوند، مسئله یک جواب و در صورتی که یکدیگر را قطع نکنند، مسئله جواب ندارد.

۷ : درست

۸ : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط AB است. این خط را d می نامیم و مکان هندسی نقاطی که اط دو نقطه‌ی C و D به یک فاصله باشد. عمود منصف پاره خط CDدر

است. این خط را d' می نامیم. بنابراین نقطه‌ی برخورد خطوط d و d' جواب مسئله است. (نقطه‌ی E)



بحث :

اگر خطوط d و d' متقاطع باشند مسئله یک جواب دارد.

اگر خطوط d و d' منطبق باشند مسئله بیشمار جواب دارد.

اگر خطوط d و d' موازی باشند مسئله جواب ندارد.

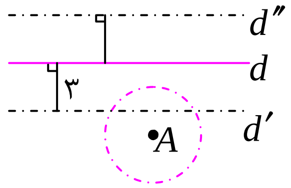
۹ : درست

۱۰ : الف : درست   ب : درست

۱۱ : درست

۱۲ : مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله‌ی سانتی متر باشند، یک دایره به مرکز A و شعاع ۲ سانتی متر است.

این دایره را رسم می کنیم. نقاطی که از d به فاصله‌ی۳ سانتی متر باشد، دو خط d' و d'' در طرفین خط d و به موازات d است، این دو خط را رسم می کنیم، محل برخورد d' و d'' با دایره، مطابق شکل جواب مسأله است.



اگر یکی از دو خط d' یا d'' دایره را قطع کند، مسأله ۲ جواب دارد.

اگر یکی دو از دو خط d' یا d'' بر دایره مماس باشد، مسأله یک جواب دارد.

اگر هیچ یک از دو خط d' یا d'' دایره را قطع نکند، مسأله جواب ندارد.

۱۳ : نادرست

۱۴ : مشترک

❋❋❋

درس۲ : دایره

(❋) دایره

۱ : مرکز دایره $O\left|\begin{array}{l}\frac{۴+(-۲)}{۲}=۱\\ \frac{-۱+۱}{۲}=۰\end{array}\right. \rightarrow O(۱,۰)$

طول شعاع دایره $r=\frac{AB}{۲}=\frac{\sqrt{۶^۲+۲^۲}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۲}=\sqrt{۱۰}$

معادله‌ی دایره $(x-۱)^۲+(y-۰)^۲=(\sqrt{۱۰})^۲ \rightarrow (x-۱)^۲+y^۲=۱۰$

۲ :

$$a^۲+b^۲-۴c>۰ \rightarrow ۹+۲۵-۴a>۰ \rightarrow ۴a<۳۴ \rightarrow a<\frac{۱۷}{۲}$$

۳ :

$O(۰,۰)$ و $O'(۱,۰)$ و $r=۲$ و $r'=\sqrt{۵}$

طول خط المرکزین $OO'=\sqrt{(۱)^۲+(۰)^۲}=۱$

$\left.\begin{array}{l}r+r'=\sqrt{۵}+۲\\ |r-r'|=\sqrt{۵}-۲\end{array}\right\} \rightarrow |r-r'|<OO'<r+r' \rightarrow$ دو دایره متقاطع می باشند.

۴:

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ y=-۱ \end{cases} \rightarrow O(۲,-۱)$$

$$R=\frac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$ شعاع دایره

$$\rightarrow (x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$$ معادله‌ی دایره

۵:

$$x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳ \rightarrow O\begin{vmatrix} \alpha=۱ \\ \beta=۱ \end{vmatrix}$$

$$m_{OA}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲ \rightarrow m'=-\frac{۱}{۲}$$

$$\rightarrow y-۳=-\frac{۱}{۲}(x-۲)$$ معادله‌ی خط مماس

۶:

$$x^۲+y^۲=۱ \rightarrow \begin{cases} O_۱(۰,۰) \\ R_۱=۱ \end{cases}$$

$$x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰ \rightarrow \begin{cases} O_۲(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}) \rightarrow O_۲(۳,۱) \\ R_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۴-۳۶}=۱ \end{cases}$$

$$d=O_۱O_۲=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$$

و چون $d>R_۱+R_۲$ لذا دو دایره متخارج هستند.

۷:

$$r=OM=\sqrt{(۱+۲)^۲+(-۱-۳)^۲}=۵$$ اندازه‌ی شعاع دایره

$$(x+۲)^۲+(y-۳)=۲۵$$ معادله‌ی دایره

۸ : چون $x^{۲}+y^{۲}=۲$ معادله ی دایره است. پس $O(۰,۰)$ مرکز دایره و $r=\sqrt{۲}$ اندازه‌ی شعاع آن است.

$$\xrightarrow{x+y-۲=۰} d=\frac{|۱(۰)+۱(۰)-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\sqrt{۲}\rightarrow r=d$$

خط بر دایره مماس است.

