فصل ۲ : (آشنایی با مقاطع مخروطی)

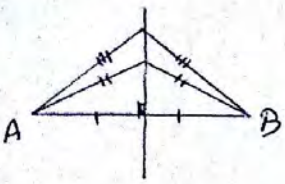
مکان هندسی :

مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه یا فضا است که :

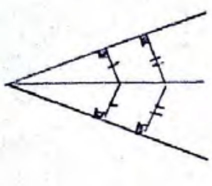
۱) دارای یک ویژگی مشترک باشند.

۲) هر نقطه که این ویژگی مشترک را داشته باشد عضو مجموعه نقاط مورد نظر باشد.

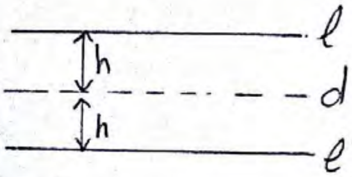
مکان‌های هندسی مهم و معروف :



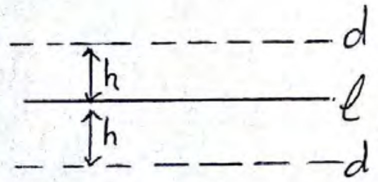
۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله‌اند عمود منصف پاره خط AB است.



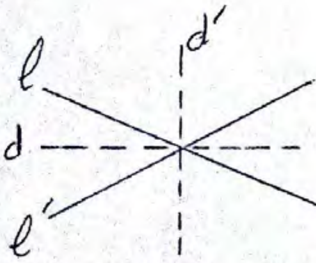
۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه مورد نظر است.



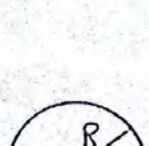
۳) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی به یک فاصله‌اند، خطی است موازی با دو خط و در وسط آنها.



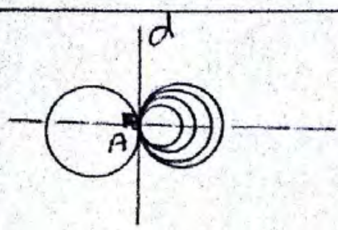
۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط l به فاصله ثابت h باشند دو خط d و d' به موازات l و در طرفین خط l است.



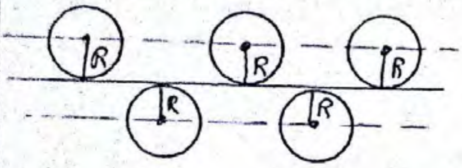
۵) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع l و l' به یک فاصله باشند نیمسازهای زوایای بین l و l' است که برهم عمودند.



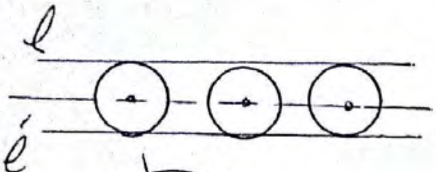
۶) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه معلوم O به فاصله R هستند دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است.



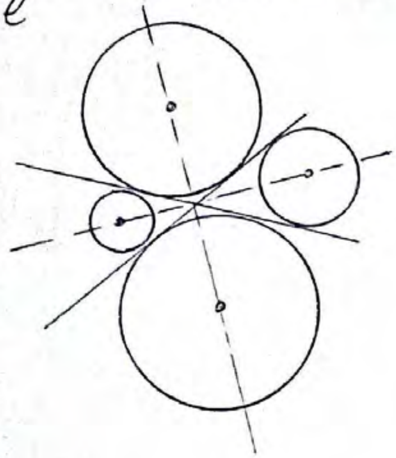
۷) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در نقطه A بر خط d مماس باشند خطی است که در نقطه A بر d عمود است.



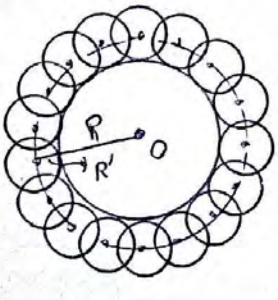
۸) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R که بر خط d مماس‌اند (روی خط d می‌غلتند) دو خط به موازات d و به فاصله R از آن است که از مراکز دایره‌ها می‌گذرد.



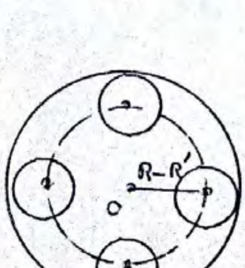
۹) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو خط موازی l و l' مماس‌اند خطی است موازی با l و l' و در وسط آنها که از مرکز دایره‌ها می‌گذرد



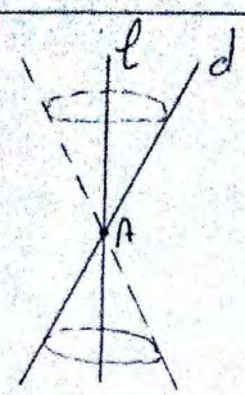
۱۰) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو خط l و l' مماس‌اند نیمسازهای زوایای بین دو خط l و l' است.



۱۱) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R' که روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع R و در خارج آن می‌غلتند (دو دایره مماس خارج‌اند) دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $R+R'$



۱۲) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R' که روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع R و در داخل آن می‌غلتند (دو دایره مماس داخل‌اند) دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $R-R'$

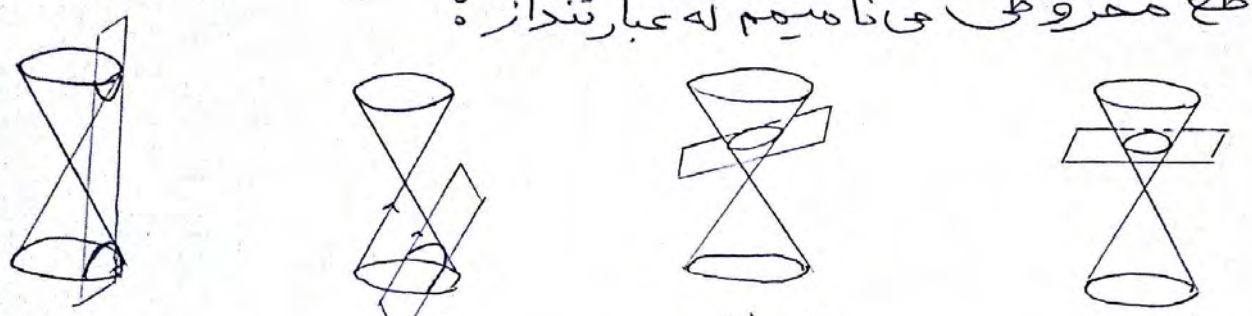


رویهٔ مخروطی:

اگر دو خط d و l در نقطه A متقاطع باشند سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی) می‌گویند. نقطه A را رأس، خط l را محور و خط d را مولد سطح مخروطی می‌نامند.

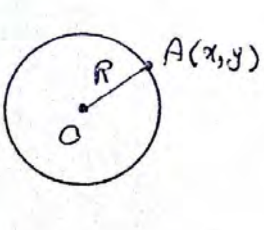
مقاطع مخروطی:

از برخورد یک صفحه با رویهٔ مخروطی اشکالی بدست می‌آید که آنها را مقاطع مخروطی می‌نامیم که عبارتند از:



۱) دایره ۲) بیضی ۳) سهمی ۴) هذلولی

دایره:



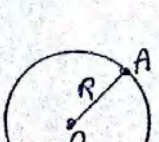
دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت به نام مرکز به فاصله ثابت (شعاع) هستند.

معادله استاندارد (کلاسیک) دایره:

معادله دایره‌ای که مرکزش نقطه $O\Big|^{\alpha}_{\beta}$ و شعاعش برابر R باشد از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2}$$

اثبات:



$O\Big|^{\alpha}_{\beta}$ $\quad$ $A\Big|^{x}_{y}$

$$OA=R \Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=R$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

مثال ۱: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطه $O\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$ و شعاع آن برابر ۲ باشد.

