وارون ماتریس

برای هر ماتریس **مربعی** مانند $A_{n\times n}$ وارون ماتریس (**در صورت وجود**) ماتریسی مانند B است طوری که $AB = BA = I_n$

در این صورت B را وارون $A_{n\times n}$ می نامیم و با A^{-1} نمایش می دهیم.

$B = A^{-1}$

$A \cdot A^{-1} = I_n \ , \ A^{-1} A = I_n$

نکته : 1- ماتریس های غیر مربعی وارون ندارند.

$A_{۳\times ۴} \ B_{۴\times ۳} = I_۳$

$I_۳ \neq I_۴$

$B_{۴\times ۳} \ A_{۳\times ۴} = I_۴$

2 - هر ماتریس مربعی وارون پذیر ممکن است نباشد.

3 - ماتریس $\overline{O}_{n\times n}$ وارون ندارد

زیرا $A \times \bar{o} = \bar{o} \ , \ \bar{o} \times A = \bar{o}$

4 - وارون ماتریس I_n ، خود ماتریس می شود.

میدانیم $(I A = A I = A)$

$A I = I A = I \longrightarrow A = I$

تعریف وارون

5 - اگر A^{-1} وارون $A_{n\times n}$ باشد، $A_{n\times n}$ نیز وارون A^{-1} است.

$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

وارون ، وارون یک ماتریس خود آن ماتریس است.

6 – وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر بفرد است.

فرض
$$\begin{cases} \overset{\text{وارون } A}{AB} = BA = I_n \\ \underset{\text{وارون } A}{CA} = AC = I_n \end{cases} \to \underset{\text{حکم}}{B = C}$$

اثبات: $B = BI = B(AC) = \underbrace{(BA)}_{I} C \overset{\text{ف}}{=} I C = C$

آیا دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ وارون یکدیگرند؟

$AB =$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \neq I$$ وارون هم نیستند

* وارون ماتریس دلخواه $A_{2\times2}$ بصورت زیر به دست می آید:

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}_{2\times2}\longrightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}_{2\times2}$$

$|A|=ad-bc$ دترمینان

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

$|A|\neq 0$ ماتریس A وارون پذیر است

$|A|=0$ وارون ندارند

شرط لازم وکافی برای آن که یک ماتریس مربعی وارون پذیر باشد، آن است دترمینان ماتریس مورد نظر مخالف صفر باشد.

مثال

وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}10&2\\4&1\end{bmatrix}_{2\times2}$ را بیابید.

$(10\times1)-(2\times4)=2$

$$A=\begin{bmatrix}10&2\\4&1\end{bmatrix}_{2\times2}\longrightarrow A^{-1}=\frac{1}{10-8}\begin{bmatrix}1&-2\\-4&10\end{bmatrix}_{2\times2}=\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}1&-2\\-4&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-1\\-2&5\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}4&1\\8&2\end{bmatrix}\longrightarrow |B|=(4\times2)-(1\times8)=0 \qquad B^{-1}=\frac{1}{\underset{0}{\cancel{|B|}}}\begin{bmatrix}2&-1\\-8&4\end{bmatrix}$$

B وارون پذیر نیست

$$C=\begin{bmatrix}2&1\\5&10\end{bmatrix}\longrightarrow |C|=(2\times10)-(1\times5)=15\longrightarrow C^{-1}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}10&-1\\-5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{10}{15}&\frac{-1}{15}\\\frac{-5}{15}&\frac{2}{15}\end{bmatrix}$$

نکته

1 - اگر A,B دو ماتریس مربعی هم مرتبه و وارون پذیر باشند:

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

میدانیم $(AB)(AB)^{-1}=I$

$$AB(B^{-1}A^{-1}) \overset{?}{=} I$$

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A\underbrace{(BB^{-1})}_{I}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \rightarrow (AB)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$$

2 – دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس برابر حاصل ضرب دترمینانهای آنهاست.