۹ : نادرست

۱۰ :

$$(x+۱)^{۲}+(y-۲)^{۲}=۹\rightarrow O'(-۱,۲)\quad , \ r'=۳$$

$$d=OO'=\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}=۵\xrightarrow{d=r+r'} r+r'=۵\xrightarrow{r'=۳} r=۲$$

$(x-۲)^{۲}+(y+۲)^{۲}=۴$ معادله‌ی دایره‌ی مطلوب

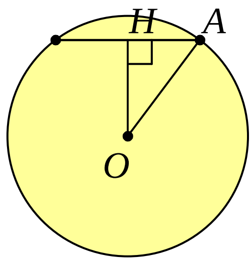
۱۱ :

$$(x-۲)^{۲}+(y+۲)^{۲}=۱\rightarrow O(۲,۲)\quad , \quad r=۱$$

$d=\frac{|۳(۲)+۲|}{\sqrt{(۳)^{۲}+(۱)^{۲}}}=\frac{۸}{\sqrt{۱۰}}\rightarrow d>r$ خط و دایره نقطه‌ی برخورد ندارند.

۱۲ :

$$OH=\frac{|۲(-۱)+۱(-۱)-۲|}{\sqrt{(۲)^{۲}+(۱)^{۲}}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$



$$\Delta(AOH):\xrightarrow{\angle H=۹۰^{\circ}} OH^{۲}+AH^{۲}=OA^{۲}\rightarrow(\sqrt{۵})^{۲}+(۲)^{۲}=R^{۲}\rightarrow R=۳$$

$$\rightarrow(x+۱)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۹$$

۱۳ : ابتدا مرکز و شعاع دایره را به دست می آوریم.

$$x^{۲}+y^{۲}-۲x+۲y=۰\rightarrow\begin{cases}O(۱,-۱)\\ R=\sqrt{۲}\end{cases}$$

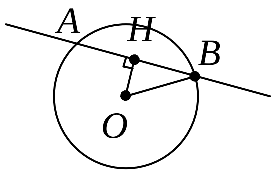
$$OA=۱\rightarrow OA<R$$

لذا نقطه‌ی داده شده ، داخل دایره است.

۱۴ : برای نوشتم معادله ی دایره ، به مختصات مرکز دایره و اندازه ی شعاع دایره نیاز است.

در اینجا مختصات مرکز دایره را داریم. اما برای تعیین اندازه‌ی شعاع دایره کافی است از مثلث قائم الزاویه‌ی OBH کمک بگیریم. طبق قضایای هندسه می دانیم که اگر از مرکز دایره بر وتر عمودی رسم کنیم، آن وتر نصف می شود.

پس :



$$BH=\frac{AB}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

برای محاسبه‌ی اندازه‌ی OH کافی است، فاصله‌ی مرکز دایره را تا خط $x+y=۲$ به دست آوریم.

$$OH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۱(۱)+۱(۱)-۲|}{\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲}}=\frac{|۱(۰)+۱(۱)-۲|}{\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

لذا :

$$\Delta(OBH):OB^۲=OH^۲+BH^۲\xrightarrow{OB=R}R^۲=(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲+(\sqrt{۲})^۲=\frac{۵}{۲}$$

در نهایت معادله‌ی دایره را به شکل زیر می نویسیم.

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲\rightarrow(x-۰)^۲+(y-۱)^۲=\frac{۵}{۲}$$

۱۵ :

$$x^۲+y^۲-۲x-۴=۰$$

$$\xrightarrow{a=-۲,b=۰,c=-۴}\begin{cases}O_۱(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})\rightarrow O_۱(-۱,۰)\\ R_۱=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۰+۱۶}=\sqrt{۵}\end{cases}$$

$$x^۲+y^۲=۴\rightarrow\begin{cases}O_۲(۰,۰)\\ R_۲=۲\end{cases}$$

$d=O_۱O_۲=\sqrt{(-۱-۰)^۲+(۰-۰)^۲}=۱$ طول خط المرکزین

$$R_۱+R_۲=\sqrt{۵}+۲$$

$R_1 - R_2 = \sqrt{5} - 2$

$\sqrt{5} - 2 < 1 < \sqrt{5} + 2 \rightarrow R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$

پس یعنی دو دایره متقاطع هستند.