$O\left|\begin{matrix}-2 \rightsquigarrow \alpha\\3 \rightsquigarrow \beta\end{matrix}\right.$ $\quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

$R=2 \quad \Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=4$

مثال ۲: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ بوده و $A(3,-1)$ نقطه‌ای از آن باشد.

$$R=OA=\sqrt{(1-3)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=13$$

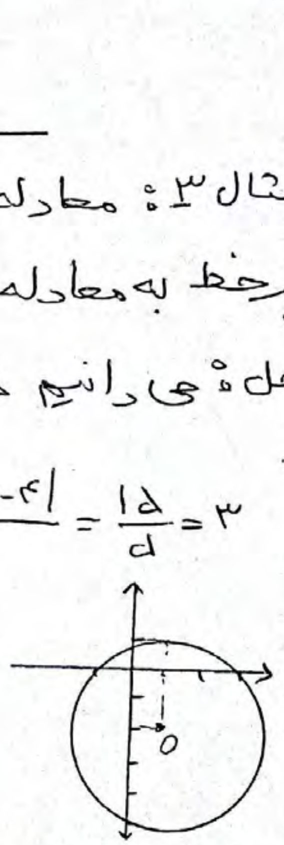
مثال ۳: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطه $O\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$ بوده و بر خط به معادله $-3x+4y=4$ مماس باشد، سپس آن را رسم کنید.

حل: می‌دانیم فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر شعاع دایره است.

$O\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$ $\qquad R=OH=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|-3(1)+4(-2)-4|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\dfrac{15}{5}=3$

خط مماس: $-3x+4y-4=0$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=9$$



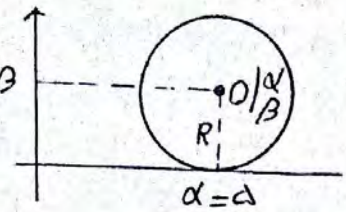
مثال ۴: مکان هندسی نقاطی مانند $M(x,y)$ را پیدا کنید که فاصله آنها از نقطه $A\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$ ، $\sqrt{2}$ برابر فاصله آنها از نقطه $B\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ باشد.

$$AM=\sqrt{2}\,BM \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=2\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right] \Rightarrow x^2+y^2=10 \Rightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=(\sqrt{10})^2$$

مکان مطلوب، دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و به شعاع $\sqrt{10}$ است

مثال ۵) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن روی خط $x=y+2$ بوده و در نقطه ای به طول ۵ بر محور طولها مماس باشد (هماهنگ ۸۶-دیماه)

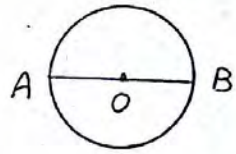


$O\begin{vmatrix}\alpha=5\\ \beta=R\end{vmatrix} \quad O\in x=y+2 \Rightarrow 5=R+2 \Rightarrow \boxed{R=3}$

$O\begin{vmatrix}5\\ 3\end{vmatrix} \;,\; R=3 \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

$\Rightarrow (x-5)^2+(y-3)^2=9$

مثال ۶) معادله دایره ای را بنویسید که نقاط $A\begin{vmatrix}1\\ -1\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}3\\ 3\end{vmatrix}$ دو سر قطری از دایره باشند.



وسط AB $\;O\left|\begin{array}{l}\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{1+3}{2}=2\\[2ex] \dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{-1+3}{2}=1\end{array}\right. \Rightarrow O\begin{vmatrix}2\\ 1\end{vmatrix}$

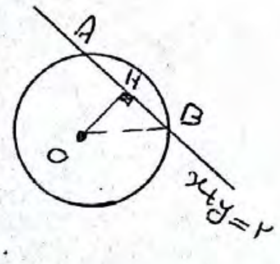
$R=OA=\sqrt{(2-1)^2+(1+1)^2}$

$\Rightarrow \boxed{R=\sqrt{5}}$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=5$

مثال ۷) معادله دایره ای را بنویسید که $O\begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix}$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.



حل: می دانیم عمودی که از مرکز دایره بر وتر آن رسم می شود، آن وتر را نصف می کند:

$AB=2\sqrt{2} \Rightarrow BH=\sqrt{2}$

$OH=\dfrac{|0+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad OB^2=OH^2+BH^2 \Rightarrow R^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2=\dfrac{5}{2}$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-0)^2+(y-1)^2=\dfrac{5}{2}$

مثال ۸) معادله دایره ای را بنویسید که از دو نقطه $A(1,-2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و مرکزش روی خط $y=2x$ باشد.

$O\in y=2x \Rightarrow O\begin{vmatrix}\alpha\\ 2\alpha\end{vmatrix} \qquad OA=OB \Rightarrow \sqrt{(\alpha-1)^2+(2\alpha+2)^2}=\sqrt{(\alpha-3)^2+(2\alpha)^2}$

$\Rightarrow \alpha^2-2\alpha+1+4\alpha^2+8\alpha+4=\alpha^2-6\alpha+9+4\alpha^2 \Rightarrow 6\alpha+5=-6\alpha+9 \Rightarrow 12\alpha=4$

$\Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{1}{3}} \Rightarrow O\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \qquad R=OA=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{2}{3}+2\right)^2}=\sqrt{\frac{68}{9}}$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{68}{9}$

معادله گسترده دایره (معادله ضمنی):

اگر معادله استاندارد دایره را باز کنیم معادله ضمنی یا گسترده دایره بصورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$$

که در آن: مختصات مرکز $= O=\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ ، شعاع $= R=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}$

مثال) مرکز و شعاع دایره $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ را بدست آورید.

$a=-4$
$b=-4$
$c=7$

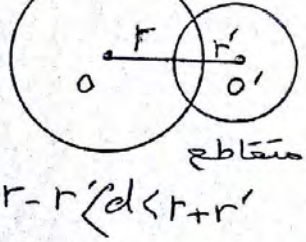
$$O\left|\begin{array}{l} -\frac{a}{2}=-\frac{-4}{2}=2 \\ -\frac{b}{2}=-\frac{-4}{2}=2 \end{array}\right.$$

$$R=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\sqrt{\frac{(-4)^2+(-4)^2-4(7)}{4}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$$

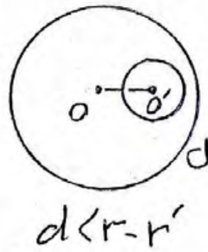
یادآوری (هندسه ۲):

فاصله مراکز دو دایره = خط المرکزین $= OO' = d$

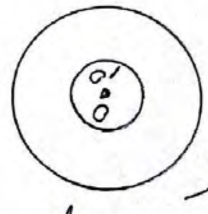
وضعیت دو دایره نسبت بهم:



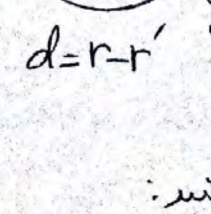
$r-r' < d < r+r'$



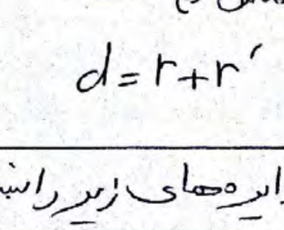
$d < r-r'$



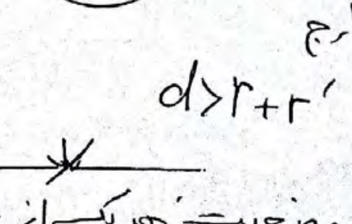
$d=0$



$d=r-r'$



$d=r+r'$



$d>r+r'$

مثال) وضعیت هر یک از جفت دایره های زیر را نسبت بهم مشخص کنید.

الف) $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ و $x^2+y^2-10x-14y+73=0$

$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)=(2,3)$ $\quad r=\sqrt{\frac{(-4)^2+(-6)^2-4(-3)}{4}}=\sqrt{\frac{64}{4}}=\sqrt{16}=4$

$O' = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (5,7)$ $\quad r' = \sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}} = \sqrt{\frac{(-10)^2+(-14)^2-4(73)}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$d = OO' = \sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ $\quad \begin{cases} d = 5 \\ r+r' = 4+1 = 5 \end{cases} \Rightarrow d = r+r' \Rightarrow$ دو دایره مماس مشترک خارجی اند

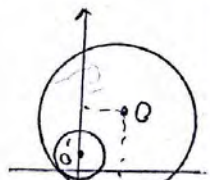
ب) $x^2+y^2=9$ و $x^2+y^2-2x+2y+1=0$

$O(0,0)\ ,\ r=3$ $\quad O'(1,-1)$ $\quad r' = \sqrt{\frac{(-2)^2+(2)^2-4(1)}{4}} = 1$

$d = OO' = \sqrt{(1-0)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{2}$ $\quad \begin{cases} d = \sqrt{2} \\ r+r' = 3+1 = 4 \\ r-r' = 3-1 = 2 \end{cases}$ $\quad d < r-r' \Rightarrow$ دو دایره متداخل

مثال) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(0,1)$ بوده و با دایره $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس داخل باشد.