$$|AB|=|A|\cdot|B|$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}8 & 9\\ -4 & 13\end{bmatrix} \qquad |AB| = (8\times 13)-(9\times -4)=140$$

$$|A|=-1-6=-7 \qquad |B|=0-20=-20 \rightarrow |A|\cdot|B|=140$$

3 - اگر $A_{n\times n}$ باشد داریم:

$$|A|=\frac{1}{|A^{-1}|}$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 3 & 5\end{bmatrix} \qquad |A^{-1}|=? \qquad |A|=10-(-12)=22$$

$$\rightarrow |A^{-1}|=\frac{1}{22}$$

اثبات: $AA^{-1}=I \rightarrow |AA^{-1}|=|I| \rightarrow |A|\cdot|A^{-1}|=1 \rightarrow |A|=\frac{1}{|A^{-1}|}$

4 – اگر ضرب دو ماتریس غیر صفر برابر با صفر باشد ، دترمینان هر دو ماتریس برابر صفر می شود.

مثال:

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -3\end{bmatrix}=A \qquad A\neq \bar{0} \qquad B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 3 & 4\end{bmatrix} \qquad B\neq \bar{0}$$

$$A.B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$|A|=(-1\times -3)-(1\times 3)=0$$

$$|B|=(3\times 4)-(3\times 4)=0$$

5 – اگر ماتریس خود توانی وارون پذیر باشد،آن ماتریس واحد است.

$A^n = A \xrightarrow{\text{وارون‌پذیر } A} A = I$

مثال

1.اگر $A=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}_{2\times2}, B=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}_{2\times2}$ باشد ،از رابطه $\underbrace{AX=B}$ ماتریس X را بیابید.

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \xrightarrow{\text{ش.ض}} \underbrace{(A^{-1}A)}_{I}X = A^{-1}B \to IX = A^{-1}B \to X = A^{-1}B$

$A^{-1} = \frac{۱}{(-۴)-(-۳)}\begin{bmatrix}-۲&-۳\\۱&۲\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۲&۳\\-۱&-۲\end{bmatrix}$

$A^{-1}B = X \to \begin{bmatrix}۲&۳\\-۱&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&۳\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۲&۱۳\\-۱&-۸\end{bmatrix}$

2.اگر $B=\begin{bmatrix}4&3\\7&1\end{bmatrix}_{2\times2}, A=\begin{bmatrix}3&5\\1&2\end{bmatrix}_{2\times2}$ باشد ،از رابطه $AX=B$ ماتریس X را بیابید.

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \to \underbrace{(A^{-1}A)}_{I}X = A^{-1}B \to X = A^{-1}B$

$|A| = (۶)-(۵) = ۱ \to A^{-1} = \begin{bmatrix}۲&-۵\\-۱&۳\end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix}۲&-۵\\-۱&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴&۳\\۷&۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۲۷&۱\\+۱۷&۰\end{bmatrix}$

3.اگر $\underbrace{\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}_{2\times2}}_{A} X \underbrace{\begin{bmatrix}5&2\\3&1\end{bmatrix}_{2\times2}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix}3&0\\-1&2\end{bmatrix}_{2\times2}}_{C}$ باشد ،سطر اول ماتریس X را بیابید.

$AXB = C$

$\underbrace{A^{-1}A}_{I}XB = A^{-1}C \to X\underbrace{BB^{-1}}_{I} = A^{-1}CB^{-1} \to X = A^{-1}CB^{-1}$

$A^{-1} = \frac{۱}{۴-۶}\begin{bmatrix}۱&-۳\\-۲&۴\end{bmatrix} = -\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۱&-۳\\-۲&۴\end{bmatrix}$

$B^{-1} = \frac{۱}{۵-۶}\begin{bmatrix}۱&-۲\\-۳&۵\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۱&۲\\۳&-۵\end{bmatrix}$

$X = -\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۱&-۳\\-۲&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&۰\\-۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۲\\۳&-۵\end{bmatrix} \to X = -\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۶&-۶\\-۱۰&۸\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۲\\۳&-۵\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۳&۳\\۵&-۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۲\\۳&-۵\end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix}۱۲&-۲۱\end{bmatrix}$