۱۶ : نادرست

۱۷ :

شعاع دایره $R = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|4(3) + 3(1) + 5|}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = \dfrac{20}{5} = 4$

معادله‌ی دایره $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 16$

۱۸ :

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y = -3$

$\rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = -3 + 1 + 4 \rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$

مختصات مرکز دایره $O(1,-2)$ اندازه‌ی شعاع دایره $R = \sqrt{2}$

اکنون فاصله‌ی مرکز دایره تا خط داده شده را تعیین نموده و اندازه‌ی شعاع دایره مقایسه می کنیم.

$$D = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(1)(1) + (-1)(-2) + (-1)|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1+2-1}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

و چون $D = R$ پس خط داده شده بر دایره مماس است.

۱۹ :

$x^2 - 8x + y^2 + 4y = -16 \rightarrow (x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 4y + 4) = -16 + 16 + 4$

$\rightarrow (x-4)^2 + (y+2)^2 = 4$ معادله‌ی دایره

$O'(4,2)$ مختصات مرکز دایره $R' = \sqrt{4} = 2$ اندازه‌ی شعاع دایره

$OO' = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ طول خط المرکزین

$$|R-R'|=OO' \to |R-۲|=۵ \to \begin{cases} R=۷ \\ R=-۳ \end{cases}$$

$R=-۳$ غیر قابل قبول است. لذا معادله‌ی دایره‌ی مماس می شود.

معادله‌ی دایره‌ی مطلوب $(x-۰)^۲+(y-۱)^۲=۴۹$

۲۰ : نادرست

۲۱ :

شعاع دایره $\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \xrightarrow{x=۲\ ,\quad y=-۱} R=\dfrac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\dfrac{۱۰}{۵}=۲$

مرکز دایره $O(۲,-۱)$ و شعاع دایره برابر $R=۲$ است و لذا معادله‌ی دایره می شود،

$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$$

۲۲ :

$$(x-۱)^۲+y^۲=۱ \to \begin{cases} O_۱(۱,۰) \\ R_۱=۱ \end{cases} \quad \text{و} \quad x^۲+(y-۱)^۲=۱ \to \begin{cases} O_۲(۰,۱) \\ R_۲=۱ \end{cases}$$

فاصله‌ی دو مرکز برابر $O_۱O_۲=\sqrt{۲}$ و $R_۱+R_۲=۲$ و $R_۱-R_۲=۰$

$$|R_۱-R_۲|<O_۱O_۲<R_۱+R_۲$$

بنابراین دو دایره‌ی متقاطع اند.

۲۳ : فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر است با :

شعاع دایره $R=\dfrac{|۳(۲)+۴(۱)+۵|}{\sqrt{(۳)^۲+(۴)^۲}}=\dfrac{۱۵}{۵}=۳$

معادله‌ی دایره $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \to (x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۹$

۲۴ :

$$x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰ \to (x-۳)^۲+(y-۱)^۲=۱ \to \begin{cases} O(۳,۱) \\ R=۱ \end{cases}$$

$$x^{۲}+y^{۲}=۱\to\begin{cases}O'(۰,۰)\\R'=۱\end{cases}$$

$$d=OO'=\sqrt{(۳-۰)^{۲}+(۱-۰)^{۲}}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$$ اندازه‌ی خط المرکزین

$$R+R'=۱+۱=۲$$

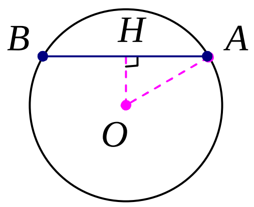
$$\to d>R+R'$$

لذا دو دایره بیرون یکدیگرند(متخارج)

۲۵ : نادرست

۲۶ : از مرکز دایره بر وتر عمود می کنیم. عمود OH وتر AB را نصف می کند.

$$OH=\frac{|(۱)(۰)+(۱)(۱)+(-۲)|}{\sqrt{(۱)^{۲}+(۱)^{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$



$$OA^{۲}=OH^{۲}+AH^{۲}\to OA^{۲}=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}+(\sqrt{۲})^{۲}\to OA^{۲}=\frac{۱۰}{۴}\to R^{۲}=\frac{۱۰}{۴}$$

$$(x-۰)^{۲}+(y-۱)^{۲}=\frac{۱۰}{۴}$$ معادله‌ی دایره

۲۷ :