$O'(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (2,3)$ $\quad r' = \sqrt{\frac{(-4)^2+(-6)^2-4(-3)}{4}} = \sqrt{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = 4$



$d = OO' = \sqrt{(0-2)^2+(1-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$d = |r-r'| \Rightarrow |r-4| = 2\sqrt{2} \Rightarrow r-4 = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow r = \pm 2\sqrt{2}+4$

$\Rightarrow (x-0)^2+(y-1)^2 = (4\pm 2\sqrt{2})^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2y-23-16\sqrt{2}=0 \\ x^2+y^2-2y-23+16\sqrt{2}=0 \end{cases}$

چون مرکز دو دایره می‌تواند درون دایره دوم قرار داشته باشد مسئله ۲ جواب دارد

مثال) وضعیت خط به معادله $x+y=4$ و دایره $x^2+y^2-2y-3=0$ را تعیین کنید

فاصله مرکز دایره تا خط را پیدا می‌کنیم

$O \begin{cases} -\frac{a}{2} = -\frac{-2}{2} = 1 \\ -\frac{b}{2} = -\frac{0}{2} = 0 \end{cases}$ $\quad R = \sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}} = \sqrt{\frac{(-2)^2+0^2-4(-3)}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$

$OH = \frac{|1+0-4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\quad OH > r \Rightarrow$ خط خارج دایره است و نقطه برخوردی ندارند.

شرط دایره بودن معادله گسترده:

برای اینکه معادله گسترده $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله یک دایره باشد باید:

۱) ضریب x^2 و ضریب y^2 برابر باشند (در موقع استفاده از فرمولهای مرکز و شعاع در معادله گسترده ضرایب x^2 و y^2 برابر یک باشد)

۲) $a^2+b^2-4c>0$ (زیر رادیکال باید مثبت باشد).

مثال) در تساوی $mx^2+5y^2+20x-10y+n+1=0$ مقادیر m و n را چنان بیابید که معادله دایره باشد:

ضرایب x^2 و y^2 باید برابر باشند $\Rightarrow \boxed{m=5} \Rightarrow 5x^2+5y^2+20x-10y+n+1=0$

$$\xrightarrow{\div 5} x^2+y^2+4x-2y+\frac{n+1}{5}=0$$

$$a^2+b^2-4c>0 \Rightarrow 16+4-4\left(\frac{n+1}{5}\right)>0 \Rightarrow 20>4\left(\frac{n+1}{5}\right) \Rightarrow 5>\frac{n+1}{5}$$

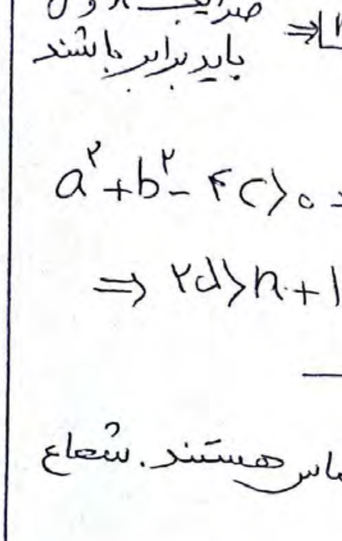
$$\Rightarrow 25>n+1 \Rightarrow \boxed{n<24}$$

(کنکور ریاضی ۹۵)

دو دایره گذرا بر نقطه $(2,-9)$ بر هر دو محورهای مختصات مماس هستند. شعاع دایره بزرگتر کدام است؟

۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۱۷
۴) ۱۹

حل) گزینه (۳) نقطه $(2,-9)$ در ناحیه چهارم است پس دو دایره در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس اند:



$O\left|\begin{matrix}R\\-R\end{matrix}\right.$

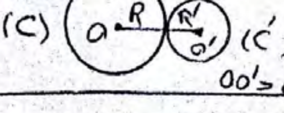
$$(x-R)^2+(y+R)^2=R^2 \Rightarrow (2,-9)\in C$$

$$\Rightarrow (2-R)^2+(-9+R)^2=R^2 \Rightarrow R^2-22R+85=0$$

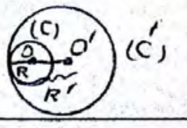
$$\Rightarrow (R-17)(R-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} R=5 & \text{شعاع دایره کوچک} \\ R=17 & \text{شعاع دایره بزرگ} \end{cases}$$

مثال) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش $O'(5,7)$ بوده و بر دایره $C: x^2+y^2-4x-6y+4=0$ مماس باشد.

حل: دایره مورد نظر را $C'(O',R')$ در نظر می‌گیریم دو حالت داریم:



$OO'=d=R+R'$



$OO'=d=R'-R$

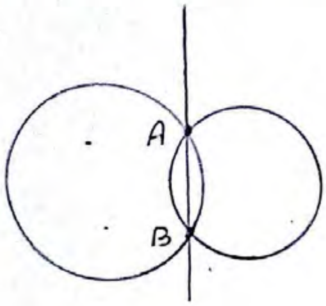
$$C: x^2+y^2-4x-6y+4=0 \Rightarrow O\left|\begin{array}{l} -\frac{a}{2}=2 \\ -\frac{b}{2}=3 \end{array}\right. \qquad R=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=3$$

$$d=OO'=\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$d=R'+R \Rightarrow 5=R'+3 \Rightarrow R'=2 \Rightarrow C': (x-5)^2+(y-7)^2=4$$

$$d=R'-R \Rightarrow 5=R'-3 \Rightarrow R'=8 \Rightarrow C': (x-5)^2+(y-7)^2=64$$

وتر مشترک دو دایره:



اگر دو دایره همدیگر را در دو نقطه A و B قطع کنند به پاره خط AB وتر مشترک دو دایره می‌گوییم برای بدست آوردن معادله وتر مشترک، کافی است معادله دو دایره را از هم کم کنیم (زیرا مختصات A و B در معادله دو دایره صدق می‌کنند پس در تفاضل آنها هم صدق می‌کنند)

مثال) معادله وتر مشترک دو دایره $C: x^2+y^2-2x+y+1=0$ و $C': x^2+y^2-y-1=0$ را بنویسید و سپس مختصات محل تلاقی دو دایره و طول وتر مشترک را بیابید.

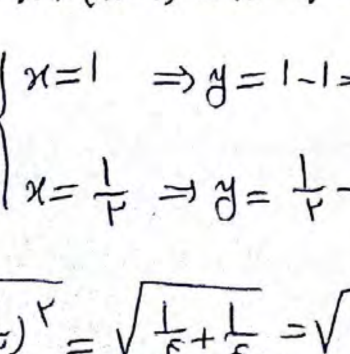
$$C-C'=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x+y+1-x^2-y^2+y+1=0 \Rightarrow -2x+2y+2=0$$

$$\xrightarrow{\div(-2)} \boxed{x-y-1=0}$$ معادله وتر مشترک

$$\begin{cases} x-y-1=0 \Rightarrow y=x-1 \\ C': x^2+y^2-y-1=0 \Rightarrow x^2+(x-1)^2-(x-1)-1=0 \Rightarrow x^2+x^2-2x+1-x+1-1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^2-3x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=1-1=0 \Rightarrow A(1,0) \\ x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2} \Rightarrow B(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$AB=\sqrt{(1-\tfrac{1}{2})^2+(0+\tfrac{1}{2})^2}=\sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ طول وتر مشترک



هماهنگ ـ شهریور ۹۹)

معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(3,1)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادله $4x+3y+5=0$ مماس باشد (۱,۲۵ نمره)

$$R=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|4(3)+3(1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{20}{5}=4$$

$O\begin{vmatrix}3\\1\end{vmatrix}$ $\quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=16$

$R=4$

(هماهنگ شهریور ۹۹)

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ باشد و با دایره به معادله $x^2+y^2-8x+4y+16=0$ مماس داخل باشد (۲ نمره)

$$O'\begin{vmatrix}-\frac{a}{2}=-\frac{-8}{2}=4\\-\frac{b}{2}=-\frac{4}{2}=-2\end{vmatrix} \Rightarrow O'\begin{vmatrix}4\\-2\end{vmatrix} \qquad r'=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\sqrt{\frac{(-8)^2+4^2-4(16)}{4}} \Rightarrow \boxed{r'=2}$$

$$OO'=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

$$|r-r'|=OO' \Rightarrow |r-2|=5 \Rightarrow \begin{cases} r-2=5 \Rightarrow \boxed{r=7} & \text{ق ق} \\ r-2=-5 \Rightarrow r=-3 & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$O\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix},\ r'=2 \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(r')^2$$

$$\Rightarrow (x-0)^2+(y-1)^2=2^2$$

$$\Rightarrow x^2+(y-1)^2=4$$

(تمرینات صفحه ۴۶ کتاب درسی)

۱) معادله دایره‌ای را بنویسید که:

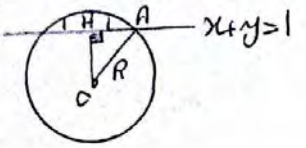
الف) $O(1,1)$ مرکز آن و $A(3,2)$ نقطه‌ای از آن باشد.