4.اگر $\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}_{2\times 2}}_{A} X \underbrace{\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}_{2\times 2}}_{C}$ باشد ، ماتریس X را بیابید.

$$AXB = C \longrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{۱}{۱۰-۱۲}\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ -۴ & ۲\end{bmatrix} = -\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ -۴ & ۲\end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{۱}{۶-۴}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$$

$$X = -\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ -۴ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & ۰\\ ۰ & ۸\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۵ & -۳\\ -۴ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}-۵ & ۶\\ ۴ & -۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۹ & ۷\\ -۴ & -۴\end{bmatrix}$$

5.اگر $A = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2}, B = \begin{bmatrix}7 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2}$ باشند ، حاصل $|AB| + 2|A+B|$ را بیابید.

$$|AB| = |A|\cdot|B| = (-۳-۲)\times(\underbrace{۲۱-۲}) = -۵\times ۱۹ = -۹۵$$

$$۲\begin{vmatrix}۶ & ۳\\ ۳ & ۶\end{vmatrix} = ۲(۳۶-۹) = ۲\times ۲۷ = ۵۴$$

$$|AB| + ۲|A+B| = -۹۵ + ۵۴ = -۴۱$$

5.اگر $A = \begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}_{2\times 2}$ باشند ، وارون آن را بیابید.

$$A^{-1} = \frac{۱}{ab-۰}\begin{bmatrix}b & ۰\\ ۰ & a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{b}{ab} & ۰\\ ۰ & \frac{a}{ab}\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{۱}{a} & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{b}\end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix}\frac{۲}{۳} & ۰\\ ۰ & ۵\end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{۳}{۲} & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{۵}\end{bmatrix}$$

نکته

میدانیم که اگر $AB = AC$ نمی توان نتیجه گرفت $B = C$ ولی اگر ماتریس A وارون پذیر باشد، این رابطه برقرار است.

در حالت کلی

$$AB = AC \longrightarrow B = C \quad \times$$

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \longrightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{I}B = \underbrace{(A^{-1}A)}_{I}C \Rightarrow B = C$$

حل دستگاه های معادلات خطی:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases}$$

$x = 1$ $\qquad$ $\boxed{y = 2}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}}_{\text{ماتریس ضرایب}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1}}_{\text{مجهولات}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}}_{\text{جواب}}$$

$$AX = B \longrightarrow X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\cancel{8-7}} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1

$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = A \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3-(-10)} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

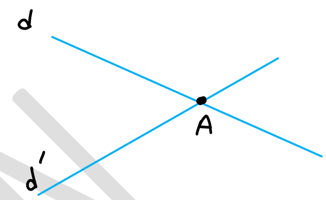
$$A^{-1}B = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 1 \rightarrow 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -1+40 \\ 2+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{39}{13} \\ \frac{26}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

یادآوری:

$$\begin{cases} d: & ax+by=c \\ d': & a'x+b'y=c' \end{cases} \qquad X = A^{-1}B$$

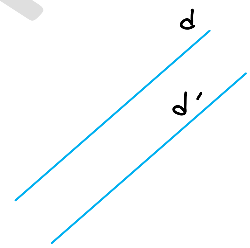
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ab' - a'b \neq 0 \rightarrow ab' \neq a'b \rightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ یک جواب دارد.

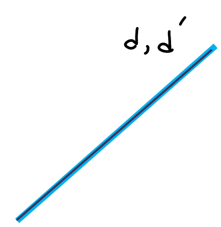


$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ab' - ba' = 0 \rightarrow ab' = ba' \rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ جواب ندارد



$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ بی‌شمار جواب.