$O(۱,۱)$مختصات مرکز دایره

AO شیب $m=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲$

A شیب خط مماس بر دایره گذرا از $m'=-\frac{۱}{m}=-\frac{۱}{۲}$

معادله‌ی خط مماس $y=m(x-x_A)+y_A\to y=-\frac{۱}{۲}(x-۲)+۳$

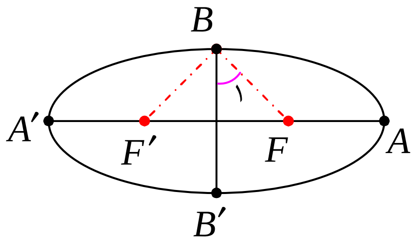
❋❋❋

درس۳ : بیضی و سهمی

(*) بیضی

۱ :

$$a=۲b\rightarrow c^{۲}=a^{۲}-b^{۲}=۴b^{۲}-b^{۲}=۳b^{۲}\rightarrow c=\sqrt{۳}b$$



$$\tan B_{۱}=\frac{OF}{OB}=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{۳}b}{b}=\sqrt{۳}\rightarrow B_{۱}=۶۰^{\circ}\rightarrow FBF'=۲\times ۶۰=۱۲۰^{\circ}$$

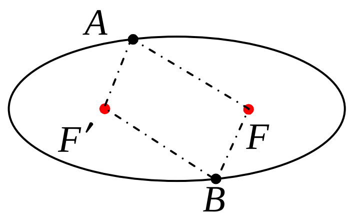
۲ : دایره

۳ :

$$\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵}\rightarrow c=\frac{۳}{۵}a\quad,\quad b=۸\xrightarrow{a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}}a^{۲}=۶۴+\frac{۹}{۲۵}a^{۲}\rightarrow a=۱۰\,,\ c=۶$$

لذا طول قطر بزرگ ۲۰ و فاصله‌ی کانونی ۱۲ می باشند.

۴ : دو نقطه‌ی A و B را به کانون های بیضی وصل می کنیم.



نقطه‌ی A روی بیضی قرار دارد. بنابر تعریف بیضی

$$AF+AF'=۲a\qquad (۱)$$

نقطه‌ی B روی بیضی قرار دارد. بنابر تعریف بیضی

$$BF+BF'=۲a\qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) و فرض $(AF'=BF)$ نتیجه می شود: $AF=BF'$

بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ متوازی الاضلاع است و چون در هر متوازی الاضلاع، ضلع های روبرو موازی اند،

پس : $AF\parallel BF'$

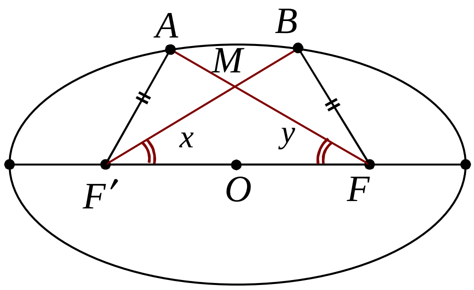
۵ :

$$AA'=\sqrt{(۲-۲)^{۲}+(۱۲+۸)^{۲}}=۲۰\xrightarrow{AA'=۲a}۲a=۲۰\rightarrow a=۱۰$$

$$e=\frac{c}{a}\xrightarrow{e=\frac{۳}{۵}}\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵}\xrightarrow{a=۱۰}\frac{c}{۱۰}=\frac{۳}{۵}\rightarrow c=۶$$

$FF'=۲c\xrightarrow{c=۶}FF'=۱۲$ فاصله‌ی کانونی

۶:



$$\left.\begin{aligned}AF+AF'&=۲a\\BF+BF'&=۲a\\BF&=AF'\end{aligned}\right\}\rightarrow AF=BF'$$

$$\left.\begin{aligned}AF&=BF'\\AF'&=BF\\FF'&=FF'\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\qquad\qquad}\underset{\text{(ض ض ض)}}{\Delta(AFF')\cong\Delta(BFF')}\rightarrow\angle x=\angle y$$

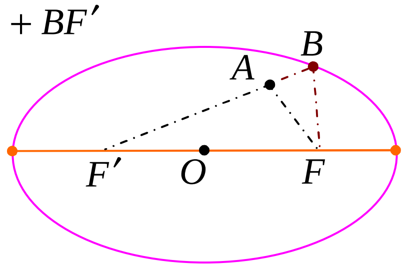
پس مثلث FMF' دو زاویه‌ی مساوی دارد، لذا متساوی الساقین است.