$OA=R=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$ $(x-1)^2+(y-1)^2=5$

ب) $O(2,1)$ مرکز آن بوده و بر خط $3x+4y=0$ مماس باشد.

$R=OH=\frac{|3(2)+4(1)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$ $(x-2)^2+(y-1)^2=4$

پ) $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=1$ وتری به طول ۲ ایجاد کند:



$OH=\frac{|(-1)+(-1)-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$ $R^2=1^2+\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2=1+\frac{9}{2}=\frac{11}{2}$

$(x+1)^2+(y+1)^2=\frac{11}{2}$

ت) خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد

حل: محل برخورد قطرها همان مرکز دایره است

$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=2 \\ y=-1 \end{matrix} \Rightarrow O\Big|_{-1}^{2}$ $OH=R=\frac{|4(2)+3(-1)-6|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{1}{5}$ $(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{1}{25}$

ج) از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

$O\in y=2x-1 \Rightarrow O\Big|_{2x-1}^{x}$ $OA=OB \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(2x-1-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(2x-1-0)^2}$

$\Rightarrow x^2-2x+1+4x^2-12x+9=x^2-6x+9+4x^2-4x+1 \Rightarrow x=0 \Rightarrow O\Big|_{-1}^{0}$

$R=OA=\sqrt{(1-0)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{10}$ $(x-0)^2+(y+1)^2=10$

---

۲) حدود a را طوری بدست آورید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادله یک دایره باشد.

$\underbrace{x^2-3x+\frac{9}{4}}-\frac{9}{4}+\underbrace{y^2+5y+\frac{25}{4}}-\frac{25}{4}+a=0 \Rightarrow (x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{5}{2})^2=\frac{34}{4}-a$

$\frac{34}{2}-a\geq 0 \Rightarrow \frac{34}{4}\geq a$

---

۳) وضعیت هر یک از نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,-2)$ و $C(2,3)$ و $D(4,-1)$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ تعیین کنید.

$O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(1,-2)$ $R=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\sqrt{10}$

$OA=\sqrt{(-1-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{5}<\sqrt{10}$ نقطه A داخل دایره $OB=\sqrt{(1-1)^2+(-2+2)^2}=0<\sqrt{10}$ نقطه B مرکز دایره

به همین ترتیب $OC=\sqrt{26}>\sqrt{10}$ خارج دایره و $OD=\sqrt{10}=\sqrt{10}$ روی دایره است.

۴) وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت بهم مشخص کنید:

الف) $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2-2x=4$

$O(0,0)$, $R=2$ $\qquad$ $O'(1,0)$, $R'=\sqrt{5}$

$OO'=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2}=1$ $\qquad$ $R-R'<OO'<R+R' \Rightarrow$ دو دایره در دو نقطه متقاطع

ب) $x^2+(y-1)^2=1$ و $(x-1)^2+y^2=1$

$O(0,1)$, $R=1$ $\qquad$ $O'(1,0)$, $R'=1$

$OO'=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$ $\qquad$ $R-R'<OO'<R+R' \Rightarrow$ دو دایره در دو نقطه متقاطع

ج) $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$

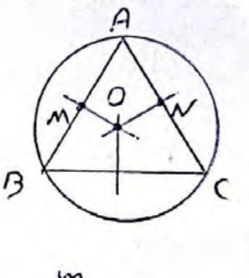
$O(0,0)$, $R=1$ $\qquad$ $O'\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $R'=2$

$OO'=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-0\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{2}+\frac{9}{2}}=3=R+R' \Rightarrow$ دو دایره مماس خارج

به همین ترتیب قسمت (د) دو دایره متخارج اند.

۵) نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث $A\hat{B}C$ هستند معادله دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید

حل: مرکز دایره محیطی مثلث محل برخورد عمود منصف اضلاع مثلث است.



وسط AB: $M\left|\begin{matrix}\frac{-1+1}{2}=0\\ \frac{-1+1}{2}=0\end{matrix}\right.$ $\qquad$ شیب $AB=\frac{-1-1}{-1-1}=1 \xrightarrow{\text{قرینه}} -1 \xrightarrow{\text{معکوس}} -1$

$m_{\text{عمود منصف } AB}=-1 \Rightarrow y-0=-1(x-0)\Rightarrow \boxed{y=-x}$

وسط AC: $N\left|\begin{matrix}\frac{-1+1}{2}=0\\ \frac{-1-3}{2}=-2\end{matrix}\right.$ $\qquad$ شیب $AC=\frac{-1-(-3)}{-1-1}=\frac{2}{-2}=-1 \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} 1 \Rightarrow m_{\text{عمود منصف } AC}=1$

$\Rightarrow y-(-2)=1(x-0)\Rightarrow \boxed{y=x-2}$

$\begin{cases} y=x-2\\ y=-x\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=1\\ y=-1\end{matrix} \Rightarrow O\left|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right.$ $\quad R=OA=\sqrt{(-1-1)^2+(-1-(-1))^2}=2 \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=4$

۶) وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت بهم مشخص کنید:

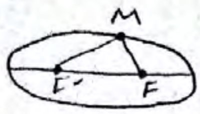
الف) $3x+4y=0$, $x^2+y^2-4x-4y+7=0$

$O(2,2)$, $R=1$ $\qquad$ فاصله O تا خط $=OH=\frac{|3(2)+4(2)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{14}{5}>R \Rightarrow$ خط دایره را قطع نمی‌کند

قسمت (ب) و (ج) مانند الف حل می‌شود.

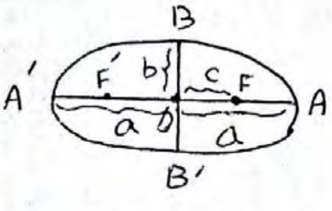
بیضی :

بیضی مکان هندسی نقاطی است مانند M که مجموع فواصل نقطه M از دو نقطه ثابت F و F′ داخل بیضی مقدار ثابت ۲a است که این مقدار ثابت را قطر بزرگ بیضی می نامند.



$MF + MF' = 2a =$ طول قطر بزرگ

احزاء بیضی :



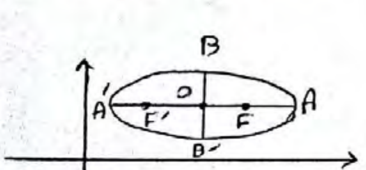
۱) دو نقطه F و F′ داخل بیضی را کانونهای بیضی می نامند و فاصله آنها را فاصله کانونی نامیده و با $FF' = 2c$ نشان می دهیم.

۲) $AA' = 2a$ را قطر بزرگ بیضی و $BB' = 2b$ را قطر کوچک بیضی نامیده که همان دو محور تقارن بیضی است و محل برخورد آنها یعنی O را مرکز بیضی می نامند که همان مرکز تقارن بیضی است.

۳) به مقدار ثابت $e = \frac{c}{a}$ که $0 < e < 1$ است خروج از مرکز بیضی می گوئیم که همواره مثبت است. اگر e به عدد 1 نزدیک شود بیضی کشیده تر و هر قدر e به صفر نزدیکتر شود بیضی به دایره نزدیکتر می شود.

معادلات بیضی :

۱) بیضی افقی : اگر قطر بزرگ بیضی هم راستا با محور xها و قطر کوچک آن هم راستا با محور yها باشد بیضی را افقی می نامند.



که دارای ویژگی های زیر است :

قطر بزرگ $= AA' = 2a$ قطر کوچک $= BB' = 2b$

فاصله کانونی $= FF' = 2c$ مرکز بیضی $= O\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ $a > b > 0$

$a > c$

رابطه بین a و b و c : $c^2 = a^2 - b^2$ خروج از مرکز بیضی $= e = \frac{c}{a}$

A و A′ را رئوس کانونی (در امتداد کانونها هستند) و B و B′ را رئوس غیر کانونی (در امتداد کانونها نیستند) می نامند.

$B'(\alpha, \beta - b)$ ، $B(\alpha, \beta + b)$ ، $A'\left|\begin{matrix}\alpha - a\\ \beta\end{matrix}\right.$ ، $A\left|\begin{matrix}\alpha + a\\ \beta\end{matrix}\right.$

مختصات کانونها : $\begin{cases} F\left|\begin{matrix}\alpha + c\\ \beta\end{matrix}\right. \\ F'\left|\begin{matrix}\alpha - c\\ \beta\end{matrix}\right. \end{cases}$

$AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ فاصله یک راس کانونی از یک راس غیر کانونی

معادله بیضی افقی : $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ مخرج x بزرگتر باشد افقی

* در بیضی افقی A و A′ و F و F′ با O هم عرض و B و B′ با O هم طول هستند.

مثال ۱: طول قطرها، مختصات رئوس و کانونها و خروج از مرکز بیضی به معادله $9x^2+16y^2=144$ را بدست آورید.

$9x^2+16y^2=144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144}+\frac{16y^2}{144}=\frac{144}{144} \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{(x-0)^2}{16}+\frac{(y-0)^2}{9}=1$

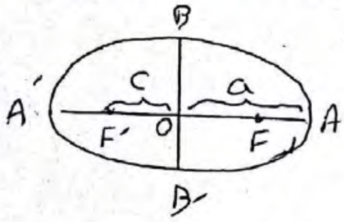
بیضی افقی است.

مرکز $O\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ $\quad a^2=16 \Rightarrow a=\pm 4 \Rightarrow A\left|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right. \quad A'\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right.$ ، $AA'=2a=2\times 4=8$

$b^2=9 \Rightarrow b=\pm 3 \Rightarrow B\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right.$ و $B'\left|\begin{matrix}-3\\0\end{matrix}\right.$ ، $BB'=2b=2(3)=6$

$c^2=a^2-b^2=16-9=7 \Rightarrow c=\pm\sqrt{7} \quad F\left|\begin{matrix}\sqrt{7}\\0\end{matrix}\right.$ و $F'\left|\begin{matrix}-\sqrt{7}\\0\end{matrix}\right. \quad FF'=2c=2\sqrt{7}$

مثال ۲: فاصله یک راس کانونی بیضی از مرکز و رأس ناکانونی به ترتیب ۲ و $\sqrt{5}$ است. بیشترین فاصله نقطه M روی بیضی از یکی از کانونهای بیضی چقدر است؟



فاصله A تا O $= a = 2$

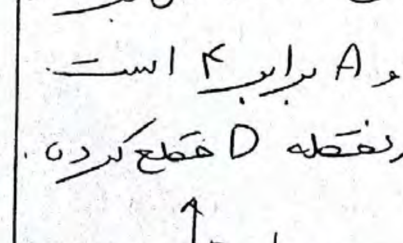
$AB=\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{2^2+b^2}=\sqrt{5} \Rightarrow 4+b^2=5$

$b^2=1 \Rightarrow \underline{b=1} \qquad c^2=a^2-b^2=2^2-1^2=3 \Rightarrow c=\sqrt{3}$

بیشترین فاصله یکی از نقاط بیضی از کانون فاصله A تا F' یا A' تا F است

$AF'=A'F=a+c=2+\sqrt{3}$

مثال ۳: مرکز بیضی مقابل بر مبدا مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای مختصات منطبق هستند و فاصله F از هردو نقطه O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطه F بر AA' عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطه D قطع کرده باشد مختصات D را بدست آورید.



$DF'^2=y^2+8^2 \qquad OA=a=8 \Rightarrow AA'=2A=16$

طبق تعریف بیضی: $DF+DF'=2a=16 \Rightarrow y+\sqrt{y^2+64}=16$

$\Rightarrow \sqrt{y^2+64}=16-y \Rightarrow y^2+16=256-32y+y^2 \Rightarrow 32y=192 \Rightarrow \boxed{y=6}$

$x=OF=4 \qquad \Rightarrow D\left|\begin{matrix}x=4\\y=6\end{matrix}\right.$

مثال ۴: نقاط $F\begin{vmatrix}-8\\4\end{vmatrix}$ و $F'\begin{vmatrix}2\\4\end{vmatrix}$ کانونهای یک بیضی اند. اگر بزرگترین قطر بیضی برابر ۲۶ باشد مختصات دوسر قطر بزرگ، دوسر قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

$F\begin{vmatrix}-8\\4\end{vmatrix},\ F'\begin{vmatrix}2\\4\end{vmatrix} \Rightarrow O\begin{vmatrix}\frac{-8+2}{2}=-3=\alpha\\ \frac{4+4}{2}=4=\beta\end{vmatrix} \Rightarrow$ عرض مرکز با عرض کانونها برابر است $\Rightarrow$ بیضی افقی

$FF'=\sqrt{(-8-2)^2+(4-4)^2}=\sqrt{100}=10 \Rightarrow FF'=2c=10 \Rightarrow \boxed{c=5}$

قطر بزرگ $=2a=26 \Rightarrow \boxed{a=13}$ $\quad c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 25=169-b^2 \Rightarrow b^2=144 \Rightarrow \boxed{b=12}$

دوسر قطر بزرگ: $A\begin{vmatrix}\alpha+a=-3+13=10\\ \beta=4\end{vmatrix}$ $\quad A'\begin{vmatrix}\alpha-a=-3-13=-16\\ \beta=4\end{vmatrix}$

دوسر قطر کوچک: $B\begin{vmatrix}\alpha=-3\\ \beta+b=4+12=16\end{vmatrix}$ $\quad B'\begin{vmatrix}\alpha=-3\\ \beta-b=4-12=-8\end{vmatrix}$

خروج از مرکز $=e=\frac{c}{a}=\frac{5}{13}$

مثال ۵: نقاط $B\begin{vmatrix}3\\7\end{vmatrix}$ و $B'\begin{vmatrix}3\\-1\end{vmatrix}$ دوسر قطر کوچک یک بیضی اند. اگر اندازه فاصله کانونی بیضی برابر ۶ باشد مختصات دوسر قطر بزرگ و مختصات کانونها و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

$B\begin{vmatrix}3\\7\end{vmatrix},\ B'\begin{vmatrix}3\\-1\end{vmatrix} \Rightarrow O\begin{vmatrix}\frac{3+3}{2}=3\\ \frac{-1+7}{2}=3\end{vmatrix} \Rightarrow$ طول مرکز با طول مختصات قطر کوچک برابر $\Rightarrow$ بیضی افقی

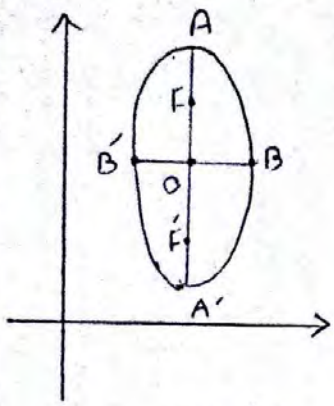
$BB'=\sqrt{(3-3)^2+(7-(-1))^2}=\sqrt{64}=8 \Rightarrow BB'=2b=8 \Rightarrow \boxed{b=4}$

فاصله کانونی $=FF'=2c=6 \Rightarrow \boxed{c=3}$, $c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 9=a^2-16 \Rightarrow a^2=25$ $\boxed{a=5}$

دوسر قطر بزرگ: $A\begin{vmatrix}\alpha+a=8\\ \beta=3\end{vmatrix}$ $\quad A'\begin{vmatrix}\alpha-a=-2\\ \beta=3\end{vmatrix}$

کانونها: $F\begin{vmatrix}\alpha+c=6\\ \beta=3\end{vmatrix}$ $\quad F'\begin{vmatrix}\alpha-c=0\\ \beta=3\end{vmatrix}$

خروج از مرکز: $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$



۲) بیضی قائم: اگر قطر بزرگ بیضی هم راستا با محور y ها و قطر کوچک آن هم راستا با محور xها باشد بیضی را قائم می نامند که دارای ویژگی های زیر است:

قطر بزرگ $= AA' = 2a$ قطر کوچک $= BB' = 2b$

فاصله کانونی $= FF' = 2c$ مرکز بیضی $= O\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$ $a > b > 0$, $a > c$

رابطه بین a و b و c: $c^2 = a^2 - b^2$ خروج از مرکز بیضی $= e = \frac{c}{a}$

A و A' را رئوس کانونی (در امتداد کانون‌ها هستند) و B و B' را رئوس غیرکانونی (در امتداد کانون‌ها نیستند) می نامند:

$A\begin{vmatrix}\alpha\\\beta+a\end{vmatrix}$ $A'\begin{vmatrix}\alpha\\\beta-a\end{vmatrix}$ $B\begin{vmatrix}\alpha+b\\\beta\end{vmatrix}$ $B'\begin{vmatrix}\alpha-b\\\beta\end{vmatrix}$

مختصات کانون‌ها: $\begin{cases} F\begin{vmatrix}\alpha\\\beta+c\end{vmatrix} \\ F'\begin{vmatrix}\alpha\\\beta-c\end{vmatrix}\end{cases}$ فاصله یک راس کانونی از یک راس غیرکانونی $= AB = \sqrt{a^2+b^2}$

معادله بیضی قائم: $\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1}$

مخرج y^2 بزرگتر باشد قائم

در بیضی قائم A و A' و O و F و F' هم طول و B و B' و O هم عرض هستند.

مثال) معادله یک بیضی بصورت $2x^2 + y^2 = 10$ است نوع بیضی را مشخص کرده سپس مختصات رئوس، کانون‌ها، مرکز و اندازه قطرها را بیابید.

$$2x^2 + y^2 = 10 \Rightarrow \frac{2x^2}{10} + \frac{y^2}{10} = \frac{10}{10} \Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{10} = 1 \Rightarrow \frac{(x-0)^2}{5} + \frac{(y-0)^2}{10} = 1$$

بیضی قائم است (مخرج y^2 بزرگتر است) $O\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$

$a^2 = 10 \Rightarrow a = \pm\sqrt{10} \Rightarrow A\begin{vmatrix}0\\\sqrt{10}\end{vmatrix}$ $A'\begin{vmatrix}0\\-\sqrt{10}\end{vmatrix}$ قطر بزرگ $= 2a = 2\sqrt{10}$

$b^2 = 5 \Rightarrow b = \pm\sqrt{5} \Rightarrow B\begin{vmatrix}\sqrt{5}\\0\end{vmatrix}$ $B'\begin{vmatrix}-\sqrt{5}\\0\end{vmatrix}$ قطر کوچک $= 2b = 2\sqrt{5}$

$c^2 = a^2 - b^2 = 10 - 5 = 5 \Rightarrow c = \pm\sqrt{5} \Rightarrow F\begin{vmatrix}0\\\sqrt{5}\end{vmatrix}$ و $F'\begin{vmatrix}0\\-\sqrt{5}\end{vmatrix}$

مثال ۲: نقاط $A(-3,4)$ و $A'(-3,-6)$ دو سر قطر بزرگ یک بیضی‌اند. اگر اندازه کوچکترین قطر برابر ۶ باشد مختصات دو سر قطر کوچک، کانونها و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

$$O\left|\begin{array}{l}\dfrac{-3-3}{2}=-3\sim\alpha\\[2mm] \dfrac{4+(-6)}{2}=-1\sim\beta\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ A و A' و O هم طول هستند $\Rightarrow$ بیضی قائم

$$AA'=2a\Rightarrow\sqrt{(-3-(-3))^2+(-6-4)^2}=2a\Rightarrow 10=2a\Rightarrow\boxed{a=5}$$

$$2b=6\Rightarrow\boxed{b=3}\qquad c^2=a^2-b^2=5^2-3^2=16\Rightarrow\boxed{c=4}$$

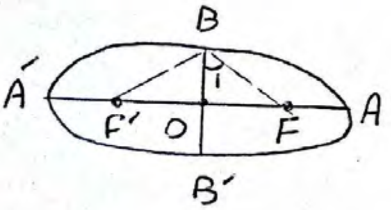
دو سر قطر کوچک: $\begin{cases}B\left|\begin{array}{l}\alpha+b=-3+3=0\\ \beta=-1\end{array}\right.\\[3mm] B'\left|\begin{array}{l}\alpha-b=-3-3=-6\\ \beta=-1\end{array}\right.\end{cases}$

کانونها: $\begin{cases}F\left|\begin{array}{l}\alpha=-3\\ \beta+c=-1+4=3\end{array}\right.\\[3mm] F'\left|\begin{array}{l}\alpha=-3\\ \beta-c=-1-4=-5\end{array}\right.\end{cases}$

خروج از مرکز $=e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}$

(هماهنگ - دیماه ۹۷)

اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟

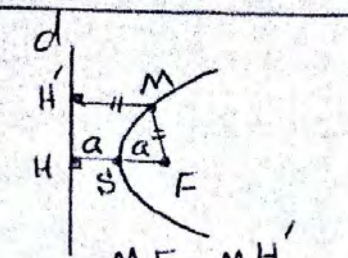


$$2a=2(2b)\Rightarrow a=2b$$

$$c^2=a^2-b^2=4b^2-b^2=3b^2\Rightarrow c=\sqrt{3}\,b$$

$$tg\,\hat{B}_1=\frac{OF}{OB}=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}b}{b}=\sqrt{3}\Rightarrow\hat{B}_1=60^\circ\Rightarrow F\hat{B}F'=2\times60=120^\circ$$

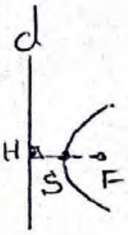
سهمی:



$MF = MH'$
$SF = SH = a$

مکان هندسی تمام نقاط از یک صفحه است که از یک خط ثابت مانند d و یک نقطه ثابت مانند F خارج از خط به یک فاصله باشند. نقطه ثابت F را کانون سهمی و خط ثابت d را خط هادی سهمی می نامند. هر نقطه دیگری هم روی سهمی در نظر بگیریم فاصله اش از F و خط هادی به یک اندازه است

ویژگی های سهمی:



۱) سهمی سه جزء اصلی دارد:

F = کانون سهمی S = راس سهمی d = خط هادی سهمی

۲) فاصله راس سهمی تا کانون برابر است با فاصله راس سهمی تا خط هادی به عبارت دیگر راس سهمی وسط کانون و خط هادی قرار دارد.

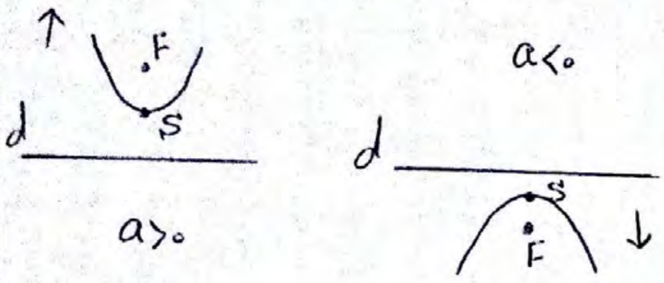
$$SH = SF$$

۳) فاصله راس سهمی تا کانون را فاصله کانونی سهمی نامیده با a نشان می دهیم a را پارامتر سهمی نیز می نامند. $SF = SH = a$

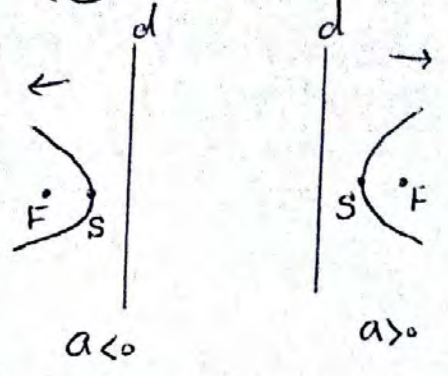
۴) کانون همواره در دهانه سهمی قرار دارد و خط هادی همواره پشت سهمی است و سهمی هرگز خط هادی را قطع نمی کند.

۵) اگر $a>0$ باشد دهانه سهمی در جهت مثبت محورهای مختصات (راست یا بالا) باز می شود و اگر $a<0$ باشد دهانه سهمی در جهت منفی محورهای مختصات (چپ یا پایین) باز می شود.

(سهمی قائم)



(سهمی افقی)

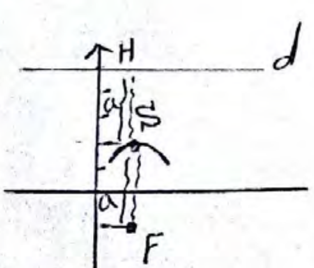


۶) اگر سهمی افقی باشد خط هادی با محور yها موازی است و معادله خط هادی بصورت $x=k$ است.

۷) اگر سهمی قائم باشد خط هادی با محور xها موازی است و معادله خط هادی بصورت $y=k$ است.

۸) امتداد SF محور تقارن یا محور کانونی سهمی است که بر خط هادی عمود است.

مثال) اگر $S(1,2)$ و $F(1,-1)$ به ترتیب راس و کانون یک سهمی باشند معادله خط تقارن سهمی را بنویسید.



حل: رأس و کانون را رسم می‌کنیم:

$$a=SF=\sqrt{(1-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{9}=\pm 3$$

چون دهانه سهمی رو به پایین است پس: $a=-3<0$

خط هادی پشت سهمی است.

$SF=SH=3$

$$y=2+3 \Rightarrow \boxed{y=5}$$

معادلات استاندارد (کلاسیک - صورت متعارف) سهمی:

۱) سهمی افقی باشد: $S\Big|_k^h$ راس سهمی و a پارامتر

$$\boxed{(y-k)^2=4a(x-h)}$$

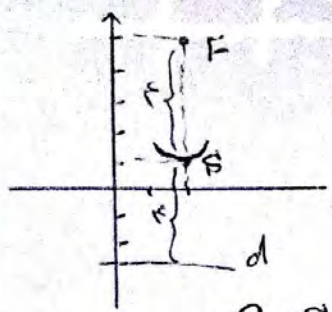
معادله سهمی — توان y برابر ۲ است.

۲) سهمی قائم باشد: $S\Big|_k^h$ راس سهمی و a پارامتر

$$\boxed{(x-h)^2=4a(y-k)}$$

توان x برابر ۲ است.

مثال ۱: معادله سهمی به راس $S\begin{vmatrix}2\\1\end{vmatrix}$ و کانون $F\begin{vmatrix}2\\5\end{vmatrix}$ را بیابید. و معادله خط هادی آن را نوشته نوع سهمی را مشخص کنید.



حل: راس و کانون را رسم می‌کنیم:

کانون در دهانه سهمی قرار دارد سهمی قائم و رو به بالا است پس $a>0$

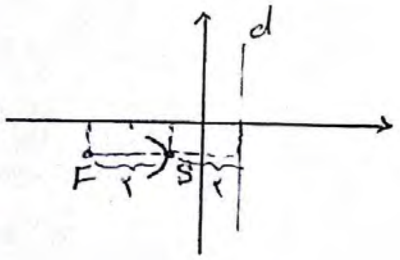
$$a=SF=\sqrt{(2-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{16}=\pm 4 \xrightarrow{a>0} \boxed{a=4}$$

$$(x-h)^2=4a(y-k)$$

معادله خط هادی: $y=-3$

$$\Rightarrow \boxed{(x-2)^2=16(y-1)}$$ معادله سهمی

مثال ۲: معادله سهمی به راس $S\begin{vmatrix}-1\\-1\end{vmatrix}$ و کانون $F\begin{vmatrix}-3\\-1\end{vmatrix}$ را بیابید و معادله خط هادی آن را نوشته نوع سهمی را مشخص کنید.



حل: راس و کانون را رسم می‌کنیم:

کانون در دهانه سهمی قرار دارد، سهمی افقی و رو به چپ است پس: $a<0$

$$a=SF=\sqrt{(-1-(-3))^2+(-1-(-1))^2}=\sqrt{4}=\pm 2 \xrightarrow{a<0} \boxed{a=-2}$$

$$(y-k)^2=4a(x-h)$$

معادله خط هادی: $\boxed{x=1}$

$$\Rightarrow (y-(-1))^2=4(-2)(x-(-1))$$

$$\Rightarrow \boxed{(y+1)^2=-8(x+1)}$$ معادله سهمی

تذکر مهم:

اگر در معادله استاندارد سهمی پرانتزها را حساب کنیم معادله گسترده (ضمنی) سهمی بدست می‌آید که به روش مربع کامل کردن قابل تبدیل به معادله استاندارد می‌شود.

مثال ۱: با استاندارد کردن سهمی به معادله $x^2+4y-6x+9=0$ مختصات رأس و پارامتر سهمی را تعیین کنید:

$$x^2+4y-6x+9=0 \Rightarrow x^2-6x+9=-4y \Rightarrow (x-3)^2=-4(y-0)$$

سهمی قائم دهانه رو به پایین

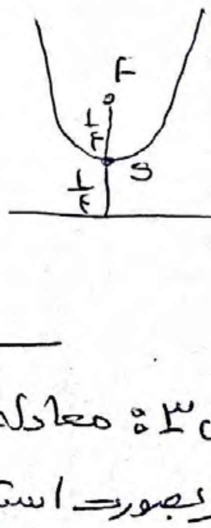
$$\Rightarrow S\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right. \quad \text{و} \quad 4a=-4 \Rightarrow a=-1$$

مثال ۲: معادله یک سهمی بصورت $y=x^2+3x+5$ داده شده است. آن را بصورت استاندارد (متعارف) تبدیل کرده و کانون، خط هادی و راس و محور سهمی را مشخص کنید.

$$x^2+3x+5=y \Rightarrow x^2+3x=y-5 \Rightarrow x^2+3x+\frac{9}{4}=y-5+\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=1\left(y-\frac{11}{4}\right)$$ سهمی قائم، دهانه رو به بالا

$$S\left|\begin{matrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{11}{4}\end{matrix}\right. \qquad 4a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{4} \qquad F\left|\begin{matrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{11}{4}+\frac{1}{4}=3\end{matrix}\right.$$



خط هادی: $y=\frac{11}{4}-\frac{1}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

محور سهمی: $x=-\frac{3}{2}$

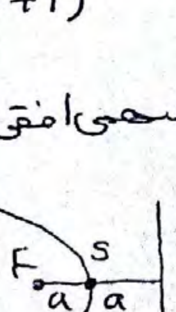
مثال ۳: معادله یک سهمی بصورت $y^2-2y+8x+9=0$ داده شده است آنرا بصورت استاندارد (متعارف) نوشته و کانون، خط هادی و مختصات راس و محور سهمی را مشخص کنید

$$y^2-2y=-8x-9 \Rightarrow y^2-2y+1=-8x-9+1 \Rightarrow (y-1)^2=-8(x+1)$$

$$S\left|\begin{matrix}-1\\+1\end{matrix}\right. \qquad 4a=-8 \Rightarrow a=-2$$ سهمی افقی، دهانه به سمت چپ

اندازه $a=2$

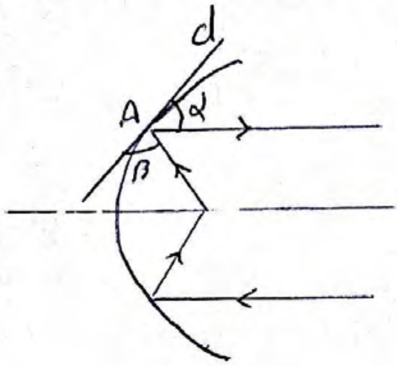
$$F\left|\begin{matrix}-1-2=-3\\+1\end{matrix}\right. \qquad y=1$$ محور تقارن



خط هادی: $x=-1+2=1$

ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها:

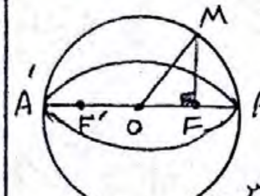
یکی از ویژگی‌های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد بازتاب آن موازی با محور سهمی باز خواهد گشت و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت در واقع اگر خط d بر سهمی مماس و نقطه A نقطه تماس آن باشد زاویه‌های α و β برابرند



از این ویژگی در ساخت چراغ جلوی اتومبیل‌ها استفاده می‌شود.

(تمرینات مهم صـ۶۷ـ کتاب درسی)

۲) قطر دایره C، مانند شکل قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای M قطع کند ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



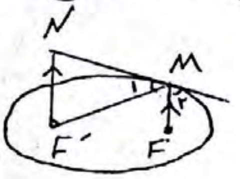
$\text{شعاع دایره} = OM = OA = a \quad , \quad OF = c$

$MF^2 = a^2 - c^2$: فیثاغورس

در بیضی $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$\Rightarrow MF^2 = b^2 \Rightarrow MF = b = \frac{BB'}{2} =$ نصف قطر کوچک

۳) در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند ثابت کنید: $NF' = MF'$

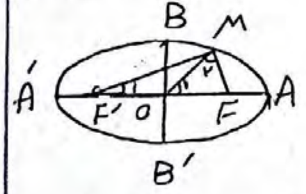


$\hat M_1 = \hat M_2$ (ویژگی مماس بر بیضی)

$(NF' \parallel MF$ و MN مورب$) \Rightarrow \hat N = \hat M_2$

$\Rightarrow \hat M_1 = \hat N \Rightarrow NF' = MF'$

۴) نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.



الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$

$OA = 5 \ , \ OB = 3 \ , \ OF = 4 = OF' = c$

$c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow c = 4 = OM$

ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

$OM = OF \Rightarrow \hat F_1 = \hat M_2 \Rightarrow O\hat{M}F$ متساوی‌الساقین

$OM = OF' \Rightarrow \hat M_1 = \hat F'_1 = x \Rightarrow$ خارجی $\hat O_1 = \hat M_1 + \hat F'_1 = 2x$

$\hat M_2 = \frac{180 - 2x}{2} = 90 - x$

$\hat M_1 = x$

$\Rightarrow \hat M = \hat M_1 + \hat M_2 = 90 - x + x = 90 \Rightarrow \widehat{MFF'}$ قائم‌الزاویه

ج) طول‌های MF و MF' را بدست آورید.

$MF + MF' = 10 \Rightarrow MF^2 + MF'^2 + 2MF.MF' = 100$

$\widehat{MFF'}$ قائم‌الزاویه: $MF^2 + MF'^2 = 64$

$\Rightarrow 64 + 2MF.MF' = 100 \Rightarrow$

$$2MF \cdot MF' = 36 \Rightarrow MF \cdot MF' = 18$$

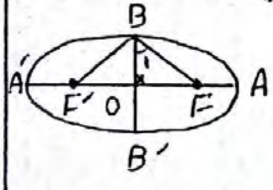
$$(MF' - MF)^2 = MF'^2 + MF^2 - 2MF' \cdot MF = 64 - 2(18) = 28 \Rightarrow MF' - MF = \sqrt{28}$$

$$\begin{cases} MF' - MF = \sqrt{28} \\ MF' + MF = 10 \end{cases} \Rightarrow MF' = \frac{2\sqrt{7} + 10}{2} = \sqrt{7} + 5$$

$$MF = 10 - (\sqrt{7} + 5) = 5 - \sqrt{7}$$

---

۵) در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟



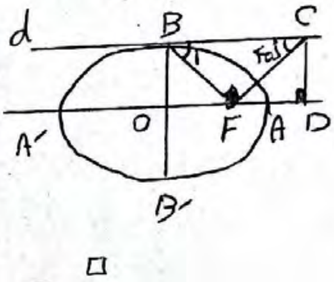
$$AA' = 2BB' \Rightarrow 2a = 2(2b) \Rightarrow a = 2b$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = (2b)^2 - b^2 = 4b^2 - b^2 = 3b^2 \Rightarrow c = b\sqrt{3}$$

$$tg\,\hat{B}_1 = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{b\sqrt{3}}{b} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{B}_1 = 60^\circ \Rightarrow F\hat{B}F' = 2\hat{B}_1 = 120^\circ$$

---

۶) در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطراند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F = 45^\circ$ مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.



$$\left.\begin{matrix} \hat{F} = 90^\circ \\ B\hat{C}F = 45^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = 45^\circ \Rightarrow FC = BF = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{a^2} = a$$

$$\overset{\square}{BCDO}: CD = OB = b \Rightarrow FD = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{c^2} = c$$

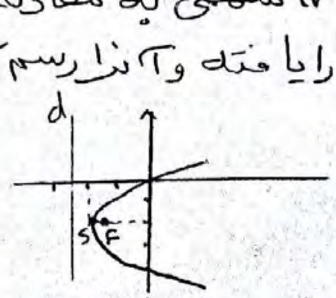
$$AF = a - c \Rightarrow AD = c - (a - c) = 2c - a \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{2c - a}{a - c}$$

---

۷) سهمی به معادله $y^2 = 2x - 4y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید

$$y^2 + 4y = 2x \Rightarrow y^2 + 4y + 4 = 2x + 4 \Rightarrow (y+2)^2 = 2(x+2)$$

رأس سهمی: $S(-2, -2)$ $\quad 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad F\left|\begin{matrix} -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\ -2 \end{matrix}\right.$



$x = 0 \Rightarrow y^2 + 4y = 0 \Rightarrow y(y+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -4 \end{cases}$ $\quad$ خط هادی: $x = -\frac{5}{2}$

۸) مختصات راس و کانون سهمی به معادله $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ را بدست آورید.

$$y=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c \Rightarrow y=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2})+c \Rightarrow y=a(x+\frac{b}{a})^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

$$\Rightarrow y=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-b^2+4ac}{4a} \Rightarrow y=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y+\frac{\Delta}{4a}=a(x+\frac{b}{2a})^2$$

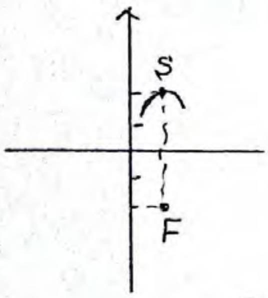
$$\Rightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{1}{a}(y+\frac{\Delta}{4a}) \Rightarrow S(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a})$$

$$4a=\frac{1}{a} \Rightarrow 4a^2=1 \Rightarrow a^2=\frac{1}{4} \Rightarrow a=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow F\left|\begin{matrix}\pm\frac{1}{2}-\frac{b}{2a}\\ -\frac{\Delta}{4a}\end{matrix}\right.$$

---

۹) معادله سهمی را بنویسید که $S(1,2)$ راس و $F(1,-2)$ کانون آن باشد

حل: با رسم راس و کانون داریم:



دهانه سهمی رو به پایین است پس $a<0$

فاصله F تا S برابر ۴ واحد است پس $a=-4$

نوع سهمی قائم است.

$$(x-h)^2=4a(y-k) \Rightarrow (x-1)^2=4(-4)(y-2) \Rightarrow (x-1)^2=-16(y-2)$$

---

۱۰) سهمی $y^2=4x-4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

$$y^2=4(x-1) \Rightarrow (y-0)^2=4(1)(x-1) \Rightarrow S\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \qquad a=1$$

سهمی افقی و دهانه آن به سمت راست است. $F\left|\begin{matrix}1+1=2\\0 \quad\ 0\end{matrix}\right.$

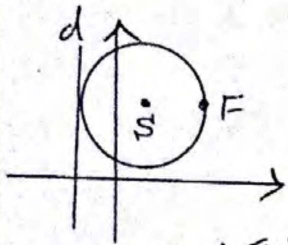
معادله دایره: $(x-2)^2+(y-0)^2=3^2 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=9 \Rightarrow y^2=9-(x-2)^2 \xRightarrow{y^2=4(x-1)}$

$$4(x-1)=9-(x-2)^2 \Rightarrow 4x-4=9-x^2+4x-4 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$$

$$x=3 \Rightarrow y^2=4(3-1)=8 \Rightarrow y=\pm\sqrt{8} \qquad (3,\sqrt{8}),(3,-\sqrt{8})$$

$$x=-3 \Rightarrow y^2=4(-3-1) \Rightarrow y^2=-16 \quad \text{غ ق ق}$$

۱۱) سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و بر عکس



حل: فرض کنیم $(y-k)^2=4a(x-h)$

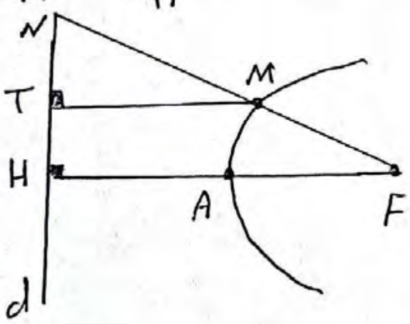
$F\left|\begin{matrix}a+h\\k\end{matrix}\right.$ $\quad S\left|\begin{matrix}h\\k\end{matrix}\right.$ $\quad$ خط هادی: $x=h-a$

اگر دایره از F بگذرد و بر d مماس باشد باید مرکز دایره همان راس سهمی باشد و قطر دایره برابر ۲a بوده بنابراین $R=a$ و معادله دایره برابر خواهد بود با:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

پس مرکز دایره روی سهمی است پس نقاط روی سهمی در واقع مراکز دایره هایی هستند که از نقطه F گذشته و با چرخش بر خط هادی نیز مماس باشند.

۱۲) در شکل سهمی با راس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه M، MT را بر d عمود کرده ایم. ثابت کنید $\frac{FN}{FA}=\frac{2NT}{TH}$



$$MT=MF, \quad FA=HA=\frac{1}{2}HF$$

$$TM\parallel HF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{FM}{FN}=\frac{TH}{NH} \Rightarrow FN=\frac{FM\cdot NH}{TH}$$

$$TM\parallel HF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{NT}{NH}=\frac{TM}{HF} \Rightarrow HF=\frac{NH\cdot TM}{NT}$$

$$\Rightarrow 2FA=\frac{NH\cdot TM}{NT} \Rightarrow FA=\frac{NH\cdot TM}{2NT}$$

$$\frac{FN}{FA}=\frac{\frac{FM\cdot NH}{TH}}{\frac{NH\cdot TM}{2NT}}=\frac{2NT\cdot FM}{TH\cdot TM}\overset{FM=TM}{=\!=\!=}\frac{2NT}{TH}$$