۱- اگر دستگاه مقابل بیش از یک جواب داشته باشد، حاصل m و n را بیابید.

$$\begin{cases} (m-1)x + 3y = n \\ 5x + y = 7 \end{cases} \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

یعنی دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد.

$$\frac{m-1}{5} = \frac{3}{1} = \frac{n}{7} \rightarrow m-1 = 15 \Rightarrow m = 16 \quad , \quad 3 = \frac{n}{7} \rightarrow n = 21$$

۲- در وجود وتعداد جواب‌های دستگاه مقابل برحسب m، بحث کنید:

$$\begin{cases} 4x+8y=5 \\ mx+2y=6 \end{cases}$$

$\frac{a}{a'}=\frac{4}{m}$ $\quad \frac{b}{b'}=\frac{8}{2}=4$ $\quad \frac{c}{c'}=\frac{5}{6}$ $\quad \frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \rightarrow \frac{4}{m}=4 \rightarrow m=1$ $\qquad \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ دستگاه جواب ندارد

$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'} \rightarrow \frac{4}{m}\neq 4 \rightarrow m\neq 1$ $\qquad \frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ دستگاه یک جواب دارد

۳- به ازای چه مقدار m دستگاه زیر بی‌شمار جواب دارد.

$$\begin{cases} (m-1)x+5y=7 \\ 3x+(m+1)y=m+2 \end{cases}$$

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

$$\frac{m-1}{3}=\frac{5}{m+1}=\frac{7}{m+2} \rightarrow \begin{cases} \frac{m-1}{3}=\frac{5}{m+1} \rightarrow m^2-1=15 \rightarrow m^2=16 \rightarrow m=\pm 4 \\ \frac{5}{m+1}=\frac{7}{m+2} \rightarrow 5m+1=7m+7 \rightarrow 3=2m \rightarrow m=\frac{3}{2} \end{cases}$$

چون جواب مشترک برای دو معادله پیدا نشد پس برای هیچ مقدار m دستگاه بی‌شمار جواب ندارد.

ترانهاده

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ماتریس کهاد: در یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ اگر سطر iام و ستون jام ماتریس را حذف کنیم یک ماتریس مربعی $B_{(n-1)\times(n-1)}$ خواهیم داشت که به آن ماتریس کهاد وابسته به سطر iام و ستون jام ماتریس A گفته می‌شود. M_{ij}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad M_{12} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad M_{31} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$(-1)^{i+j} \rightarrow$ نشانه علامت

$$(-1)^{1+2}|M_{12}| = -1\left(-15-(-8)\right) = -(-7) = 7$$

همسازه‌ی درایه $a_{12}=2$ است.

$$(-1)^{3+1} M_{31} = 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\left[(2\times -2)-(-1\times 0)\right] = -4$$

همسازه‌ی درایه $a_{31}=4$

- همسازه‌ی درایه: در $A_{n\times n}$ اگر دترمینان ماتریس کهاد M_{ij} را در $(-1)^{i+j}$ "نشانه علامت" ضرب کنیم عدد حقیقی بدست می‌آید که به آن همسازه‌ی درایه a_{ij} از ماتریس A می‌گویند.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}| \quad ☆$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الف) همسازه‌ی $a_{22}=4$ را پیدا کنید.

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |M_{22}| = 1-6 = -5 \xrightarrow{☆} A_{22} = (-1)^{2+2}(-5) = -5$$

ب) همسازه $a_{32}=1$ را پیدا کنید:

$$|M_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 7+6 = 13 \qquad A_{32} = (-1)^5(13) = -13$$

$\det(A_{n\times n}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$ یا $\det(A_{n\times n}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{۱۱} \quad a_{۱۲} \quad a_{۱۳}} \\ a_{۲۱} \quad a_{۲۲} \quad a_{۲۳} \\ a_{۳۱} \quad a_{۳۲} \quad a_{۳۳} \end{vmatrix} = a_{۱۱}\overbrace{(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}}^{A_{۱۱}} + a_{۱۲}\times\overbrace{(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}}^{A_{۱۲}} + a_{۱۳}\overbrace{(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}}^{A_{۱۳}}$$

$$= a_{۱۱}A_{۱۱} + a_{۱۲}A_{۱۲} + a_{۱۳}A_{۱۳}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ۱\underbrace{(-1)^{1+1}}_{۱}\begin{vmatrix} ۰ & ۴ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix} + ۲\times\underbrace{(-1)^{1+2}}_{-۱}\begin{vmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix} + ۳\underbrace{(-1)^{1+3}}_{۱}\begin{vmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= ۱(\underbrace{۰-۴}_{-۴}) - ۲(۱-۸) + ۳(-۱-۰) = -۴+۱۴-۳ = ۷$$

$$|A| = a_{۱۲}A_{۱۲} + \underset{۰}{a_{۲۲}}A_{۲۲} + a_{۳۲}A_{۳۲} = ۲(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix} + ۱(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{vmatrix} = -۲(۱-۸) - (۴+۳)$$

$$= ۱۴ - ۷ = ۷$$

دترمینان ماتریس مقابل را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۶ & ۷ \\ -۲ & ۳ & ۴ \\ ۹ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = a_{۳۱}A_{۳۱} + a_{۳۲}A_{۳۲} + a_{۳۳}A_{۳۳}$$

$$۹\underbrace{(-1)^{3+1}}_{۱}\begin{vmatrix} ۶ & ۷ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} + ۱\underbrace{(-1)^{3+2}}_{-۱}\begin{vmatrix} ۵ & ۷ \\ -۲ & ۴ \end{vmatrix} + (۲)\underbrace{(-1)^{3+3}}_{+}\begin{vmatrix} ۵ & ۶ \\ -۲ & ۳ \end{vmatrix} = ۹(۳) - (۳۴) + ۲(۲۷) = ۸۴ - ۳۴ = ۵۰$$

مقادیر x را از رابطه زیر بیابید.

$$\begin{array}{ccc} & a_{12} & a_{13} \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & 6 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A| = 0 \qquad |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$|A| = (x-3)\underbrace{(-1)^{1+2}}_{-1}\begin{vmatrix} x+3 & 6 \\ x+2 & 0 \end{vmatrix} + (x-2)\underbrace{(-1)^{1+3}}_{1}\begin{vmatrix} x+3 & 0 \\ x+2 & 6 \end{vmatrix} = (3-x)(-6x-12) + (x-2)(6x+18) =$$

$$= -\cancel{18x} - 36 + 6x^2 + \cancel{12x} + 6x^2 + \cancel{18x} - \cancel{12x} - 36 = 0 \rightarrow 12x^2 - 72 = 0 \rightarrow 12(x^2-6) = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

اگر به تمام درایه‌های ستون دوم ماتریس A یک واحد اضافه شود، به مقدار دترمینان ماتریس اولیه چه عددی اضافه می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & a & 7 \\ 3 & b & 6 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = D \quad *$$

$$3(-1)^3\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + a(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + b(-1)^5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3A_{12} + aA_{22} + bA_{32}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A_{12} = B_{12} \\ A_{22} = B_{22} \\ A_{32} = B_{32} \end{array}}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3+1 & 4 \\ 5 & a+1 & 7 \\ 3 & b+1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow |B| = b_{12}B_{12} + b_{22}B_{22} + b_{32}B_{32} \quad *$$

$$= (3+1)(-1)^3\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (a+1)(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (b+1)(-1)^5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 3A_{12} + 1A_{12} + aA_{22} + 1A_{22} + bA_{32} + 1A_{32} = D + 1A_{12} + 1A_{22} + 1A_{32}$$

$$|B| - |A| = 1\underbrace{(-1)^3}_{-1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 1\underbrace{(-1)^4}_{1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 1\underbrace{(-1)^5}_{-1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -1(9) + 0 - 1(-6) = -9 + 6 = -3$$

در دترمینان $A=\begin{vmatrix} ۳ & ۵ & ٤ \\ m & ۱ & ۷ \\ -۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix}$ اگر به m سه واحد اضافه کنیم دترمینان ماتریس جدید چه تغییری خواهد کرد؟

$|A| = mA_{۲۱} + ۱A_{۲۲} + ۷A_{۲۳}$

$B=\begin{vmatrix} ۳ & ۵ & ٤ \\ m+۳ & ۱ & ۷ \\ -۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix}$

$|B| = (m+۳)A_{۲۱} + ۱A_{۲۲} + ۷A_{۲۳} = mA_{۲۱} + \underline{۳A_{۲۱}} + ۱A_{۲۲} + ۷A_{۲۳}$

$۳A_{۲۱} = ۳(-۱)^{۳}\begin{vmatrix} ۵ & ٤ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} = -۳(۱۵-۸) = -۲۱$

اگر $|A|=\begin{vmatrix} ٤ & ۲ & ۵ \\ a & b & c \\ -۱ & ۲ & ۶ \end{vmatrix}=D$ عدد اگر به a، b، c به ترتیب ۱، ۲، ۳ واحد اضافه کنیم، دترمینان چه تغییری می‌کند.