۷: چون نقطه‌ی A درون بیضی باشد. در این صورت امتداد AF (یا AF') بیضی را در نقطه ای مانند B قطع می کند. اکنون با توجه با نامساوی مثلث در مثلث ABF می توان نوشت:

$$AF<AB+BF\xrightarrow{+AF'}AF+AF'<AF'+AB+BF$$

$$\rightarrow AF+AF'<\underbrace{AF'+AB}_{BF'}+BF\rightarrow AF+AF'<BF+BF'$$

$$\xrightarrow{BF+BF'=۲a}AF+AF'<۲a$$



۸:

$$\begin{cases}۲a=۱۰\rightarrow a=۵\\۲b=۶\rightarrow b=۳\end{cases}\xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲}c=۴$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$$

۹ : درست

۱۰ :

$c^{۲}=a^{۲}-b^{۲}=۲۵-۹=۱۶\rightarrow c=۴$

$FF'=۲c=۲(۴)=۸$

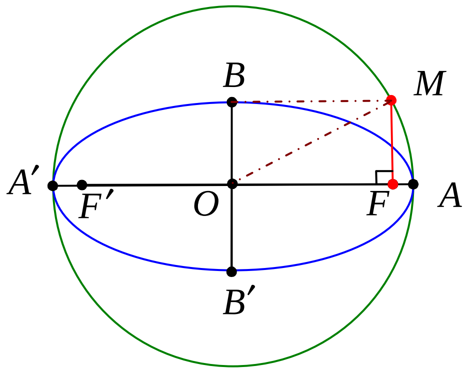
$MF+MF'=۲a=۱۰\rightarrow MF'=۱۰-MF$

$(MF)^{۲}+(MF')^{۲}=(FF')^{۲}\rightarrow (MF)^{۲}+(۱۰-MF)^{۲}=(۸)^{۲}\rightarrow MF=۵\pm\sqrt{۷}$

۱۱ : بیرون

۱۲ : نادرست

۱۳ : طبق مسئله $OM=OA=a$ می باشد. لذا در مثلث قائم الزاویه‌ی OMA می توان نوشت:



$OM=OA=a$

$OF=c$

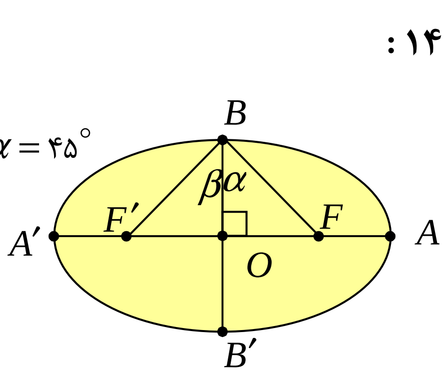
$OM^{۲}=OF^{۲}+MF^{۲}$

$\rightarrow a^{۲}=c^{۲}+MF^{۲}\rightarrow MF^{۲}=a^{۲}-c^{۲}\xrightarrow{a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}}MF^{۲}=b^{۲}\rightarrow MF=b$

۱۴ :

$۲a=\sqrt{۲}\rightarrow a=b\sqrt{۲}\rightarrow \cos\alpha=\frac{OB}{BF}=\frac{b}{b\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\rightarrow \alpha=۴۵^{\circ}$

$\angle FBF'=۲\times۴۵=۹۰^{\circ}$



۱۵ :

$BB'=۲b=۲۴\rightarrow b=۱۲$

$OF=c=۵$

$a^۲=b^۲+c^۲ \to a^۲=۱۴۴+۲۵ \to a^۲=۱۶۹ \to a=۱۳$

$e=\frac{c}{a}=\frac{۵}{۱۳}$

۱۶ : صفر

۱۷ :

قطر بزرگ $AA'=۲a=۲۰ \to a=۱۰$

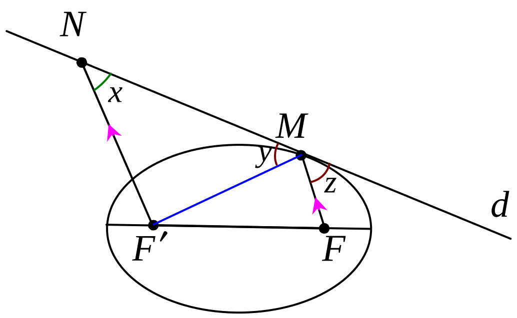
خروج از مرکز بیضی $e=\frac{c}{a} \to \frac{۴}{۵}=\frac{c}{۱۰} \to c=۸$

فاصله‌ی کانونی $FF'=۲c=۲\times۸=۱۶$

رابطه ی طلایی بیضی $a^۲=b^۲+c^۲ \to ۱۰۰=b^۲+۶۴ \to b^۲=۳۶ \to b=۶$

طول قطر بزرگ بیضی $BB'=۲b=۲\times۶=۱۲$

۱۸ : طبق ویژگی خط مماس بر بیضی



داریم، $\angle y=\angle z$ و چون $NF' \parallel MF$

پس $\angle x=\angle z$. لذا $\angle x=\angle y$

یعنی مثلث $NF'M$ دو زاویه‌ی مساوی دارد،

در نتیجه متساوی الساقین بوده و $NF'=MF'$

۱۹ : $\frac{۱}{۲}$

۲۰ :

$$\left.\begin{array}{l} OF=c=۴ \\ OA=a=۸ \end{array}\right\} \xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} ۶۴=b^۲+۱۶ \to b^۲=۴۸ \to b=۴\sqrt{۳}$$

