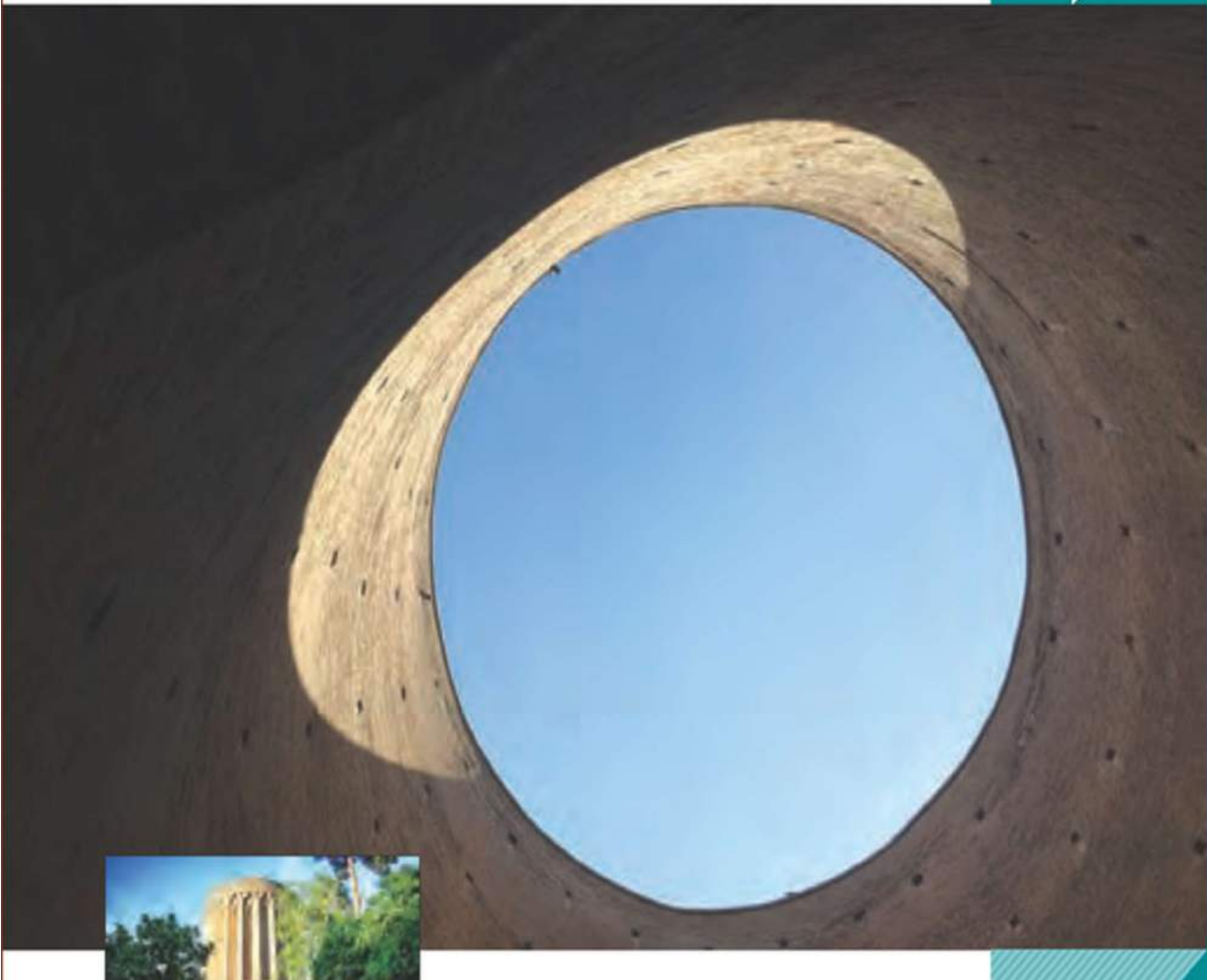


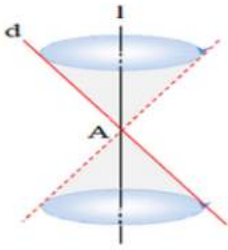
# ۲

فصل دوم

## آشنایی با مقاطع مخروطی

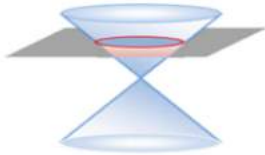


## رویه مخروطی



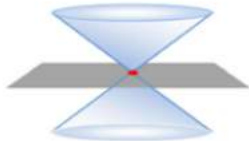
اگر دو خط  $l$  و  $d$  در نقطه  $A$  متقاطع و غیر عمود باشند از دوران خط  $d$  حول خط  $l$  یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) پدید می آید که نقطه  $A$  را رأس و خط  $l$  را محور و خط  $d$  را مولد گوئیم

**مقاطع مخروطی** : سطح مقطع حاصل از تقاطع یک صفحه با یک رویه مخروطی، ممکن است. شکل های داشته باشد، هر یک از این شکل ها را یک مقطع مخروطی می نامیم

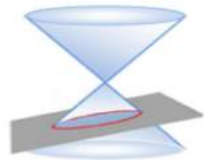


حالت های مختلف سطح مقطع یک رویه مخروطی با یک صفحه عبارتند از:

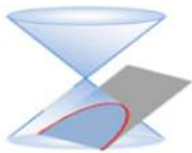
۱- اگر صفحه ای عمود بر محور سطح مخروطی باشد و رأس عبور نکند سطح مقطع حاصل یک دایره است.



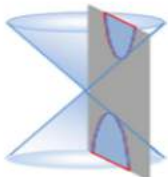
۲- اگر صفحه عمود بر محور رویه از رأس رویه مخروطی بگذرد، شکل حاصل یک نقطه است.



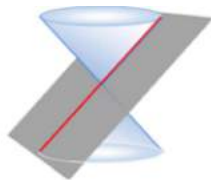
۳- اگر صفحه ای به طور مایل نسبت به محور یکی از دو رویه را قطع کند، سطح مقطع حاصل یک بیضی است.



۴- اگر صفحه به موازات مولد باشد و از رأس عبور نکند، شکل حاصل یک سهمی است.



۵- اگر صفحه هر دو تیکه بالایی و پایینی مخروط را قطع کند و شامل محور نباشد، شکل حاصل یک هذلولی است.

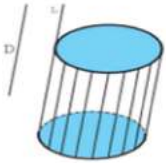


۶- اگر صفحه مماس بر رویه و از رأس بگذرد، مقطع حاصل یک خط راست است.



۷- اگر صفحه شامل محور رویه مخروطی باشد، مقطع حاصل دو خط راست است.

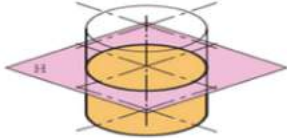
### سطح استوانه ای



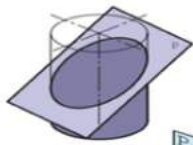
اگر دو خط  $l$  و  $d$  موازی باشند، از دوران خط  $d$  حول خط  $l$  سطحی ایجاد می شود که به آن سطح استوانه ای می گوئیم.

وقتی صفحه ای را با یک سطح استوانه ای تلاقی می دهیم یکی از حالتها زیر به وجود می آید:

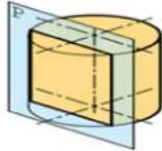
۱- اگر صفحه عمود بر خط  $l$  باشد، سطح مقطع حاصل دایره است.



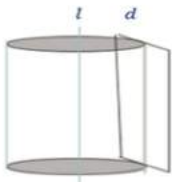
۲- اگر صفحه، سطح استوانه ای را به طور مایل قطع کند، سطح مقطع حاصل یک بیضی است.



۳- اگر صفحه موازی خط  $l$  سطح استوانه را قطع کند، دو خط موازی به وجود می آید.



۴- اگر صفحه بر استوانه مماس باشد، یک خط به وجود می آید.

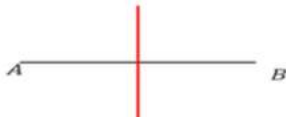


### مکان هندسی

مجموعه ای از نقاط یک صفحه یا فضا است که همه آنها یک ویژگی یا چند ویژگی مشترک را داشته باشند و غیر از این نقاط، هیچ نقطه دیگری با این ویژگی (یا ویژگی ها) وجود نداشته باشد.

### مهمترین مکانهای هندسی

۱- عمود منصف یک پاره خط مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که فاصله این نقاط از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

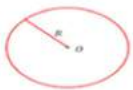


۲- مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو نقطه ثابت به یک فاصله باشد یک صفحه است که از وسط آن پاره خط

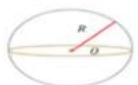
می گذرد و آن پاره خط بر آن عمود است.

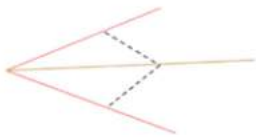


۳- مکان هندسی نقاطی روی صفحه که از نقطه ثابت  $O$  به فاصله  $R$  باشد، دایره ای به مرکز  $O$  و شعاع  $R$  است.



۴- مکان هندسی نقاطی در فضا که از نقطه ثابت  $O$  به فاصله  $R$  باشد، کره ای به مرکز  $O$  و شعاع  $R$  است.





۵- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از اضلاع یک زاویه به یک فاصله باشد، نیمساز آن زاویه است.

۶- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط به یک فاصله باشد، دو خط به موازات آن خط و به همان فاصله از

خط می باشد.



۷- مکان هندسی نقاطی از فضا که از یک خط به یک فاصله باشد، استوانه ای است که شعاع آن برابر فاصله داده شده

است و خط مفروض نیز محور استوانه است.

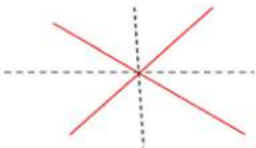


۸- مکان هندسی نقاطی از فضا که از یک صفحه به یک فاصله باشد، دو صفحه موازی با آن صفحه است.



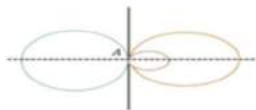
۹- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشد، دو خط عمود برهم است که نیمسازهای

بین زاویه های دو خط می باشند.



۱۰- مکان هندسی مراکز دایره های که در یک نقطه به یک خط مماس هستند، خطی است که در آن نقطه بر آن خط

عمود است.

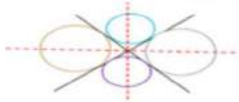


۱۱- مکان هندسی مراکز دایره های که بر یک خط مماس هستند، دو خط است که به موازات آن خط و به فاصله شعاع

دو دایره قرار دارند.

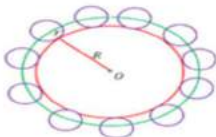


۱۲- مکان هندسی مراکز دایره های که بر دو خط متقاطع مماس هستند، نیمسازهای زاویه های آن دو خط است.