$|B|=\begin{vmatrix} ۴ & ۲ & ۵ \\ a+۱ & b+۲ & c+۳ \\ -۱ & ۲ & ۶ \end{vmatrix}$

$|B|-|A| = ۱A_{۲۱} + ۲A_{۲۲} + ۳A_{۲۳} = ۱(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ ۲ & ۶ \end{vmatrix} + ۲\times(-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix} ۴ & ۵ \\ -۱ & ۶ \end{vmatrix} + ۳(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ٤ & ۲ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix}$

همسازه

$= -۲ + ۵۸ + (-۳) = ۲۶$

بین $|A|$ و $|B|$ چه رابطه‌ای برقرار است؟

$|A|=\begin{vmatrix} ٤ & ۲ & -۱ \\ ۵ & ۷ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ٤ \end{vmatrix}$ $|B|=\begin{vmatrix} ٤ & ۲ & -۱ \\ ۵ & ۷ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ٤ \end{vmatrix}$

$-۱ +۲$

$|B|-|A| = ۲A_{۳۲} = ۲(-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۴ & -۱ \\ ۵ & ۳ \end{vmatrix} = -۲(۱۲-(-۵)) = -۲(۱۷) = -۳٤$

ـ خصوصیات دترمینان

۱) دترمینان ماتریس های قطری برابر است با حاصل ضرب درایه‌ای روی قطر اصلی. (ماتریس پایین‌مثلثی و بالا مثلثی هم به همین دترمینان شان محاسبه می‌شود.)

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a A_{11} + 0 A_{12} + 0 A_{13} = a(-1)^2 \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = a(bc-0) = abc$$

صفحه ۱۳ سوال ۲

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = (-2 \times -3 \times -5) = -30 \qquad |A^2| = |A|^2 = (-30)^2 = 900$$

ـ مقدار x را بیابید:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \longrightarrow x(x+4)(-1) = 4 \longrightarrow -x^2 - 4x - 4 = 0 \longrightarrow -(x^2+4x+4) = 0$$

$$\longrightarrow -(x+2)^2 = 0 \longrightarrow (x+2) = 0 \longrightarrow x = -4$$

ـ اگر $|A^n| = |A|^n$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad |A^{1400}| = |A|^{1400} \longrightarrow |A| = (-2-12) = -14 \longrightarrow |A| = 14^{1400}$$

ـ اگر در سطر یا ستون ماتریسی که می‌خواهیم دترمینان را حساب کنیم تعداد درایه‌ای صفر بیشتری داشته باشیم ما بسط دترمینان حول آن سطر یا ستون راحت تر است. (اگر در ماتریس دلخواهی یک سطر یا یک ستون درایه‌اش صفر باشد $|A|=0$)

ـ به ازای چه مقدار a، معادله

$$\begin{array}{cccc} & & a_{12} & \\ & \begin{vmatrix} x & 0 & a \\ 5 & x+1 & 0 \\ 3 & 0 & x+2 \end{vmatrix} & & =0 \\ & & a_{32} & \end{array}$$

فقط یک ریشه مضاعف دارد؟

$$|A| = \underbrace{a_{12}}_{0} A_{12} + a_{22} A_{22} + \underbrace{a_{32}}_{0} A_{32} = 0$$

$$|A| = (x+1)\begin{vmatrix} x & a \\ 3 & x+2 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow (x+1)(x^2+2x-3a) = 0 \qquad \begin{cases} x+1 = 0 \rightarrow x = -1 \\ x^2+2x-3a = 0 \xrightarrow{x=-1} \end{cases}$$

$$1-2 = 3a \longrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

- در حالت کلی $|I_n|=1$ (ماتریس واحد، درایه‌های روی قطر اصلی یک دارد)

$$I_3 = \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix} \qquad |I_3|=1$$