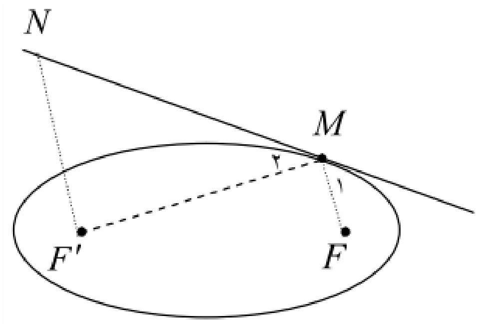
$BB' = ۲b = ۸\sqrt{۳}$ طول قطر کوچک

۲۱ : مجموع $MF + MF'$ کمترین مقدار است. بنابه خاصیت کوتاه ترین مسیر، زاویه های $\angle M_۱ = \angle M_۲$.

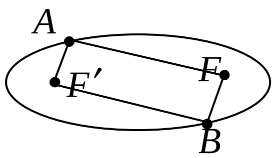
از طرفی چون $MF \parallel NF'$ و d مورب است، پس $\angle N = \angle M_۱$

اکنون از این دو نتیجه می توان نوشت : $\angle N = \angle M_۲$

یعنی مثلث MNF' متساوی الساقین است و لذا : $MF' = NF'$



۲۲ : نقاط A و B را به کانون های بیضی وصل می کنیم.



نقطه‌ی A روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی $AF + AF' = ۲a$

نقطه‌ی B روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی $BF + BF' = ۲a$

از (۱) و (۲) و فرض $(AF' = BF)$ نتیجه‌ی می شود $AF = BF'$

بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ یک متوازی الاضلاع است، پس $AF \parallel BF'$

۲۳ : دایره

۲۴ : نقطه‌ی B روی عمود منصف پاره خط FF' قرار دارد. در نتیجه : $BF = BF'$

فاصله‌ی هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

$$BF + BF' = ۲a \xrightarrow{BF = BF'} BF = BF' = a$$

بنابر رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث BOF داریم : $OF^۲ + OB^۲ = BF^۲$ یعنی $b^۲ + c^۲ = a^۲$

۲۵ :

$$\begin{cases}2a=10\\2b=6\end{cases}\rightarrow a=5\,,\ \ b=3\xrightarrow{a^2=b^2+c^2}c=4$$

در مثلث MFF' میانه‌ی وارد بر یک ضلع $MO=\frac{1}{2}FF'=4$ نصف ضلع روبرو است. در نتیجه مثلث MFF' قائم الزاویه است.

$$MF+MF'=2a=10\rightarrow MF'=10-MF$$

$$MF^2+MF'^2=FF'^2\rightarrow MF^2+(10-MF)^2=8^2\rightarrow MF=5-\sqrt{7}$$

۲۶ : نقطه‌ی A و A' روی بیضی قرار دارند، بنابه تعریف داریم $A'F'+A'F=2a$ و $AF'+AF=2a$

نتیجه می گیریم که :

$$A'F'+A'F=AF+AF'\rightarrow A'F'+(A'F'+FF')=AF+(AF+FF')$$

$$\rightarrow A'F'=AF$$

۲۷ :

$$\cos(\angle OBF)=\frac{OB}{BF}\xrightarrow{BF=a\ ,\ OB=b}\cos(\angle OBF)=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow\angle OBF=30^\circ\rightarrow\angle F'BF=2(\angle OBF)=60^\circ$$

۲۸ : پاره خط

(❋) سهمی

۱ : با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات معلوم می شود که سهمی قائم رو به پایین می باشد و لذا :

پارامتر سهمی $p=4$

معادله‌ی سهمی $(x-1)^2=-16(y-2)$

معادله‌ی خط هادی $y=6$

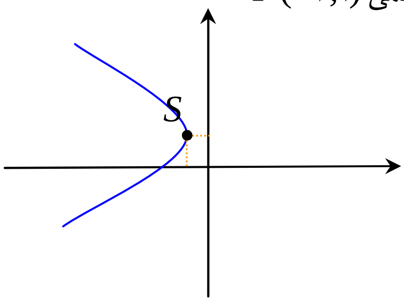
۲ : الف :

$$y^{۲} - ۲y + ۸x + ۹ = ۰ \rightarrow y^{۲} - ۲y + ۱ = -۸x - ۸ \rightarrow (y-۱)^{۲} = -۸(x+۱)$$