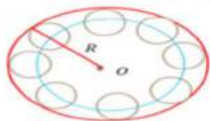
۱۳- مکان هندسی مراکز دایره های به شعاع  $r$  که روی دایره  $C(O, R)$  و در خارج آن مماس هستند دایره ای است به

مرکز  $O$  و شعاع  $R + r$



۱۴- مکان هندسی مراکز دایره های به شعاع  $r$  که روی دایره  $C(O, R)$  و در داخل آن مماس هستند دایره ای است به

مرکز  $O$  و شعاع  $R - r$



۱	۲	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع $d, d'$ به یک فاصله اند، نیمساز زاویه بین آن دو خط می باشد. ب) صفحه‌ای با مولد مخروط دواری، موازی است و از رأس آن عبور نمی کند، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک بیضی است.	۹۸ ۹۷
---	---	--	----------

الف) درست      ب) نادرست

۰/۲۵	۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید . ب) مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه آنها یک ..... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.	۹۸ فرداد
------	---	--	-------------

دایره

۰/۲۵	۲	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. ب) در حالتی که صفحه $P$ بر محور سطح مخروطی $(I)$ عمود نباشد و با مولد آن $(d)$ نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود.	۹۸ فرداد
------	---	--	-------------

درست

۰/۲۵	۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید . ب) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند را ..... می نامیم.	۹۸ مهرپور
------	---	--	--------------

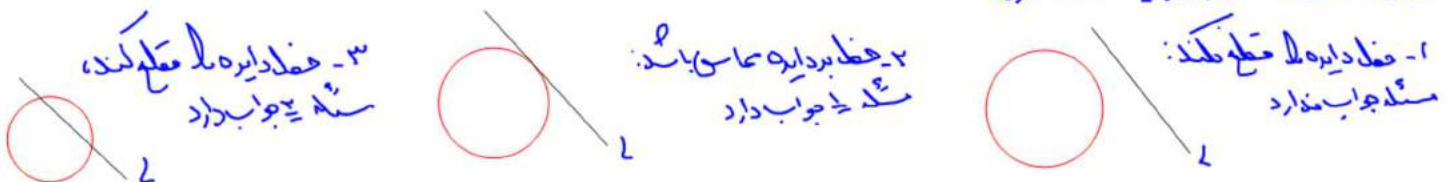
مستوی

۰/۲۵	۲	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. ب) در حالتی که صفحه $P$ بر محور سطح مخروطی $(I)$ عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.	۹۸ مهرپور
------	---	--	--------------

درست

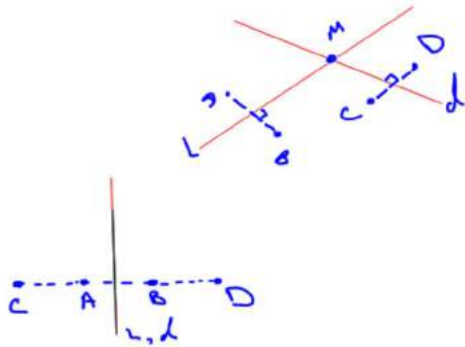
۱/۵	۷	نقاط $A, B, C$ در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از $A$ و $B$ به یک فاصله و از نقطه $C$ به فاصله ۳ سانتی متر باشد (بحث کنید).	۹۸ مهرپور ۹۸ دی
-----	---	--	--------------------------

نقطه‌ای که از دو نقطه  $A$  و  $B$  به یک فاصله باشد، عمودصفحه خط  $AB$  است که از  $A$  و  $B$  می‌نیم و نقطه‌ای که از نقطه  $C$  به فاصله ۳ است دایره‌ای است به مرکز  $C$  و شعاع ۳، که محل برخورد این دایره با خط  $AB$  جواب مسئله است که سه مورد نظر ۳ حالت دارد.



۶	نقاط $A, B, C, D$ در صفحه مفروض اند، نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از $A$ و $B$ به یک فاصله و از $C$ و $D$ نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).	خرداد ۹۹
---	---	----------

مردیف  $AB$  مکان هندسی نقاطی است که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله هستند (خط  $l$ )، مردیف  $CD$  مکان هندسی نقاطی است که از  $C$  و  $D$  به یک فاصله هستند (خط  $d$ ) - محل تقاطع در خط جواب است که ۳ حالت دارد  
 حالت اول: خط  $l$  و  $d$  متقاطع باشند = جواب دارد



حالت دوم: خط  $l$  موازی با  $d$  باشد: جواب ندارد  
 حالت سوم: خط  $l$  بر خط  $d$  منطبق باشد: بی شمار جواب دارد

۲	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (ب) مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت $r$ که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه این مماس خارج اند، دایره $C'(O, 2r)$ است.	خرداد ۹۹
---	---	----------

درست

۱	درجاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. (ب) درحالتی که صفحه $P$ بر محور سطح مخروطی $(L)$ عمود باشد و از رأس آن عبور کند، شکل حاصل یک ..... خواهد بود	خرداد ۹۹ خارج از کادر
---	---	--------------------------

نقطه

۲	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را معلوم کنید. (ب) مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت $r$ که بر خط $d$ در صفحه مماس اند، دو خط به موازات $d$ و به فاصله $r$ از $d$ است.	خرداد ۹۹ خارج از کادر
---	---	--------------------------

درست

۲	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید (ب) مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.	مهر ۹۹
---	---	--------

درست

۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (ب) در حالتی که صفحه $P$ بر محور سطح مخروطی $(I)$ عمود نباشد و با مولد آن $(d)$ نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک ..... خواهد بود..	دی ۹۹
---	---	-------

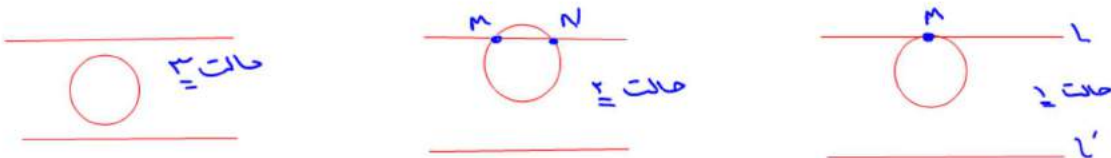
بسی

۲	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. ب) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع $d, d'$ به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه بین آن دو خط می‌باشد.	۹۹
---	--	----

درست

۸	نقطه $A$ و خط $d$ در صفحه مفروض‌اند. نقطه ای را بیابید که از $A$ به فاصله ۲ سانتی متر و از خط $d$ به فاصله ۳ سانتی متر باشد. بحث کنید.	۹۹
---	--	----

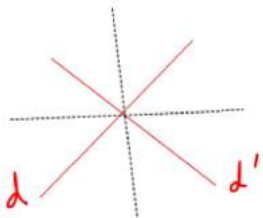
مکان هندسی نقاطی که از نقطه  $A$  به فاصله  $۲\text{cm}$  باشد، دایره‌ای است به مرکز  $A$  و شعاع  $۲\text{cm}$  که اگر  $C$ ی‌نایم و مکان هندسی نقاطی که از خط  $d$  به فاصله  $۳\text{cm}$  است  $\cong$  خط  $l$  و  $l'$  که موازی با خط  $d$  و به فاصله  $۳\text{cm}$  از خط  $d$  هستند که محل برخورد خطوط  $l$  و  $l'$  با دایره  $C$  جواب است که سه حالت دارد



حالت ۱: دایره بیکی از خطوط عمود دیگری را قطع نکند  $\cong$  جواب دارد  
حالت ۲: دایره بیکی از خطوط را قطع کند و دیگری را قطع نکند،  $\cong$  جواب دارد  
حالت ۳: دایره هر دو خط را قطع نکند، در این حالت  $\cong$  جواب ندارد

مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید:

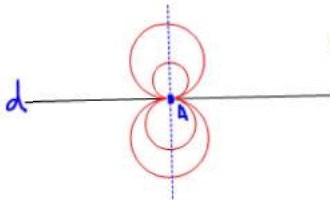
نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع  $d$  و  $d'$  به یک فاصله‌اند.



بنیاد این دو خط که خود  $\cong$  خط عمود برهم هستند، مکان هندسی مورد نظر است

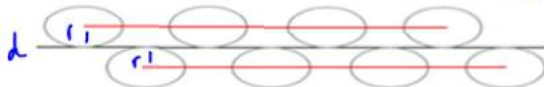
ب) مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط  $d$  در نقطه ثابت  $A$  مماس‌اند.

مکان هندسی مورد نظر خطی است که از نقطه  $A$  گذشت و بر خط  $d$  عمود است



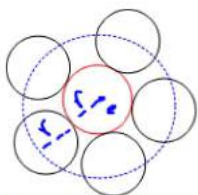
ب) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت  $r$  که بر خط  $d$  در صفحه مماس‌اند.

مکان هندسی مورد نظر دو خط موازی با خط  $d$  و به فاصله  $۲r$  از این خط است



ت) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت  $r$  که بر دایره  $C(O, r)$  در صفحه این دایره مماس خارجی‌اند.

مکان هندسی مورد نظر خودی یک دایره به مرکز  $O$  و شعاع  $۲r$  است



هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکل است؟

- ۱- آه صفحه مورد نظر عمود بر محور باشد و از رأس عبور نکند، مقطع حاصل دایره است
- ۲- آه صفحه مورد نظر عمود بر محور باشد و از رأس عبور کند، مقطع حاصل نقطه است
- ۳- آه صفحه مورد نظر عمود بر محور نباشد و موازی مولد نباشد و تنها یکی از محورها را قطع کند، شکل حاصل بیضی است
- ۴- آه صفحه مورد نظر عمود بر محور نباشد و موازی مولد نباشد و تنها یکی از محورها را قطع نکند، شکل حاصل سهمی است
- ۵- آه صفحه مورد نظر موازی مولد نباشد و هر دو محور را قطع کند، شکل حاصل هذلولی است

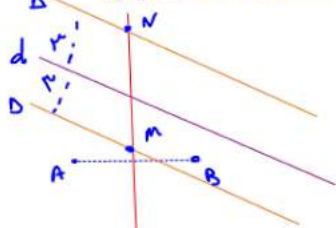
فرض کنید صفحه  $P$ ، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف دربارهٔ سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).

- ۱- آه صفحه  $P$  عمود بر محور باشد، شکل حاصل دایره است
- ۲- آه صفحه  $P$  عمود بر محور نباشد و محور را قطع نکند، شکل حاصل یک بیضی است
- ۳- آه صفحه  $P$  موازی محور باشد، شکل حاصل یک مستطیل است
- ۴- آه صفحه  $P$  مماس بر رویه استوانه‌ای باشد، شکل حاصل خط است

دو نقطه  $A$  و  $B$  و خط  $d$  که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله بوده و از  $d$  به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

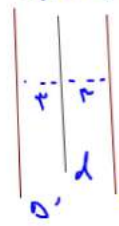
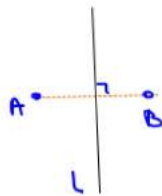
مکان هندسی نقطه‌ای که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله هستند، عمود منصف پاره خط  $AB$  است که آنرا  $L$  می‌نامیم. مکان هندسی نقطه‌ای که از خط  $d$  به فاصله ۳ هستند، خط موازی  $d$  به نامهای  $d_1$  و  $d_2$  است که فاصله هر کدام تا

خط  $d$  ۳ است. محل برخورد خط  $L$  با خطوط  $d_1$  و  $d_2$  جواب است که ۳ حالت دارد

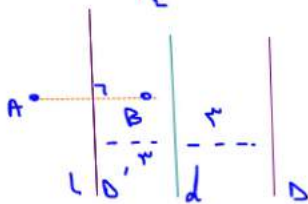


حالت اول: خط  $L$ ،  $d_1$  و  $d_2$  را قطع کند که ۲ جواب دارد

حالت ۲: خط  $L$  با  $d_1$  و  $d_2$  موازی باشد، که جواب ندارد



حالت سوم: خط  $L$  با یکی از خطوط  $d_1$  و  $d_2$  قطع شود، در این حالت ۲ جواب دارد

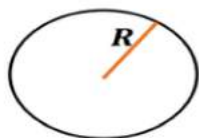




## دایره

### دایره

مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت به نام مرکز دایره به یک فاصله باشد، به این فاصله شعاع دایره می‌گوییم.



دایره به مرکز  $O$  و شعاع  $R$  را با  $C(O, R)$  نشان می‌دهیم.

### نوشتن معادله دایره

اگر مرکز دایره نقطه  $O(\alpha, \beta)$  و شعاع دایره برابر  $R$  باشد، معادله دایره به صورت زیر نوشته می‌شود.

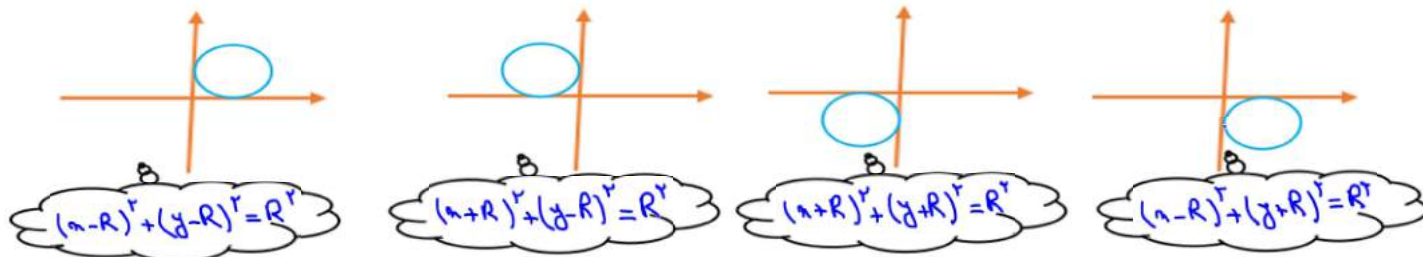
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

### نکات نوشتن معادله دایره

۱- اگر دایره در نقطه ای به طول  $\alpha$  بر محور  $x$  مماس باشد،  $R = |\beta|$

۲- اگر دایره در نقطه ای به عرض  $\beta$  بر محور  $y$  مماس باشد،  $R = |\alpha|$

۳- اگر دایره بر هر دو محور مختصات مماس باشد داریم:



### فرم گسترده معادله دایره

هر معادله دایره اگر باز شود به صورت زیر خواهد شد.

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

که شرط اصلی اینکه این معادله یک معادله دایره باشد این است که  $A = B$  .....

اگر معادله دایره را به ضریب  $x^2$  تقسیم کنیم به صورت زیر می‌شود.

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

بدست آوردن  $\alpha$  :  $\alpha = -\frac{A}{2}$  .....

بدست آوردن  $\beta$  :  $\beta = -\frac{B}{2}$  .....

رابطه بدست آوردن شعاع به صورت زیر است:

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$$

شناسایی دایره :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

۱- اگر  $A^2 + B^2 - 4C > 0$  ..... معادله دایره است.

۲- اگر  $A^2 + B^2 - 4C = 0$  ..... معادله نقطه است.

۳- اگر  $A^2 + B^2 - 4C < 0$  ..... معادله تهی است.

### وضعیت نقطه و دایره

معمولاً معادله یک دایره به صورت  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  را با  $C(x, y) = 0$  نمایش می دهیم و برای پیدا کردن وضعیت نقطه  $A(x_A, y_A)$  داریم:

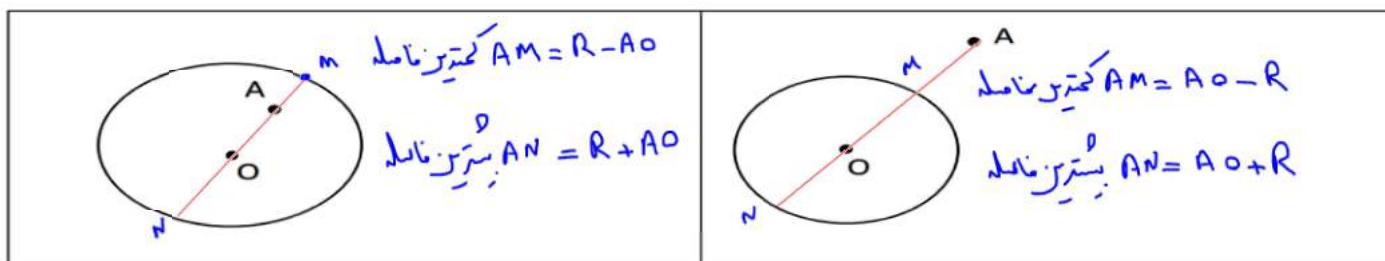
$C(x_A, y_A) > 0 \Rightarrow$  ..... **نقطه A خارج دایره است**

$C(x_A, y_A) = 0 \Rightarrow$  ..... **نقطه A روی دایره است**

$C(x_A, y_A) < 0 \Rightarrow$  ..... **نقطه A داخل دایره است**

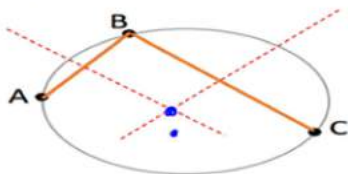
### کمترین و بیشترین فاصله یک نقطه از دایره

برای این منظور نقطه مورد نظر را به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می دهیم و داریم:



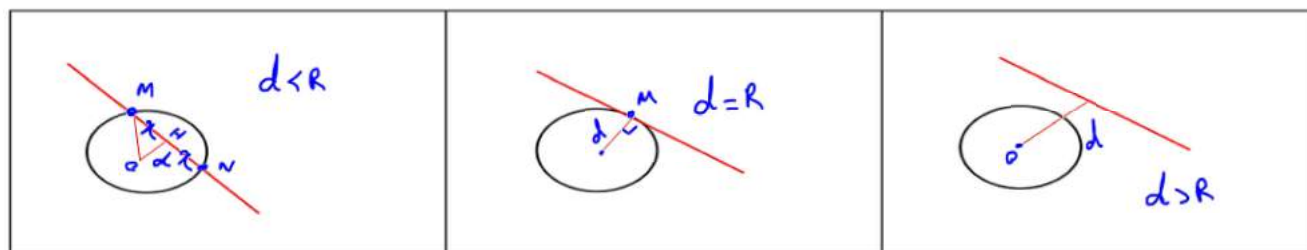
### نوشتن معادله دایره به کمک سه نقطه از دایره

برای بدست آوردن مرکز این دایره عمود منصف های دو پاره خط  $AB$  و  $BC$  را بدست می آوریم محل تقاطع این دو خط مرکز دایره است.



### وضعیت خط با دایره

یک خط با دایره سه حالت می تواند داشته باشد

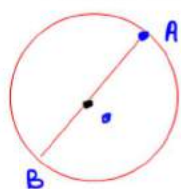


**وضعیت دو دایره نسبت به هم**

دو دایره نسبت به هم ۶ حالت دارند، که به قرار زیر است.

<p><b>متقاطع</b></p> $ R-R'  < \rho < R+R'$	<p><b>مماس بیرون</b></p> $\rho = R+R'$	<p><b>متخارج</b></p> $\rho > R+R'$
<p><b>هم مرکز</b></p> $\rho = 0$	<p><b>متداخل</b></p> $\rho <  R-R' $	<p><b>مماس درون</b></p> $\rho =  R-R' $

۱/۵	۷	معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $B(-2,1), A(4,-1)$ دو سر قطری از آن باشند.	۹۷۵۴
-----	---	---	------



$$O = \frac{A+B}{2} \Rightarrow O(1,0) \rightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=0 \end{cases}$$

$$OA=R = \sqrt{(x_A-x_O)^2 + (y_A-y_O)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{9+1} \Rightarrow R=\sqrt{10}$$

معادله دایره:  $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 10$

۱	۸	حدود $a$ را طوری به دست آورید که $x^2 + y^2 - 2x + 5y + a = 0$ بتواند معادله یک دایره باشد.	۹۷۵۴
---	---	---	------

$$\frac{a}{-2} \mid \frac{b}{5} \mid \frac{c}{a}$$

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \Rightarrow 4 + 25 - 4a > 0 \Rightarrow 29 - 4a > 0 \Rightarrow -4a > -29 \Rightarrow$$

$$a < \frac{29}{4}$$

۱/۷۵	۹	دایره‌های $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 - 2x = 4$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟	۹۷۵۴
------	---	--	------

$$x^2 - 2x + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 5 \quad O(1,0) \quad R=\sqrt{5}$$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad O'(0,0) \quad R'=2$$

$$\rho = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1$$

$$R+R' = 2+\sqrt{5} \quad |R-R'| = \sqrt{5}-2 = \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

$$|R-R'| < \rho < R+R' \Rightarrow \text{دو دایره متقاطع‌اند}$$

۱/۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x + 3y = -5$ بر آن مماس باشد.	۶	خرداد ۹۸ دی ۹۹
-----	---	---	-------------------

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2 + y = 1 \Rightarrow y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

$$R = \frac{|4(2) + 3(-1) + 5|}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = \frac{|8 - 3 + 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{10}{5} = 2$$

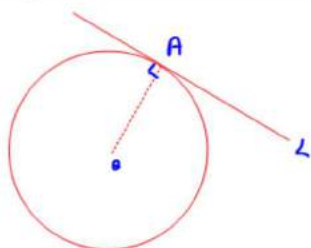
$$R^2 = 4$$

$$C(2, -1)$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$$

معادله دایره:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$

۱	در نقطه $A(2, 3)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی رسم کرده‌ایم. معادله این خط مماس را به دست آورید.	۷	خرداد ۹۸
---	---	---	----------



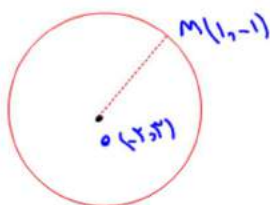
$$x^2 - 2x + y^2 - 2y = 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 3 + 1 + 1 \Rightarrow$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5 \quad O(1, 1)$$

$$m_{OA} = \frac{3 - 1}{2 - 1} = 2 \Rightarrow m_L = -\frac{1}{2}$$

معادله خط L:  $y - y_A = m_L(x - x_A) \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y - 6 = -x + 2 \Rightarrow x + 2y = 8$

۱	معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $O(-2, 3)$ مرکز آن و $M(1, -1)$ یک نقطه از آن باشد.	۸	مهر ۹۸
---	--	---	--------



$$OM = R = \sqrt{(1 + 2)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

۱/۲۵	وضعیت خط $x + y = 2$ و دایره $x^2 + y^2 = 2$ را نسبت به هم مشخص کنید.	۹	مهر ۹۸
------	---	---	--------

$$O(0, 0) \quad R = \sqrt{2} \quad x + y - 2 = 0$$

$$d = \frac{|0 + 0 - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow d = R$$

خط بردار مماس است

۱/۲۵	وضعیت خط $3x + y = 0$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ مشخص کنید.	۹
------	---	---



$$x^2 - 4x + y^2 - 4y = -7 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = -7 + 2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

$O(2,2) \quad R=1$

$d > R \Rightarrow$  خط دایره را قطع نمی‌کند

$$d = \frac{|3(2) + (2)|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}} > \frac{1}{\sqrt{10}}$$

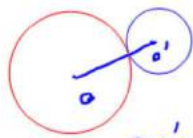
۱/۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(2, -2)$ بوده و بر دایره به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$ مماس خارج باشد.	۸
-----	--	---



$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4 + 5 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

$O'(-1, 2) \quad R'=3$

$O(2, -2) \quad R=?$



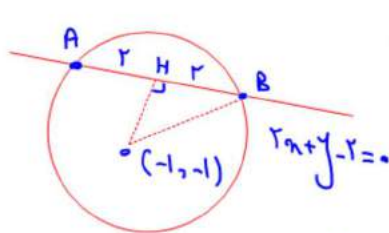
$OO' = R + R'$

$$OO' = \sqrt{(-1-2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$OO' = R + R' \Rightarrow 5 = R + 3 \Rightarrow R = 2$

معادله دایره:  $(x-2)^2 + (y+2)^2 = R^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$

۱/۲۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(-1, -1)$ مرکز آن بوده و روی خط $2x + y = 2$ وتری به طول ۴ ایجاد کند.	۷
------	---	---



$AH = BH = \frac{AB}{2} = 2$

$$OH = \frac{|2(-1) + (-1) - 2|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \Rightarrow OH = \sqrt{5}$$

$\Delta OHB$ : فیثاغورس:  $OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow R^2 = 5 + 4 = 9 \Rightarrow R = 3$

معادله دایره:  $(x-2)^2 + (y+2)^2 = R^2 \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$

۱	وضعیت نقطه $A(1, -2)$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ را تعیین کنید.	۸
---	--	---



$$x^2 - 2x + y^2 + 2y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$$

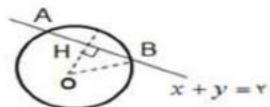
$O(1, -1) \quad R = \sqrt{2}$

$OA = \sqrt{(1-1)^2 + (-2+1)^2} \Rightarrow OA = 1$

$\Rightarrow OA < R \Rightarrow$  نقطه داخل دایره است

6	معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن بوده و روی خط به معادله $x + y = 2$ وترى به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.	15
---	--	----

خرداد ۹۱  
خارج از کتاب



$$AH = HB = \frac{AB}{2} = \sqrt{2} \quad x + y - 2 = 0$$

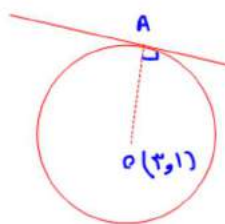
$$OH = \frac{|0 + 1 - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow OH = \sqrt{2}$$

در  $\triangle OHB$ :  $OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow R^2 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow R = 2$

معادله دایره:  $(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 4$

7	معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن بوده و بر خط به معادله $4x + 3y + 5 = 0$ عماس باشد.	1/25
---	---	------

خرداد ۹۱



$$4x + 3y + 5 = 0 \quad OA = R = \frac{|4(3) + 3(1) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|12 + 3 + 5|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

معادله دایره:  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$

8	وضعیت خط $x - y - 1 = 0$ و دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید.	1/25
---	---	------

خرداد ۹۱

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = -3 + 5 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$$

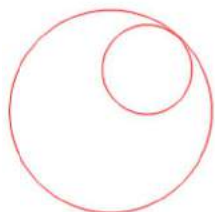
مرکز  $O(1, -2)$   $R = \sqrt{2}$

$$OH = \frac{|1 - (-2) - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow OH = \sqrt{2}$$

خط دایره عماس است  $OH = R$

14	معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ باشد و با دایره $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$ عماس داخل باشد.	3
----	---	---

خرداد ۹۱



$$x^2 - 8x + y^2 + 4y = -16 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 = -16 + 20 \Rightarrow (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

مرکز  $O'(4, -2)$   $R' = 2$   $O(0,1)$   $R = ?$

$$OO' = \sqrt{(4 - 0)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} \Rightarrow OO' = 5$$

$$OO' = |R - R'| \Rightarrow 5 = |R - 2| \Rightarrow \begin{cases} R - 2 = 5 \Rightarrow R = 7 \\ R - 2 = -5 \Rightarrow R = -3 \end{cases}$$

معادله دایره:  $(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 49$

۰/۱۵	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. پ) نقطه $(۳, -۲)$ روی دایره $x^2 + y^2 + ۲x = ۰$ قرار دارد.	۲
------	---	---

درگاه ۹۹

$C(m, y) = x^2 + y^2 + 2x$  نادرست  
 $C(۳, -۲) = 9 + 4 + 6 = 19 > 0 \rightarrow$  خارج دایره

۲	وضعیت دو دایره $x^2 + (y-1)^2 = 1$ و $(x-1)^2 + y^2 = 1$ را نسبت به هم مشخص کنید.	۱۰
---	---	----

درگاه ۹۹

$(x-1)^2 + y^2 = 1$      $O(1, 0)$      $R=1$      $x^2 + (y-1)^2 = 1$      $O'(0, 1)$      $R'=1$   
 $OO' = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$      $R+R'=2$      $|R-R'|=0$   
 $|R-R'| < OO' < R+R' \rightarrow$  دایره متقاطع است

مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$  را به دست آورید.

$x^2 + 2x + y^2 - 4y = -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = -1 + 5 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$   
 $O(-1, 2)$      $R=2$

وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

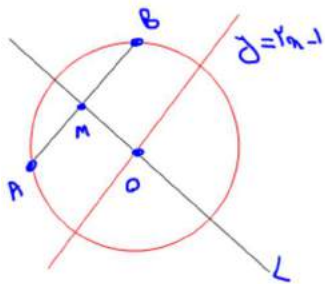
$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$  ,  $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0$

$x^2 - 4x + y^2 - 6y = 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 3 + 13 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$      $O(2, 3)$      $R=4$

$x^2 - 10x + y^2 - 14y = -73 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 14y + 49 = -73 + 74 \Rightarrow (x-5)^2 + (y-7)^2 = 1$      $O'(5, 7)$      $R'=1$

$OO' = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$      $R+R'=5$      $|R-R'|=3$

$OO' = R+R' \Rightarrow$  دایره‌ها بیرون هم‌مسند



معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط  $A(1, 2)$  و  $B(3, 0)$  بگذرد و  $y=2x-1$  شامل قطری از آن باشد.

$M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M(2, 1)$      $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{1-3} = -1 \Rightarrow m_L = 1$

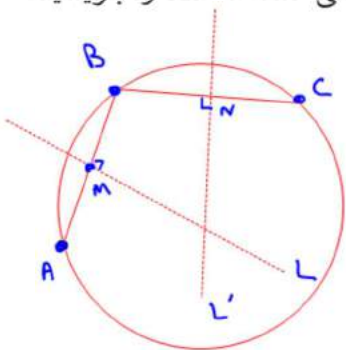
$L$  خط:  $y - y_m = m_L(x - x_m) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 1$

$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow 2x - 1 = x - 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1$      $O(0, -1)$

$OA = R = \sqrt{(1-0)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

معادله دایره:  $(x-0)^2 + (y+1)^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 10$

نقاط  $A(-1, -1)$  و  $B(1, 1)$  و  $C(1, -3)$  رئوس مثلث  $ABC$  هستند. معادله دایره محیطی مثلث  $ABC$  را بنویسید. سپس معادله مماس بر این دایره را در رأس  $B$  به دست آورید.



مردمهای  $AB$  و  $BC$  را پیدا کنیم

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1+1}{1+1} = 2 \rightarrow m_L = -\frac{1}{2} \quad M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M(0, 0)$$

$$L \text{ خط: } y - y_M = m_L(x - x_M) \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

$$m_{BC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3-1}{1-1} = \infty \rightarrow m_{L'} = 0 \quad N = \frac{B+C}{2} \Rightarrow N(1, -1)$$

$$L' \text{ خط: } y - y_N = m_{L'}(x - x_N) \Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}x = -1 \Rightarrow x = -2$$

$$O(-2, -1)$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

$$OA = R = \sqrt{(-1 - (-2))^2 + (-1 + 1)^2} = \sqrt{1 + 0} \Rightarrow R = 1$$

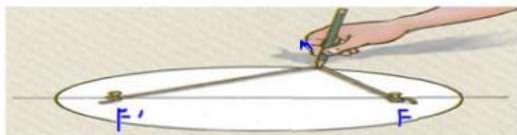
$$m_{OB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - (-1)}{1 - (-2)} = \frac{2}{3} \rightarrow m_L = -\frac{3}{2}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$



**بیضی**

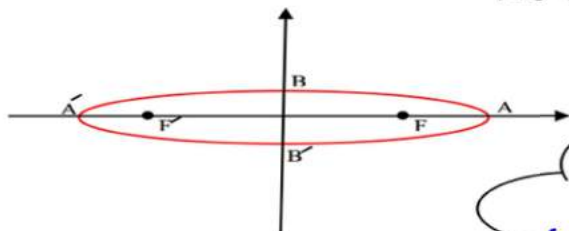
مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت به نام کانون های بیضی مقدار ثابتی است.



$$MF + MF' = 2a$$

دو نوع بیضی داریم که در یکی پاره خطی که کانونها را بهم وصل می کند موازی محور  $x$  است که به آن بیضی افقی گوئیم و در دیگر این پاره خط موازی محور  $y$  است که به آن بیضی قائم گوئیم.

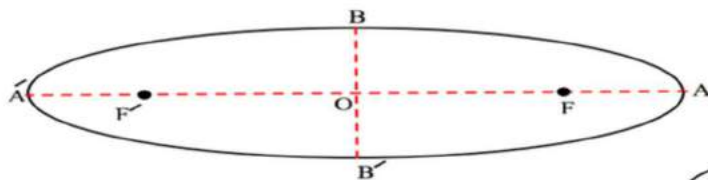
**حالت خاص:** اگر بیضی افقی و مرکز آن روی مبدا مختصات باشد.



$AA' = 2a$  (قطر بزرگ (افقی))  
 $BB' = 2b$  (قطر کوچک (عمودی))  
 $a^2 = b^2 + c^2$   
 $e = \frac{c}{a}$   
 $PF' = 2c$  (فاصله کانونی)  
 $PF = \frac{15a}{9}$  (طول وتر کانونی)  
 $AF = AF' = a - c$  (کمترین فاصله بیضی تا کانون)  
 $AF = AF' = a + c$  (بیشترین فاصله بیضی تا کانون)  
 $BF = BF' = a$

**بیضی افقی**

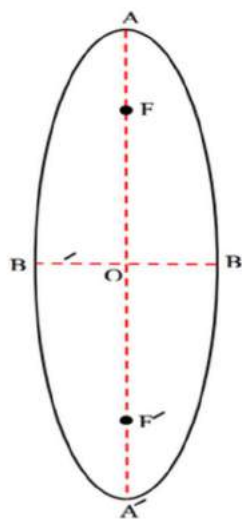
در یک بیضی افقی روابط زیر را داریم:



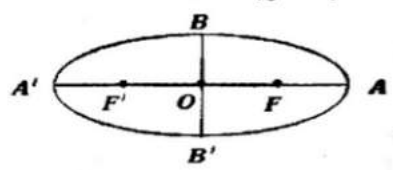
$O(a, B)$   
 $A(a+a, B)$   
 $B(a, B+b)$   
 $F(a+c, B)$   
 $A'(a-a, B)$   
 $B'(a, B-b)$   
 $F'(a-c, B)$

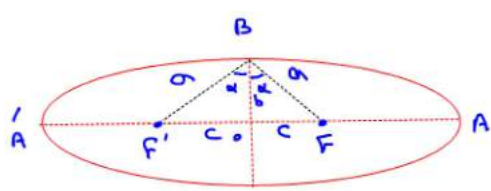
**بیضی قائم**

در یک بیضی افقی روابط زیر را داریم:



$O(a, B)$   
 $A(a, B+a)$   
 $B(a+b, B)$   
 $F(a, B+c)$   
 $A'(a, B-a)$   
 $B'(a-b, B)$   
 $F'(a, B-c)$

۱/۵	<p>اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه زاویه <math>F\hat{B}F'</math> چند درجه است؟</p> 	<p>۱۰ دست آورید</p>
-----	--	-------------------------



$BF = BF'$   
 $AA' = 2BB' \Rightarrow 2a = 2(2b) \Rightarrow a = 2b$   
 $\Delta OBF: \cos \alpha = \frac{OB}{BF} = \frac{b}{a} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$   
 $F'\hat{B}F = 2\alpha = 120^\circ$


۱/۵	<p>اگر خروج از مرکز بیضی برابر <math>\frac{3}{5}</math> و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانونی آن را به دست آورید.</p>	<p>۸ خرداد ۹۸</p>
-----	---	-----------------------

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{c}{a} \Rightarrow \begin{cases} c = 3n \\ a = 5n \end{cases}$

$BB' = 16 \Rightarrow 2b = 16 \Rightarrow b = 8$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25n^2 = 64 + 9n^2 \Rightarrow 16n^2 = 64 \Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = -2 \end{cases}$

$c = 3n = 6$        $a = 5n = 10$        $AA' = 2a = 20$        $FF' = 2c = 12$

۱/۲۵	<p>دو نقطه <math>A</math> و <math>B</math> مطابق شکل روی بیضی و نقاط <math>F</math> و <math>F'</math> کانونهای بیضی اند. اگر <math>AF' = BF</math> باشد ثابت کنید دو پاره خط <math>AF</math> و <math>BF'</math> موازی اند.</p> 	<p>۹ خرداد ۹۸</p>
------	--	-----------------------

فرضی:  $AF' = BF$       حکم:  $AF' \parallel BF$

$AF \perp B$  و  $F' \perp A$

$\left. \begin{matrix} AF + AF' = 2a \\ BF + BF' = 2a \end{matrix} \right\} \Rightarrow AF + AF' = BF + BF' \Rightarrow AF = BF'$

$\square AFBF': AF' = BF, AF = BF' \Rightarrow \square ABF'F \Rightarrow AF' \parallel BF$

۱۱	بیضی با قطرهای ۶ و ۱۰ مفروض است. خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.	۱/۲۵
----	---	------

سوال شماره ۹۸  
مجموع نمرات

$$BB' = 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

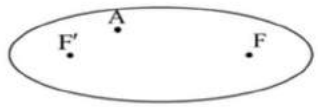
$$AA' = 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

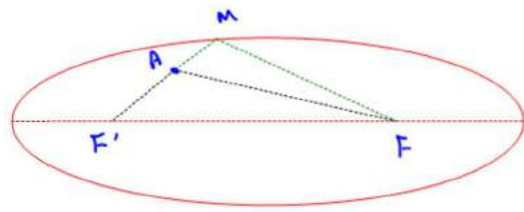
$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{4}{5}$$

۱۰	در شکل مقابل نقطه A داخل بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند. ثابت کنید مجموع فواصل نقطه A از F و F' کوچکتر از قطر بزرگ بیضی است.	۱/۲۵
----	---	------

سوال شماره ۹۸  
مجموع نمرات ۹۹



مطلب:  $AF + AF' < 2a$



در معنی این داریم  $MF + MF' = 2a$   
 در مثل  $\triangle AFM$  (قضیه سارگوس):  $MA + MF > AF$   
 استدلالی مهم تا بیضی را در نقطه‌ای مثل M قطع کند، A داخل بیضی است.

$$MA + MF > AF \xrightarrow{+AF'} \frac{AF' + AM + MF}{MF'} > \frac{AF' + AF}{2a} \Rightarrow \frac{MF' + MF}{2a} > \frac{AF' + AF}{2a} \Rightarrow AF' + AF < 2a$$

۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. پ) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک ... دایره ... می‌شود.	۰/۲۵
---	--	------

سوال شماره ۹۸  
مجموع نمرات خرداد ۹۸

اگر  $e = 0$  بیضی تبدیل به خطی شود

۲	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. پ) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد بیضی تبدیل به یک پاره خط می‌شود. درست	۰/۲۵
---	--	------

سوال شماره ۹۸  
مجموع نمرات خرداد ۹۸

۱۰	نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. در صورتی که بدانیم مثلث MFF' قائم‌الزاویه است، طول MF را به دست آورید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند).	۱/۵
----	---	-----

سوال شماره ۹۸  
مجموع نمرات خرداد ۹۸

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$$PF = PC = n$$

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow MF + MF' = 10 \Rightarrow MF = n \leq 5 \quad MF' = 10 - n$$

$$\text{میانگین: } PF^2 = MF^2 + MF'^2 \Rightarrow n^2 = n^2 + (10 - n)^2 \Rightarrow 64 = n^2 + 100 + n^2 - 20n \Rightarrow 2n^2 - 20n + 36 = 0 \Rightarrow n^2 - 10n + 18 = 0$$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 72}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 5 \pm \sqrt{7}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4(1)(18) = 100 - 72 = 28 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{7}$$

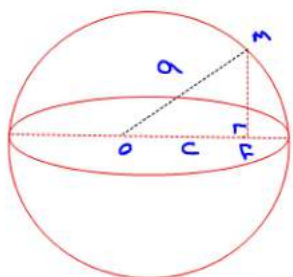
$$MF = 5 - \sqrt{7} \quad MF' = 5 + \sqrt{7}$$

1	<p>9 قطر دایره C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است واز کانون F عمودی بر AA' رسم کرده ایم تا دایره را در نقطه ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.</p>	<p>خرداد ۹۹</p>
---	--	-----------------

فرض:  $2R = 2a \Rightarrow R = a$

مفروضه،  $MF = b$

م: O وصل کنیم

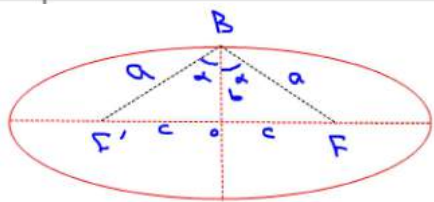


$OF = c$   $OM = R$   
فرض  $R = a \Rightarrow OM = a$

①  $OM^2 = MF^2 + OF^2 \Rightarrow a^2 = MF^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = MF^2$   
②  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2$

①, ②  $\Rightarrow MF^2 = b^2 \Rightarrow MF = b$

1/5	<p>10 در بیضی مقابل طول قطر بزرگ <math>\sqrt{2}</math> برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه <math>\widehat{F'BF}</math> چند درجه است؟</p>	<p>خرداد ۹۹</p>
-----	---	-----------------



$AA' = \sqrt{2} BB' \Rightarrow 2a = \sqrt{2}(2b) \Rightarrow a = \sqrt{2}b$

∆ OFB:  $\cos \alpha = \frac{OB}{BF} = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

$\widehat{F'BF} = 2\alpha = 2(45) = 90$

1	<p>11 اگر در یک بیضی طول قطر کوچک ۲۴ و فاصله کانون تا مرکز آن برابر ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.</p>	<p>خرداد ۹۹</p>
---	--	-----------------

$2b = 24 \Rightarrow b = 12$

$c = 5$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 144 + 25 \Rightarrow a^2 = 169 \Rightarrow a = 13$

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{5}{13}$

8	در یک بیضی خروج از مرکز برابر $\frac{4}{5}$ و اندازه قطر بزرگ بیضی برابر 20 است. طول قطر کوچک بیضی و اندازه کانونی آن را بیابید.
---	--

سوال شماره 8  
خرداد 99 -  
خارج از کشور

$$AA' = 2a \Rightarrow 20 = 2a \Rightarrow a = 10$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{c}{10} \Rightarrow 5c = 40 \Rightarrow c = 8$$

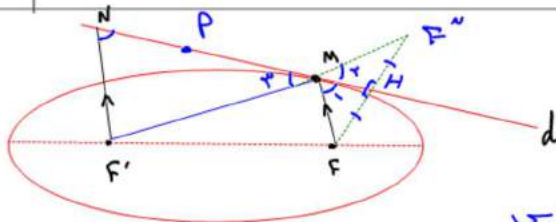
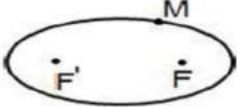
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 100 = b^2 + 64 \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$$

$$BB' = 2b \Rightarrow BB' = 12$$

$$F'F'' = 2c \Rightarrow F'F'' = 16$$

9	در شکل مقابل نقطه $M$ روی بیضی و کانون های $F$ و $F'$ مشخص شده اند. خط $d$ را به گونه ای رسم کنید که در نقطه $M$ بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه $F'$ خطی موازی با $MF$ رسم کنید تا خط $d$ را در نقطه ای مانند $N$ قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$
---	---

سوال شماره 9  
خرداد 99 -  
خارج از کشور  
خبربر 99



حکم:  $NF' = MF'$   
فرض:  $MF \parallel NF'$   
ابتدا  $M$  را به  $F$  وصل می کنیم  
هر نقطه  $P$  بر  $M$  روی خط  $d$  (مانند  $P$ ) خارج از بیضی است پس

آه از نقطه  $F$  بچواییم به خط  $d$  و بیسی به نقطه  $F''$  برسیم که تقصیر  $MF + MF'' = 2a$  است که بنا به قضیه هرون نقطه  $M$  از بیاد تا  $F$  نقطه  $F$  نسبت به خط  $d$  است که نقطه  $F$  را به  $F''$  وصل کرده ایم

$$\left. \begin{array}{l} FH = HF'' \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ MH = MH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MHF \cong \triangle MHF'' \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ \hat{M}_2 = \hat{M}_3 \text{ (تقابل بر رأس)} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_3$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{M}_3 \\ \hat{M}_1 = \hat{N} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_3 = \hat{N}$$

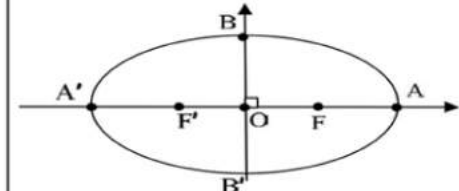
خط  $d$  در  $P$  و  $MF \parallel NF'$  (موازی در هر دو طرف)  
بنابراین  $NF' = MF$

1	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (پ) اگر طول قطر بزرگ بیضی دو برابر فاصله کانونی آن باشد، خروج از مرکز بیضی برابر ..... است.
---	---

سوال شماره 1  
خبربر 99

$$AA' = 2FF' \Rightarrow 2a = 2(2c) \Rightarrow a = 2c$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{c}{2c} \Rightarrow e = \frac{1}{2}$$

۱/۲۵		<p>۹ مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای X و Y منطبق هستند و فاصله F از هر دو نقطه O و A برابر ۴ است، طول قطر کوچک بیضی را محاسبه کنید.</p>
------	---	---

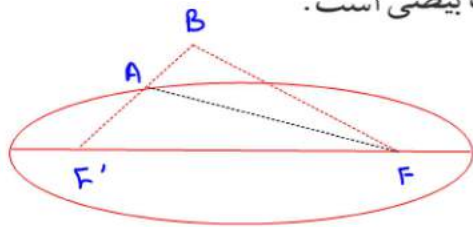
سوره نور ۹۹

$$OF = c = 4 \quad \left. \begin{aligned} FA = OA - OF = 4 = a - c \\ c = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 = a - 4 \Rightarrow a = 8$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 64 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 48 \Rightarrow b = 4\sqrt{3} \quad BB' = 2b \Rightarrow BB' = 8\sqrt{3}$$

یک نقطه دلخواه مانند B بیرون بیضی رسم شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه مورد نظر از F و F' بزرگتر از قطر بزرگ بیضی است.

تقریب کتاب درسی



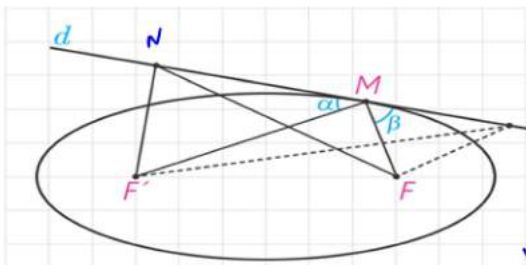
حل تلافی BF' با بیضی در نقطه A فرض می‌کنیم و A را به F وصل می‌کنیم

$$\triangle ABF: AB + BF > AF \xrightarrow{+AF'} \frac{AF' + AB + BF}{BF'} > \frac{AF' + AF}{2a} \Rightarrow BF' + BF > 2a$$

فرض کنیم خط d مانند شکل مقابل در نقطه M بر بیضی مماس باشد.

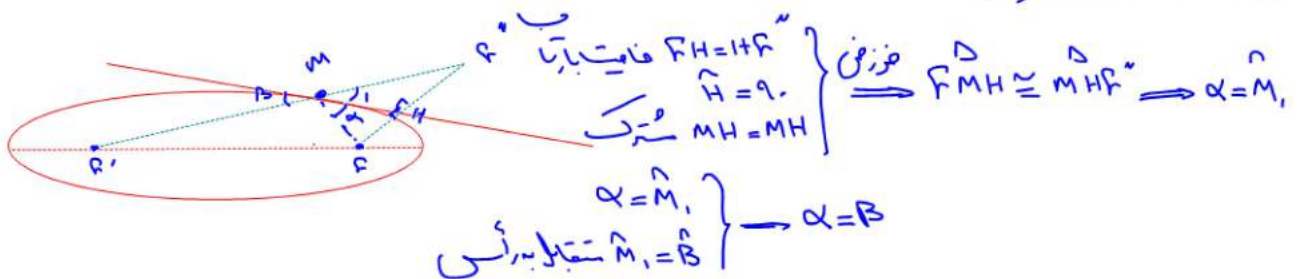
تقریب کتاب درسی

۱- مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون F و F' کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

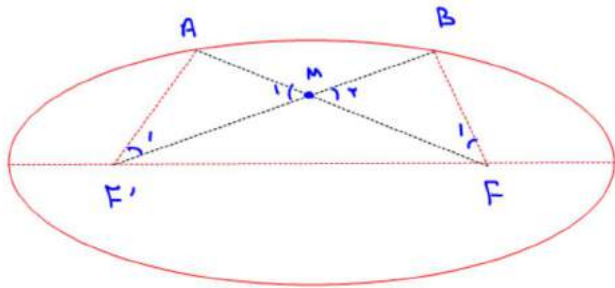


۲- دو زاویه  $\alpha$  و  $\beta$  نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

هر نقطه بیرون از بیضی M مثل نقطه N روی خط d خارج از بیضی است پس اگر از F بزنیم به خط d بیضی نقطه F' بریم می‌رسیم  $F'M + M'F' = 2a$  در حالی که  $NF + NF' > 2a$  و طبق قضیه هرون ابتدا باید بازتاب F' را نسبت به خط d بدست آوریم و آنجا به F وصل می‌کنیم



دو نقطه  $A$  و  $B$  روی یک بیضی  $F$  و  $F'$  کانون‌های بیضی اند.  $A$  به کانون  $F'$  نزدیک‌تر و  $B$  به کانون  $F$  نزدیک‌تر است. اگر  $AF' = BF$  باشد، نشان دهید: در حالتی که  $AF$  و  $BF'$  یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند  $M$  قطع کنند، مثلث  $FMF'$  متساوی‌الساقین است و  $M$  روی قطر کوچک بیضی است.



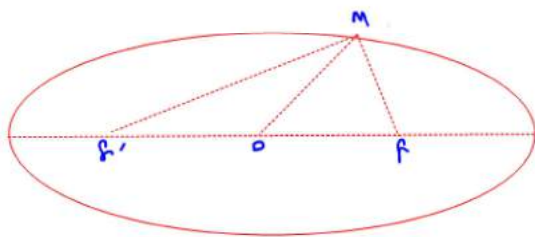
فرض  $AF' = BF$   
 $M$  روی قطر کوچک  
 $FM = MF'$  حکم  
 $AF + AF' = 2a$   
 $BF + BF' = 2a$  }  $\Rightarrow AF + AF' = BF + BF' \Rightarrow AF = BF'$

فرض  $AF' = BF$  طبق فرض  
 $AF = BF'$  اثبات بالا  
 $FF' = FF'$  مشترک  
 $\Rightarrow \triangle AFF' \cong \triangle BFF'$  ق.م.م  $\Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$  ①  
 $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$  متقابل رأس ②

$\triangle AFM: \hat{A} + \hat{M}_1 + \hat{F}_1 = 180^\circ$   
 $\triangle BFM: \hat{B} + \hat{M}_2 + \hat{F}_2 = 180^\circ$  }  $\Rightarrow \hat{A} + \hat{M}_1 + \hat{F}_1 = \hat{B} + \hat{M}_2 + \hat{F}_2 \Rightarrow \hat{F}_1 = \hat{F}_2$  ③

$\hat{A} = \hat{B}$  اثبات بالا  
 $AF' = AF$  فرض  
 $\hat{F}'_1 = \hat{F}_1$  اثبات بالا  
 $\Rightarrow \triangle AF'M \cong \triangle AMF$  ق.م.م  $\Rightarrow MF' = MF$   
 چون نقطه  $M$  از دو نقطه  $F$  و  $F'$  یک فاصله است ( $MF' = MF$ ) پس  $M$  روی عمود منصف  $FF'$  است بنابراین نقطه  $M$  روی قطر کوچک بیضی است

نقطه  $M$  روی بیضی به اقطار  $6$  و  $10$  واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر  $4$  واحد است.



الف) نشان دهید  $OM = OF = OF'$ .

ب) نشان دهید مثلث  $MF'F$  قائم‌الزاویه است.

ج) طول‌های  $MF$  و  $MF'$  را به دست آورید.

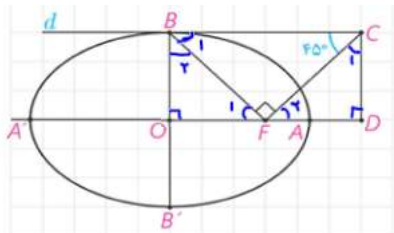
الف)  $2a = 10 \Rightarrow a = 5$        $2b = 6 \Rightarrow b = 3$   
 $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4 = OF = OF'$   
 $OM = OF = OF' = 4$

ب)  $OM = OF = OF' = 4$  ،  $FF' = 2c = 8$  ، بنابراین  $\hat{M} = 90^\circ$

$MF + MF' = 2a = 10$        $MF = n < 5$  ،  $MF' = 10 - n$

پس  $FF'^2 = MF^2 + MF'^2 \Rightarrow 64 = n^2 + (10 - n)^2 \Rightarrow 64 = n^2 + 100 - 20n + n^2 \Rightarrow 2n^2 - 20n + 36 = 0 \Rightarrow n^2 - 10n + 18 = 0$

$\Delta = 100 - 72 = 28 = 2\sqrt{7}$        $n = \frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = 5 - \sqrt{7} & MF = 5 - \sqrt{7} \\ n = 5 + \sqrt{7} & MF' = 5 + \sqrt{7} \end{cases}$



در بیضی مقابل  $AA'$  و  $BB'$  دو قطر اند. خط  $d$  در نقطه  $B$  بیضی مماس است. پاره خط  $BF$  را رسم می کنیم و در نقطه  $F$  عمودی بر  $BF$  رسم می کنیم تا خط  $d$  را در نقطه  $C$  قطع کند و از  $C$  عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می کنیم تا آنرا در نقطه ای مانند  $D$  قطع کند. اگر  $\widehat{BCF} = 45^\circ$ ، مقدار  $\frac{AD}{AF}$  را به دست آورید.

عنوان کتاب درسی

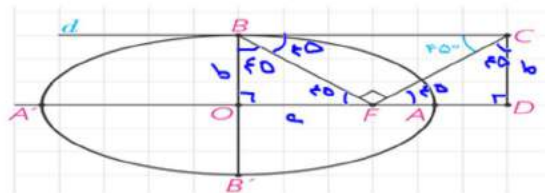
$$\triangle BFC: \widehat{B}_1 + 90 + 45 = 135 \Rightarrow \widehat{B}_1 = 45 \quad \left. \begin{array}{l} \widehat{B}_1 + \widehat{B}_r = 90 \\ \widehat{B}_r = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{B}_r = 45$$

$$\triangle OBF: \widehat{B}_r + 90 + \widehat{F}_1 = 135 \xrightarrow{\widehat{B}_r = 45} \widehat{F}_1 = 45 \quad \widehat{F}_1 + 90 + \widehat{F}_r = 135 \xrightarrow{\widehat{F}_1 = 45} \widehat{F}_r = 45$$

$$\triangle FCD: \widehat{F}_r + 90 + \widehat{C}_1 = 135 \xrightarrow{\widehat{F}_r = 45} \widehat{C}_1 = 45$$

$$\triangle OBF: \widehat{B}_r = \widehat{F}_1 = 45 \xrightarrow{\text{تساوی اضلاع}} OB = OF = b = c$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}b$$



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{O} = \widehat{D} = 90 \\ OB = CD \\ \widehat{B}_r = \widehat{C}_1 = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BOF \cong \triangle CDF \xrightarrow{\text{فا}} OF = FD \Rightarrow FD = c$$

$$\frac{AD}{AF} = \frac{FD - FA}{OA - AF} = \frac{c - (a - c)}{a - c} = \frac{2c - a}{a - c} = \frac{2b - \sqrt{2}b}{\sqrt{2}b - b} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2(\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} + 1)}{2 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AF} = \sqrt{2}$$

فرض کنید از مثلث  $ABC$ ، اندازه ضلع  $BC$  و ارتفاع  $AH$  و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوه رسم این مثلث را توضیح دهید.

عنوان کتاب درسی

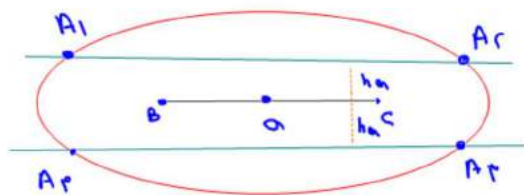
$$BC = a \quad AH = h_a \quad \text{محیط} = 2p$$

۱- ضلع  $BC$  به اندازه  $a$  رسم می کنیم

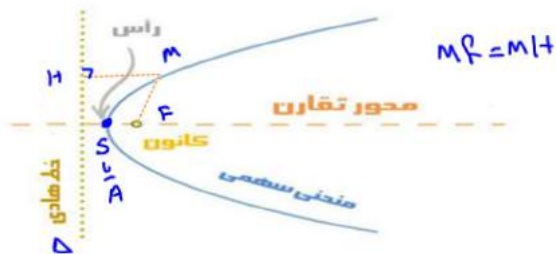
$$2- \text{محیط} = AB + AC + BC = 2p = AB + AC + a \Rightarrow AB + AC = 2p - a$$

چون مجموع فاصله نقطه  $A$  از دو نقطه ثابت  $B$  و  $C$  مقدار ثابت  $2p - a$  است یک بیضی با کانونهای  $B$  و  $C$  (برای بیضی) رسم می کنیم تا طول محله بزرگ آن  $2p - a$  باشد، نقطه  $A$  در بیضی است

۳- در خط برای  $BC$  دو نیمه نامیده  $h_a$  از آن رسم می کنیم، محل برخورد این دو خط با بیضی نقطه  $A$  است که  $A$  را می بینیم





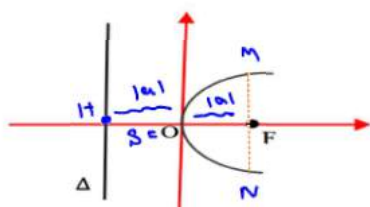


**سهمی**

سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله این نقاط از یک نقطه ثابت به نام کانون برابر فاصله این نقاط از یک خط به نام خط هادی است.

**انواع سهمی**

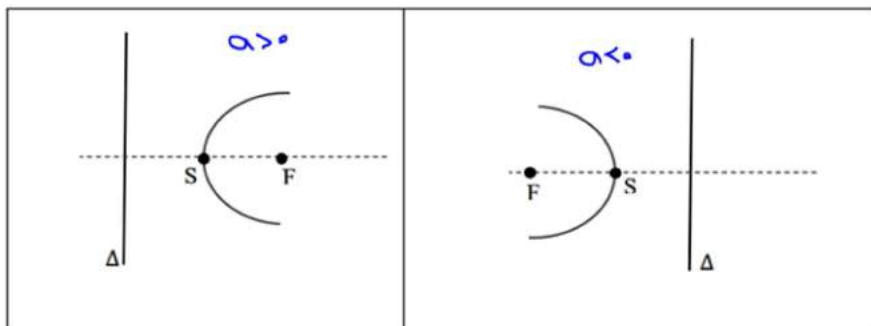
- ۱- سهمی افقی: اگر پاره خط  $SF$  موازی محور  $x$  باشد، سهمی را افقی گوئیم.
- ۲- سهمی قائم: اگر پاره خط  $SF$  موازی محور  $y$  باشد، سهمی را قائم گوئیم.



**حالت خاص:** سهمی افقی و مرکز سهمی روی مبدا مختصات

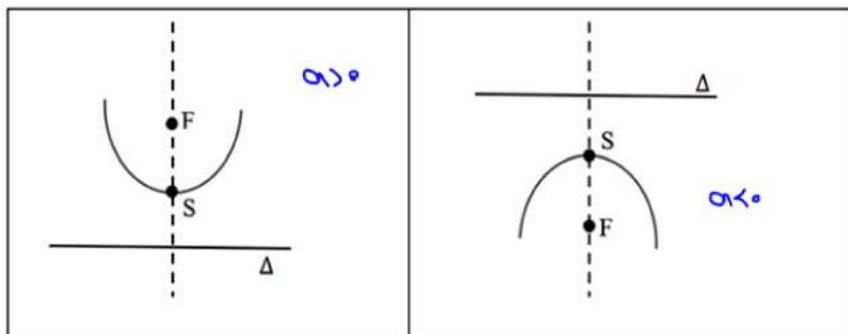
$SF = SH = |a|$       $FH = 2|a|$   
 $MN = 4a$  (مترکز)

**سهمی افقی**



$S(\alpha, \beta)$       $F(\alpha + a, \beta)$   
 $\Delta: y = \beta$       $\Delta: m = \alpha - a$   
 $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$

**سهمی قائم**



$S(\alpha, \beta)$       $F(\alpha, \beta + a)$   
 $\Delta: y = \beta - a$       $\Delta: x = \alpha$   
 $(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$

### فرم گسترده معادله سهمی افقی

اگر یک معادله سهمی افقی باز شود به صورت  $Ay^2 + By + Cx + D = 0$  است که برای بدست آوردن متغیرهای سهمی به صورت زیر عمل می کنیم.

بدست آوردن  $\beta$ : از  $n$  ها مستقیماً بگیریم و حاصل را برابر منفی قدری دهیم جواب  $n$  همان  $B$  است.

بدست آوردن  $\alpha$ :  $B$  را جای  $n$  قدری دهیم و معادله را حل می کنیم، جواب  $n$  همان  $\alpha$  است.

$$\alpha = \frac{-C}{4A}$$

### فرم گسترده معادله سهمی قائم

اگر یک معادله سهمی افقی باز شود به صورت  $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$  است که برای بدست آوردن متغیرهای سهمی به صورت زیر عمل می کنیم.

بدست آوردن  $\alpha$ : از  $n$  ها مستقیماً بگیریم و حاصل را برابر منفی قدری دهیم جواب  $n$  همان  $\alpha$  است.

بدست آوردن  $\beta$ :  $\alpha$  را جای  $n$  قدری دهیم جواب  $n$  همان  $B$  است.

$$\alpha = \frac{-C}{4A}$$

مراحل بلافاصله پس از آنکه بعد از یافتن اول معادله سهمی را بنویسید  
پس  $\alpha, \beta, \gamma$  را مشخص کنید

۱۱	معادله سهمی را بنویسید که $F(1, -2)$ کانون و $S(1, 2)$ راس آن باشد، سپس معادله خط هادی آن را بنویسید.	۱/۲۵
----	---	------

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ B = 2 \\ \alpha = -4 \end{cases}$$

قائم: نخ سبی

$$S(\alpha, \beta) = (1, 2) \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2$$

$$F(\alpha, \beta + \alpha) = (1, -2) \Rightarrow \beta + \alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -4$$

$$\text{معادله سهمی: } (x - \alpha)^2 = 4\alpha(y - \beta) \Rightarrow (x - 1)^2 = -16(y - 2)$$

۲	سهمی $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$ مفروض است. الف) مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را بدست آورید. ب) نمودار آن را رسم کنید.	۱۰
---	--	----

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ B = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

افقی: نخ سبی

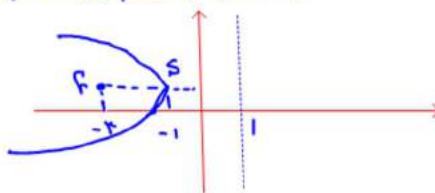
$$(y - 1)^2 = -4(\alpha + 1)$$

$$(y - B)^2 = 4\alpha(n - \alpha)$$

$$\Delta: \alpha = 2 - \alpha \Rightarrow \alpha = 1$$

$$S(\alpha, \beta) \Rightarrow S(-1, 1)$$

$$F(\alpha + \alpha, \beta) \Rightarrow F(-2, 1)$$



یک نویسی

یک نویسی

$$2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$1 - 2 + 8x + 9 = 0 \Rightarrow 8x = -8 \Rightarrow x = -1$$

$$\alpha = \frac{-C}{4A} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$(y - B)^2 = 4\alpha(n - \alpha)$$

1/25	اگر نقطه $A(2,3)$ رأس سهمی و $y=7$ معادله خط هادی سهمی باشد. الف) معادله سهمی را بنویسید. ب) مختصات کانون سهمی را به دست آورید.	12	سهمی
------	---	----	------

نقطه:  $\begin{cases} \alpha=2 \\ B=3 \\ \alpha=-4 \end{cases}$

$$A(\alpha, B) = (2, 3) \Rightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ B=3 \end{cases}$$

$$\therefore y = B - \alpha \Rightarrow 7 = 3 - \alpha \Rightarrow \alpha = -4$$

$$(n - \alpha)^2 = 4\alpha(y - B) \Rightarrow (n - 2)^2 = -16(y - 3)$$

$$F(\alpha, B + \alpha) \Rightarrow F(2, -1)$$

1/25	سهمی $y^2 = 4x - 4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع 3 واحد دایره ای رسم می کنیم. معادله دایره را بنویسید و سپس مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.	11	دایره
------	---	----	-------

نقطه:  $\begin{cases} \alpha=1 \\ B=0 \\ \alpha=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} y^2 = 4(n - 1) \\ (y - B)^2 = 4\alpha(n - \alpha) \end{cases} \rightarrow 4\alpha = 4 \rightarrow \alpha = 1$$

دایره:  $\begin{cases} O(2, 0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ B=0 \end{cases} \\ R=3 \end{cases}$

$$F(\alpha + \alpha, B) \Rightarrow F(2, 0)$$

$$\text{معادله دایره: } (n - \alpha)^2 + (y - B)^2 = R^2 \Rightarrow (n - 2)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 9 - (n - 2)^2$$

$$4n - 4 = 9 - (n - 2)^2 \Rightarrow 4n - 4 = 9 - n^2 + 4n - 4 \Rightarrow n^2 = 9 \Rightarrow n = \pm 3$$

$$n = 3 \Rightarrow y^2 = 4(3) - 4 = 8 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{2} \quad A(3, 2\sqrt{2}) \quad B(3, -2\sqrt{2})$$

$$n = -3 \Rightarrow y^2 = 4(-3) - 4 \Rightarrow y^2 = -20 \quad \text{غیرممکن}$$

2	سهمی $x^2 = 2y - 4x$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و مختصات نقطه برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.	10	فرکانس خارج از کانون داخلی
---	--	----	----------------------------------

نقطه:  $\begin{cases} \alpha=-2 \\ B=-2 \\ \alpha=1/2 \end{cases}$

$$x^2 + 4n = 2y \Rightarrow x^2 + 4n + 4 = 2y + 4 \Rightarrow (x + 2)^2 = 2(y + 2)$$

$$4\alpha = 2 \rightarrow \alpha = 1/2$$

$$S(\alpha, B) = (-2, -2)$$

$$F(\alpha, B + \alpha) \Rightarrow F(-2, -3/2)$$

$$n = 0 \rightarrow 0 = 2y - 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$y = 0 \rightarrow x^2 = 0 - 4n \Rightarrow x^2 + 4n = 0 \Rightarrow n(n + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = -2 \end{cases} \quad (2, 0)$$

۲/۵	الف) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی $x^2 - 4y + 8x = 0$ را به دست آورید. ب) نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.	۱۲	فرداد ۹۹
-----	--	----	----------

**پایه:**

$$P_n = 0 \rightarrow 2m + 8 = 0 \rightarrow m = -4$$

$$16 - 4y - 32 = 0 \rightarrow -16 = 4y \Rightarrow y = -4$$

$$x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$a = \frac{c}{4A} = \frac{4}{4(1)} = 1$$

**کانون:**

$$(x+4)^2 = 4(y+4)$$

$$(x-a)^2 = 4a(y-B)$$

$$S(x, B) = (-4, -4)$$

$$P(x, B+a) = (-4, -2)$$

$$\Delta: y = B - a \Rightarrow y = -5$$

$x=0 \rightarrow -4y=0 \rightarrow y=0$  (0,0)  
 $y=0 \rightarrow x^2 + 8x = 0 \rightarrow x(x+8) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-8 \end{cases}$  (-8,0)

۰/۲۵	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. ت) سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک ..... ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.	۱	سعدی ۹۹
------	--	---	---------

نقطه بنام کانون

۱/۲۵	مختصات کانون، رأس و معادله خط هادی سهمی به معادله $y^2 - 6y + 16x + 25 = 0$ را تعیین کنید.	۱۱	سعدی ۹۹
------	--	----	---------

**پایه:**

$$P_y = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 = B$$

$$9 - 12 + 16m + 25 = 0 \Rightarrow 19 = -16m \Rightarrow m = -1$$

$$a = \frac{c}{4A} = \frac{-16}{4} = -4$$

**کانون:**

$$(y-3)^2 = -16(x+1)$$

$$(y-B)^2 = 4a(x-a)$$

$$S(x, B) = S(-1, 3)$$

$$P(x+a, B) = P(-5, 3)$$

$$\Delta: y = x - a \rightarrow y = 3$$

۱/۲۵	معادله سهمی را بنویسید که رأس $A(4, 6)$ و $y = 3$ معادله خط هادی آن باشد.	۱۲	سعدی ۹۹
------	---	----	---------

**کانون:**

$$A(x, B) = (4, 6) \rightarrow a = 4, B = 6$$

$$\Delta: y = B - a \Rightarrow 3 = 6 - a \Rightarrow a = 3$$

$$(x-a)^2 = 4a(y-B) \Rightarrow (x-4)^2 = 12(y-6)$$

0/25	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. پ) راس سهمی به معادله $x^2 + 2x - 2y^2 = 0$ نقطه به مختصات ..... است.	1	دوره 99
------	---	---	---------

$$f'_y = 0 \rightarrow 2y - 2 = 0 \rightarrow y = 1 = \beta \quad 1 + 2m - 2 = 0 \rightarrow 2m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{2} \quad S\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

1/25	معادله سهمی را بنویسید که رأس $A(1, 2)$ و $F(1, -2)$ کانون آن باشد. سپس معادله خط هادی آن را بیابید.	12	دوره 99
------	--	----	---------

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ a = -4 \end{cases}$$

قائم: نوعی

$$A(\alpha, \beta) = (1, 2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

$$F(\alpha, \beta + a) = (1, -2) \Rightarrow \beta + a = -2 \rightarrow a = -4$$

$$(m - \alpha)^2 = 4a(y - \beta) \Rightarrow (m - 1)^2 = -16(y - 2)$$

$$\Delta: y = \beta - a = y = 6$$

معادله سهمی به رأس  $A(2, 1)$  و کانون  $F(2, 5)$  را بیابید و معادله خط هادی آن را بنویسید.

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \\ a = 4 \end{cases}$$

قائم: نوعی

$$A(\alpha, \beta) = (2, 1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$F(\alpha, \beta + a) = (2, 5) \Rightarrow \beta + a = 5 \Rightarrow a = 4$$

$$(m - \alpha)^2 = 4a(y - \beta) \Rightarrow (m - 2)^2 = 16(y - 1)$$

$$\Delta: y = \beta + a = y = 5$$

مختصات کانون و همچنین معادله سهمی را به رأس  $A(4, 6)$  و خط هادی  $x = 9$  بنویسید.

$$\begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 6 \\ a = -5 \end{cases}$$

افقی: نوعی

$$A(\alpha, \beta) = (4, 6) \rightarrow \alpha = 4, \beta = 6$$

$$\Delta: m = \alpha - a \Rightarrow 9 = 4 - a \Rightarrow a = -5$$

$$F(\alpha + a, \beta) = F(-1, 6)$$

$$(y - \beta)^2 = 4a(m - \alpha) \rightarrow \underline{(y - 6)^2 = -20(m - 4)}$$

تمرین کتاب درسی

معادله یک سهمی به صورت  $y = x^2 + 3x + 5$  داده شده است. کانون و خط هادی و محور سهمی را

مشخص نمایید.

$$x^2 + 3x - y + 5 = 0$$

$$F'_x = 0 \rightarrow 2x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{-c}{4a} = \frac{+1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{4}$$

$$(x + \frac{3}{2})^2 = (y - \frac{1}{2})$$

$$(x - \alpha)^2 = 4a(y - B)$$

$$F(\alpha, B+a) = F(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$$

$$\Delta: y = B - a = y = \frac{1}{2}$$

$$\Delta: x = \alpha \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{3}{2} \\ B = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

قانون: نیج سی

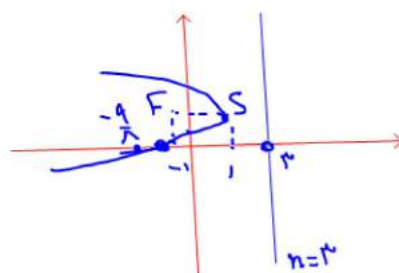
تمرین کتاب درسی

نمودار معادله  $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$  را رسم کنید.

$$y^2 - 2y + 1 = -8x - 8 \Rightarrow (y-1)^2 = -8(x+1)$$

$$(y-B)^2 = 4a(x-\alpha)$$

$$4a = -8 \rightarrow a = -2$$



$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ B = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

اعتقاد: نیج سی

$$S(\alpha, B) = (-1, 1)$$

$$F(\alpha+a, B) = (-3, 1)$$

$$\Delta: x = \alpha - a = x = 1$$

$$y = 0 \rightarrow 8x + 9 = 0 \rightarrow x = -\frac{9}{8}$$

تمرین کتاب درسی

سهمی  $y^2 = 2x - 4y$  مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین

مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

$$y^2 + 4y = 2x \Rightarrow y^2 + 4y + 4 = 2x + 4 \Rightarrow (y+2)^2 = 2(x+2)$$

$$(y-B)^2 = 4a(x-\alpha)$$

$$4a = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

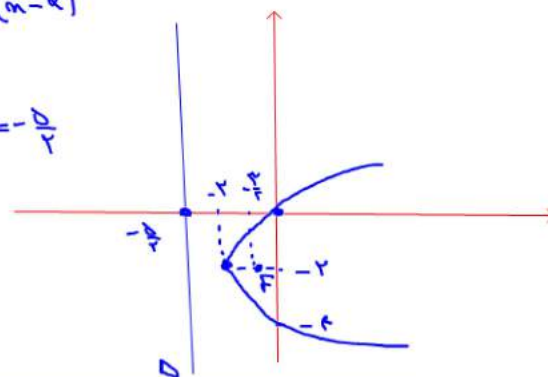
$$\Delta: x = \alpha - a \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} \alpha = -2 \\ B = -2 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

اعتقاد: نیج سی

$$S(\alpha, B) = S(-2, -2)$$

$$F(\alpha+a, B) = (-\frac{3}{2}, -2)$$



$$x = 0 \rightarrow y^2 + 4y = 0 \rightarrow y(y+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\text{نقاط برخورد با محورها: } (0, 0) \quad (0, -4)$$

تمرین کتاب درسی

مختصات رأس و کانون سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) را به دست آورید.

$$\frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{y}{a} - \frac{c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x \Rightarrow \frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{a} + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a} \left(y + \frac{\Delta}{4a}\right)$$

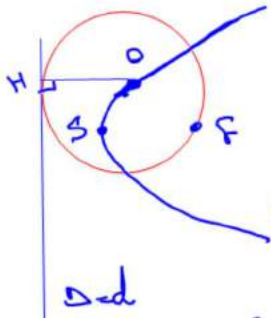
$$4a = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{4a}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{b}{2a} \\ \beta = -\frac{\Delta}{4a} \\ a = \frac{1}{4a} \end{cases}$$

$$S(\alpha, \beta) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \quad P(\alpha, \beta + a) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta + 1}{4a}\right)$$

تمرین کتاب درسی

سهمی  $P$  با کانون  $F$  و خط هادی  $d$  مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از  $F$  بگذرد و بر خط  $d$  مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از  $F$  گذشته و بر  $d$  مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.



چون نقطه  $O$  از کانون و خط هادی به یک فاصله است بنابراین نقطه  $O$  روی سهمی قرار دارد

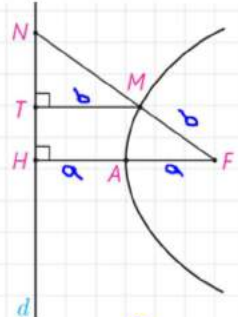
$$\left. \begin{matrix} OF = R \\ OH = R \end{matrix} \right\} \Rightarrow OF = OH = R$$

اگر سهمی با مرکز  $O(0, r)$  و دایره  $C(0, r)$  با مرکز  $O$  و شعاع  $r$  باشد پس  $OF = r$  است چون هر نقطه روی سهمی از کانون و خط هادی به یک فاصله است پس  $OH = r$  که یعنی خط  $d$  به دایره  $C$  مماس است

تعریف سهمی: هر سطحی مکان هندسی نقاطی از آن است که فاصله این نقاط از یک نقطه ثابت به نام کانون برابر فاصله این نقاط از یک خط ثابت (خط هادی) است

تمرین کتاب درسی

در شکل سهمی با رأس  $A$  و کانون  $F$  و خط هادی  $d$  رسم شده است. از  $F$  به نقطه دلخواه  $M$  روی سهمی وصل کرده و امتداد داده ایم تا  $d$  را در  $N$  قطع کند و از نقطه  $M$  بر  $d$  عمود کرده ایم.



ثابت کنید:  $\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$

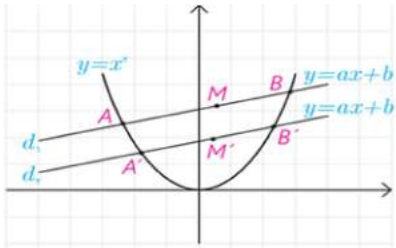
$$S, M \Rightarrow MR = MT = b$$

$$S, A \Rightarrow MR = MH = a \Rightarrow FH = 2a$$

$$\triangle FNH : TM \parallel FH \xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}} \frac{NM}{NF} = \frac{TM}{HR} \Rightarrow \frac{NM}{NF} = \frac{b}{2a} \Rightarrow \frac{NM}{b} = \frac{2a}{2a} \quad (1)$$

$$\triangle FNH : TM \parallel FH \xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}} \frac{NT}{TH} = \frac{NM}{MR} \Rightarrow \frac{NT}{TH} = \frac{NM}{b} \quad (2)$$

$$(1) \cdot (2) \Rightarrow \frac{NM}{2a} \cdot \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{FN}{a} = \frac{2NT}{TH} \xrightarrow{a=FA} \frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$



سهمی  $y = x^2$  و دو خط موازی  $d_1: y = ax + b$  و  $d_2: y = ax + b'$  را که با سهمی متقاطع اند، در نظر بگیرید.

الف) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط  $d_1$  و سهمی  $y = x^2$  باشد.

ب) فرض کنید  $A$  و  $B$  نقاط برخورد خط  $d_1$  و سهمی باشند و نقطه  $M$  وسط پاره خط  $AB$  باشد، مختصات نقطه  $M$  را به دست آورید.

$$x^2 = ax + b \Rightarrow x^2 - ax - b = 0 \quad S = \frac{-b}{a} \Rightarrow S = \frac{a}{1} = a$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{S}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow x_M = \frac{a}{2}$$

پ) مراحل الف) و ب) را با جایگذاری خط  $d_2$  به جای  $d_1$  انجام دهید و مختصات نقطه  $M'$  (نقطه وسط پاره خط حاصل از نقاط تقاطع خط  $d_2$  و سهمی) به دست آورید.

$$x^2 = ax + b' \Rightarrow x^2 - ax - b' = 0 \quad S = \frac{-b'}{a} = \frac{a}{1} = a$$

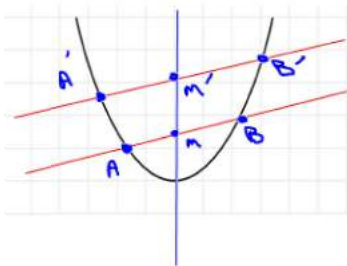
$$x_{M'} = \frac{x_{A'} + x_{B'}}{2} = \frac{S}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow x_{M'} = \frac{a}{2}$$

ت) خط  $MM'$  نسبت به محور  $y$  ها چه وضعی دارد؟

خط  $MM'$ :  $x = \frac{a}{2}$

این خط موازی محور  $y$  ها است

ث) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.



دو خط موازی را طوری رسم می‌کنیم که هر دو سهمی مورد نظر را در ۲ نقطه قطع کنند  
 وسط نقاط  $A$  و  $B$  را  $M$  و وسط نقاط  $A'$  و  $B'$  را  $M'$  می‌نامیم  $M$  و  $M'$  وصل کرده دست‌های هم را می‌زنیم، این خط هم تقارن سهمی است