- $|\bar{O}_{n\times n}| = 0 \rightarrow$

- $|AB|=|A|\cdot|B|$

- $|A| = \dfrac{1}{|A^{-1}|}$

تمرین ۷ صفحه

$$A=\begin{bmatrix}5&2\\3&2\end{bmatrix} \qquad |A^{-1}|=?$$

$$|A| = 10-6 = 4 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{4}$$

- اگر $A=\begin{bmatrix}5&13\\1&3\end{bmatrix}$ و $B=C^{-1}AC$ باشد دترمینان B^{1400} را محاسبه کنید.

$$|A| = (5\times3)-(13) = 2$$

$$|B^{1400}| = |B|^{1400} \quad *$$

$$|B| = |C^{-1}AC| = |C^{-1}|\times|A|\times|C| = \frac{1}{\cancel{|C|}}\times|A|\times\cancel{|C|}$$

$$\rightarrow |B|=|A|=2$$

$$* = 2^{1400}$$

- اگر یک سطر یا یک ستون دلخواه از ماتریس A، k برابر شود بین دترمینان A و دترمینان ماتریس جدید رابطه وجود دارد.

$$A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}ka&kb&kc\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$$

$$|A| = aA_{11}+bA_{12}+cA_{13}$$

$$|B| = kaA_{11}+kbA_{12}+ckA_{13} = k(aA_{11}+bA_{12}+cA_{13}) = k|A|$$

$$C = \begin{bmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{bmatrix} \Rightarrow |C| = k|A|$$

اگر یک ستون (یک سطر) از ماتریسی k برابر شود دترمینان ماتریس جدید k برابر خواهد شد.

– چه ارتباطی بین دترمینان های زیر وجود دارد؟

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 3b & c \\ 2d & 6e & 2f \\ g & 3h & i \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$|A| = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3\times 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6|B|$$

– رابطه ی بین دترمینان های زیر را پیدا کنید.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} ka & b & c \\ kd & e & f \\ kg & h & i \end{vmatrix} \longrightarrow |B| = k|A|$$

$$|C| = \begin{vmatrix} ka & kb & c \\ kd & ke & f \\ kg & kh & i \end{vmatrix} \longrightarrow |C| = k\times k\,|A| = k^2|A|$$

$$|D| = \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{vmatrix} \longrightarrow |D| = k\times k\times k\,|A| = k^3|A|$$

$KA = D$ چه رابطه ای بین ماتریس A و D وجود دارد؟

$$|KA| = |D| = k^3|A| \longrightarrow |\underbrace{k}_{\text{عدد}}\ \underbrace{A_{3\times 3}}_{\text{ماتریس}}| = k^3|A_{3\times 3}|$$

$$|kA_{n\times n}| = k^n |A_{n\times n}|$$

- اگر $|A_{3\times3}|=2$ باشد حاصل عبارت $|3A^2|$ را بیابید.

$$|3A^2| = 3^3|A^2| = 27|A|^2 = 27\times 2^2 = 27\times 4 = 108$$

- اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times3}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ -2 & +1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$ باشد حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$|3\underset{3\times3}{A^4}\underset{3\times3}{B^2}| = 3^3|A^4B^2| = 27|A|^4\times|B|^2 = 0$$

$$|A| = 4\times5\times-1 = -20 \to |A|^4 = 160000$$

$$|B| = 0\,B_{13} + 4\,B_{23} + 0\,B_{33} = 4(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4(2-2) = 0$$

- اگر ۲ سطر یا دو ستون ماتریسی باهم برابر باشند (مضرب یکدیگر) باشند، دترمینان ماتریس مذکور صفر است.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

$$|B| = \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \Rightarrow |B| = k\cancel{|A|}^{\,0} \to |B| = 0$$

- اگر داشته باشیم $\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ مقادیر ممکن برای x را بیابید.