$\rightarrow S(-۱,۱)$ رأس سهمی

دهانه‌ی سهمی به سمت چپ و $p = ۲$ ، معادله‌ی خط هادی $x = ۱$ ، کانون سهمی $F(-۳,۱)$

ب : نقاط کمکی $B'(-۳,-۳)$ و $B(-۳,۵)$

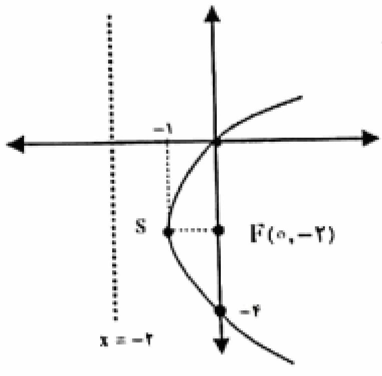


۳ :

$y^{۲} = ۴x - ۴y \rightarrow y^{۲} + ۴y = ۴x + ۴ \rightarrow (y+۲)^{۲} = ۴(x+۱)$ سهمی افقی مثبت

$x = -۲$ خط هادی $\qquad$ $F(۰,-۲)$ کانون سهمی $\qquad$ $S(-۱,-۲)$ رأس سهمی

نقاط کمکی برای ترسیم $(۰,۰)$ و $(۰,۴)$



۴ : سهمی

۵ : الف : با توجه به جایگاه رأس و خط هادی ، دهانه‌ی سهمی رو به پایین است و $a = ۴$

پس معادله‌ی سهمی به صورت $(x-۲)^{۲} = -۱۶(y-۳)$

$$-۴p = -۱۶ \rightarrow p = ۴$$

ب : مختصات کانون سهمی برابر $F(\alpha, \beta - p) \rightarrow F(۲,۳-۴) \rightarrow F(۲,-۱)$

۶ :

سهمی افقی مثبت $y^{۲}=۴(x-۱)$

پارامتر سهمی $۴p=۴\to p=۱$ ، و رأس سهمی $\to S(۱,۰)$

کانون سهمی $\to F(۲,۰)$

معادله‌ی دایره‌ی مورد اشاره $(x-۲)^{۲}+y^{۲}=۹$

$$\begin{cases} y^{۲}=۴x-۴ \\ y^{۲}=-x^{۲}+۴x+۵ \end{cases} \to -x^{۲}+۴x+۵=۴x-۴ \to x=\pm ۳$$

که پاسخ $x=-۳$ غیر ممکن است.

نقاط برخورد سهمی و دایره $\to \begin{cases} M(۳,۲\sqrt{۲}) \\ M'(۳,-۲\sqrt{۲}) \end{cases}$

۷ : کانون سهمی

۸ :

$$x^{۲}-۴y+۸x=۰\to x^{۲}+۸x+۱۶=۴y+۱۶\to (x+۴)^{۲}=۴(x+۴)$$

سهمی قائم و رو بالا است.

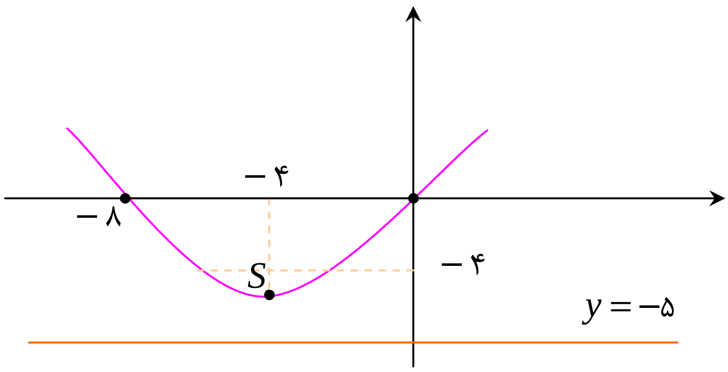
رأس سهمی $S(-۴,-۴)$

پارامتر سهمی $۴p=۴\to p=۱$

کانون سهمی $F(\alpha,\beta+p)\to F(-۴,-۴+۱)\to F(-۴,-۳)$

معادله‌ی خط هادی سهمی $y=\beta-p\to y=-۴-۱=-۵$

نقاط کمکی $y=-۳\to \begin{cases} B(-۲,-۳) \\ B'(-۶,-۳) \end{cases}$



۹ :