$x=1$, $x=2$, $x=0$

- اگر جای دو سطر یا دو ستون از ماتریس را عوض کنیم، دترمینان ماتریس جدید قرینه دترمینان ماتریس اولیه است.

$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۴ & ۱ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (۲ - (-۱۲)) = ۱۴$

$B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & -۴ \end{bmatrix} \rightarrow |B| = -۱۲ - ۲ = -۱۴$

دستور ساروس برای محاسبه دترمینان $A_{۳\times۳}$

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

دترمینان ماتریس مقابل را بروش ساروس حل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۲ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{matrix}$$

$|A| = (۲\times۲\times۱) + (۳\times۳\times-۲) + (۴\times۱\times-۱) = ۴ - ۱۸ - ۴ = -۱۸$

$(۴\times۲\times-۲) + (۲\times۳\times-۱) + (۳\times۱\times۱) = -۱۶ - ۶ + ۳ = -۱۹$

$|A| = -۱۸ - (-۱۹) = ۱$

تمرین ۴ ی ص ۳۰

تمرین ۳۰　　سوال ۱ :

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}-2\\-1\\3\end{bmatrix}_{3\times1}=\begin{bmatrix}(1\times-2)+(2\times-1)+(-3\times3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13\end{bmatrix}_{1\times1}\Rightarrow |A\times B|=-13$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}-2\\-1\\3\end{bmatrix}_{3\times1}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\end{bmatrix}_{1\times3}=\begin{array}{c}\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}-2\times1 & -2\times2 & -2\times-3\\ -1\times1 & -1\times2 & -1\times-3\\ & & \end{bmatrix}_{3\times3}\end{array}=\begin{bmatrix}-2 & -4 & 6\\-1 & -2 & 3\\3 & 6 & -9\end{bmatrix}\begin{matrix}-2 & -4\\-1 & -2\\3 & 6\end{matrix}_{3\times3}\qquad B\times A=\begin{bmatrix}-2 & -4 & 6\\-1 & -2 & 3\\3 & 6 & -9\end{bmatrix}$$

$$|BA|=\big[(-2\times-2\times-9)+(-4\times3\times3)+(6\times-1\times6)\big]-\big[(6\times-2\times3)+(-2\times3\times6)+(-4\times-1\times-9)\big]=0$$

ستون‌ها در $B\times A$ مضرب هم هستند داریم .　　$|B\times A|=0$

۳)

$$A=\begin{bmatrix}5|A| & |A|\\5 & 4|A|^2\end{bmatrix}\rightarrow \underset{\sim}{|A|}=(5|A|\times4|A|^2)-5|A|\qquad |A|=x$$

$$x=(5x\times4x^2)-5x\rightarrow 20x^3-6x=0\rightarrow x(20x^2-6)=0\ \begin{cases}|A|=0\\ |A|^2=\frac{6}{20}\rightarrow |A|=\pm\sqrt{0.3}\end{cases}$$

$$(|A|^3-2)=\begin{cases}0-2=-2\\ (\pm\sqrt{0.3})^3-2\end{cases}$$

سوال ۵ :

$$A_{3\times3}\qquad |A|=3\rightarrow\begin{vmatrix}6 & 0 & 0\\0 & -\frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & -1\end{vmatrix}=(6\times-\tfrac{1}{2}\times-1)=3$$

1

سوال ۶ :

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 5\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}-2 & -3\\5 & -1\end{bmatrix}$$

$$|A|=20-6=14\qquad |B|=2-(-15)=17\qquad 2A^{-1}-3B^{-1}=?\begin{bmatrix}\frac{5}{7}+\frac{3}{17} & -\frac{3}{7}-\frac{9}{17}\\ -\frac{2}{7}+\frac{15}{17} & \frac{4}{7}+\frac{6}{17}\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}5 & -3\\-2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{14} & -\frac{3}{14}\\ -\frac{2}{14} & \frac{4}{14}\end{bmatrix}\qquad B^{-1}=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}-1 & 3\\-5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{17} & \frac{3}{17}\\ -\frac{5}{17} & -\frac{2}{17}\end{bmatrix}$$