$y^{۲}=۴(x-۱)\to S(۱,۰)\ \ ,\ \ F(۲,۰)$

معادله‌ی دایره $(x-۲)^{۲}+y^{۲}=۹$

$$\begin{cases} y^{۲}=۴x-۴ \\ (x-۲)^{۲}+y^{۲}=۹ \end{cases}\to (x-۲)^{۲}+۴x-۴=۹=x^{۲}-۴x+۴+۴x-۴=۹$$

$$\to x^{۲}=۹\to x=\pm ۳$$

$$\to \begin{cases} M(۳,۲\sqrt{۲}) \\ M'(۳,-۲\sqrt{۲}) \end{cases}$$

۱۰:

$$x^{۲}+۴x=۲y\xrightarrow{+۴}x^{۲}+۴x+۴=۲y+۴\to (x+۲)^{۲}=۲(y+۲)$$

با مشاهده‌ی این معادله ، معلوم می شود که سهمی، قائم رو به بالا است و پارامتر سهمی $p=\frac{۱}{۲}$ می باشد.

$$۴p=۲\to p=\frac{۱}{۲}$$

مختصات رأس سهمی هم به صورت $(-۲,-۲)$ است.

مختصات کانون سهمی را هم می توان به صورت زیر تعیین نمود.

کانون سهمی $F(\alpha,\beta+p)\to F(-۲,-۲+\frac{۱}{۲})\to F(-۲,-\frac{۳}{۲})$

برای تعیین مختصات نقاط برخورد سهمی با محور های مختصات یک بار x و یک بار y را برابر صفر قرار می دهیم.
لذا

محل برخورد با محور x ها $y=۰\xrightarrow{x^{۲}=۲y-۴x}x^{۲}=۲(۰)-۴x\to x=۰\ ,\ \ x=-۴$

$$\to A(۰,۰)\qquad ,\qquad B(۰,-۴)$$

محل برخورد با محور y ها $x=۰\xrightarrow{x^{۲}=۲y-۴x}(۰)^{۲}=۲y-۴(۰)\to y=۰\to C(۰,۰)$

۱۱: نقطه

۱۲ :

$$y^{۲}-۶y+۱۶x+۲۵=۰\rightarrow y^{۲}-۶y+۹=-۱۶x-۱۶\rightarrow (y-۳)^{۲}=-۱۶(x+۱)$$

لذا فرم استاندارد سهمی به صورت $(y-۳)^{۲}=-۱۶(x+۱)$ است. سهمی افقی و دهانه‌ی سهمی به سمت چپ باز می شود. رأس سهمی نقطه‌ی $S(-۱,۳)$ است و $p=۴$ مختصات کانون آن نقطه‌ی

$F(\alpha-p,\beta)=(-۵,۳)$ است. معادله‌ی خط هادی سهمی به صورت $x=p+\alpha=۳$ است.

۱۳ : با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، سهمی قائم و دهانه‌ی سهمی رو به بالا است و $p=۳$ فرم استاندارد سهمی به صورت:

$$(x-h)^{۲}=۴p(y-k)\rightarrow (x-۴)^{۲}=۱۲(y-۶)$$

۱۴ : $(\frac{۱}{۲}\,,۱)$

۱۵ : با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات خواهیم داشت:

سهمی رو به پایین و $a=۴$

معادله‌ی سهمی $(x-۱)^{۲}=-۱۶(y-۲)$

معادله‌ی خط هادی $y=۶$

۱۶ : درست

۱۷ : الف : با استفاده از جایگاه رأس و خط هادی سهمی قائم در دستگاه مختصات خواهیم داشت: $p=۴$

دهانه‌ی سهمی رو به پایین است و لذا معادله‌ی سهمی می شود $(x-۲)^{۲}=-۴(۴)(y-۳)$

ب : مختصات کانون سهمی می شود $F(۲,-۱)$

۱۸ : اگر قطر دهانه دیش را با $۲b$ و گودی آن را با h نمایش دهیم. فاصله‌ی کانونی برابر $p=\frac{b^{۲}}{۴h}$ است. اکنون با توجه به این مسأله داریم :

$$\begin{cases} ۲b=۶۰\rightarrow b=۳۰ \\ h=۹ \end{cases}\rightarrow p=\frac{۴b^{۲}}{۱۶h}=\frac{b^{۲}}{۴h}=\frac{۹۰۰}{۴(۹)}=۲۵$$

۱۹:

$y^{۲}-۲y+۱=-۸x-۹+۱\rightarrow (y-۱)^{۲}=-۸(x+۱)$

$-۴p=-۸\rightarrow p=۲$ سهمی افقی رو به سمت چپ

مختصات رأس $\rightarrow S(-۱,۱)$

مختصات کانون $F(-۳,۱)$

معادله‌ی خط هادی $x=۱$

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath