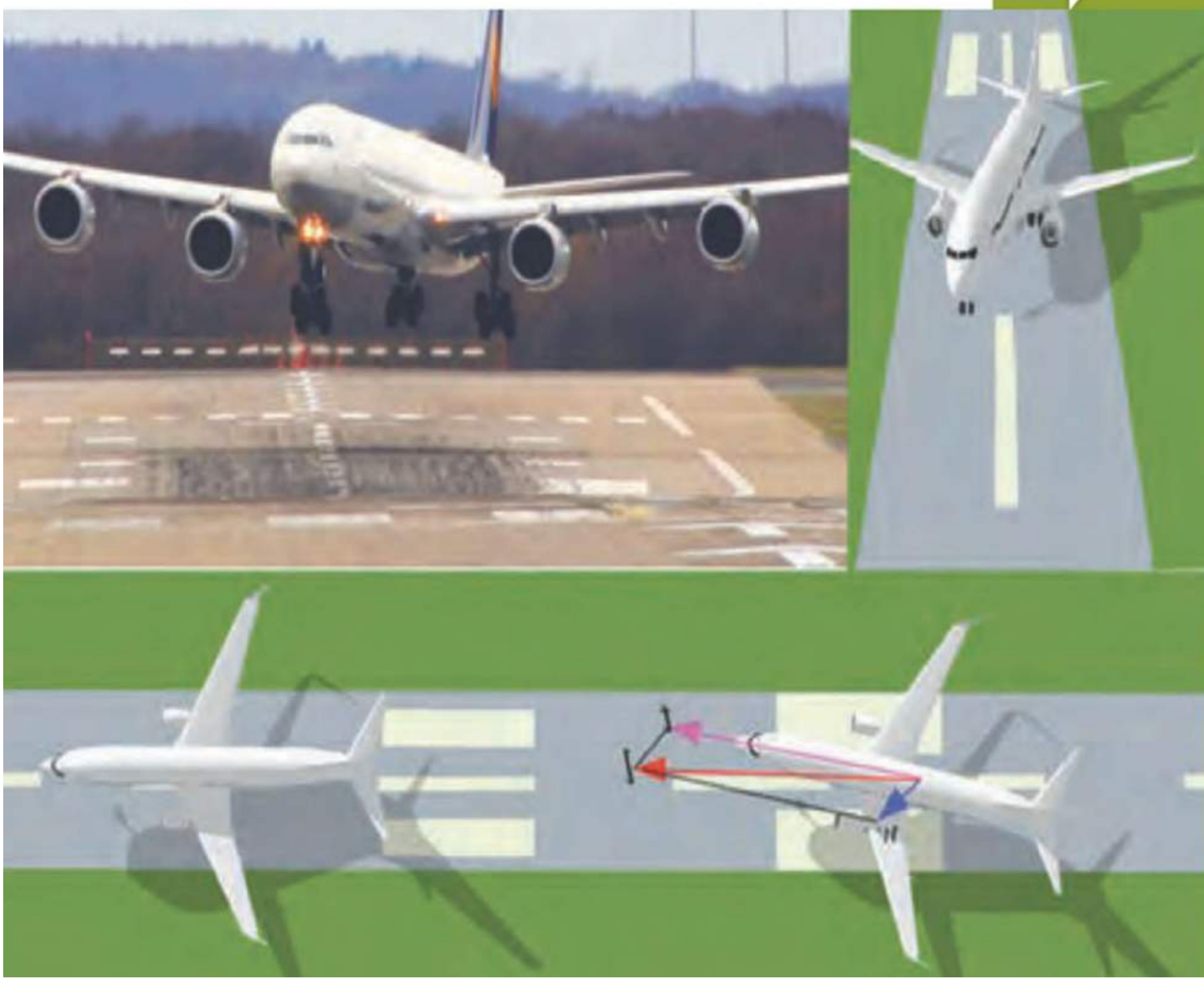
# ۳

فصل سوم

# بـــردارهـــا



نقاط دیگر تصویر این نقطه هستند، پس اگر $A(a,b,c)$ باشد تصویر این نقطه به صورت زیر بدست می آید.

| روی محور $x$ | روی محور $y$ | روی محور z | روی صفحه xoy | روی صفحه xoz | روی صفحه yoz |
|---|---|---|---|---|---|
| $(a,0,0)$ | $(0,b,0)$ | $(0,0,c)$ | $(a,b,0)$ | $(a,0,c)$ | $(0,b,c)$ |

## قرینه یک نقطه نسبت به صفحه ها و محورهای مختصات

اگر $A(a,b,c)$ باشد قرینه این نقطه نسبت به صفحه ها و محورهای مختصات به صورت زیر بدست می آید

| محور $x$ | محور $y$ | محور z | صفحه xoy | صفحه xoz | صفحه yoz | مبداء مختصات |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(a,-b,-c)$ | $(-a,b,-c)$ | $(-a,-b,c)$ | $(a,b,-c)$ | $(a,-b,c)$ | $(-a,b,c)$ | $(-a,-b,-c)$ |

## نقاط خاص

اگر نقطه ای روی یکی از محورها و یا روی یکی از صفحات باشد، مختصات آن به صورت زیر خواهد بود.

| محور $x$ | محور $y$ | محور z | صفحه xoy | صفحه xoz | صفحه yoz | مبداء مختصات |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(a,0,0)$ | $(0,a,0)$ | $(0,0,a)$ | $(a,b,0)$ | $(a,0,b)$ | $(0,a,b)$ | $(0,0,0)$ |

## فاصله یک نقطه از صفحات و محورهای مختصات

اگر $A(a,b,c)$ یک نقطه از فضای سه بعدی باشد، آنگاه فاصله این نقطه از صفحه ها و محورهای مختصات به قرار زیر است:

| از محور $x$ | از محور $y$ | از محور z | از صفحه xoy | از صفحه xoz | از صفحه yoz | از مبداء مختصات |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{b^2+c^2}$ | $\sqrt{a^2+c^2}$ | $\sqrt{a^2+b^2}$ | $\lvert c\rvert$ | $\lvert b\rvert$ | $\lvert a\rvert$ | $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ |

## فاصله دو نقطه از هم

اگر $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ باشد، فاصله بین این دو نقطه از دستور زیر بدست می آید.

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$$

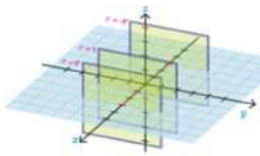
وسط این دو نقطه از دستور زیر بدست می آید.

$$M=\frac{A+B}{2}$$

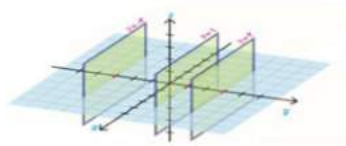
## معادلات خطوط موازی با محورها

اگر معادله خطی موازی با محور $x$ ها بخواهیم بنویسیم در دستگاه دو بعدی به صورت $y=\beta$ است اما در دستگاه سه بعدی به صورت $\begin{cases} y=\beta \\ z=\gamma \end{cases}$ است. به همین ترتیب خطوط موازی با محور $y$ ها به صورت $\begin{cases} x=\alpha \\ z=\gamma \end{cases}$ و خطوط موازی با محور $z$ ها به شکل $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$ است.

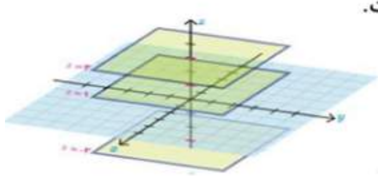
### معادلات صفحه های موازی با صفحات محورهای مختصات



اگر صفحه ای موازی صفحه $yz$ ( یعنی عمود بر محور $x$ ) باشد، معادله آن به صورت $x=\alpha$ است.



اگر صفحه ای موازی صفحه $xz$ ( یعنی عمود بر محور $y$ ) باشد، معادله آن به صورت $y=\alpha$ است



اگر صفحه ای موازی صفحه $xy$( یعنی عمود بر محور $z$ ) باشد، معادله آن به صورت $z=\alpha$ است.

### پیکان

پاره خط جهتدار است که اگر ابتدای آن نقطه A و انتهای آن نقطه B باشد به صورت $\overrightarrow{AB}$ نشان می دهیم و داریم:

$\overrightarrow{AB}=B-A$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

دو پیکان را هم ارز گویند هرگاه موازی ( هم راستا ) و هم جهت و هم اندازه باشند.

### بردار

در یک مجموعه پیکان هم ارز فقط یک پیکان وجود دارد که از مبداء مختصات شروع می شود، این پیکان را بردار گوییم و چناچه نقطه انتهای بردار $A(a,b,c)$ باشد بردار $\overrightarrow{OA}$ را به صورت $(a,b,c)$ نمایش می دهیم و اندازه این بردار از دستور زیر حساب می شود.

$r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

بردار های مهم عبارتند از :

| عمود بر صفحه $xy$ | عمود بر صفحه $xz$ | عمود بر صفحه $yz$ | موازی صفحه $xy$ | موازی صفحه $xz$ | موازی صفحه $yz$ |
|---|---|---|---|---|---|
| موازی با محور $z$ | موازی با محور $y$ | موازی با محور $x$ | عمود بر محور $z$ | عمود بر محور $y$ | عمود بر محور $x$ |
| $V(0,0,a)$ | $V(0,a,0)$ | $V(a,0,0)$ | $V(a,b,0)$ | $V(a,0,b)$ | $V(0,a,b)$ |

## بردار یکه

بردارهای به طول یک هستند و بردارهای یکه در راستای محور $x$ را $\vec{i}(1,0,0)$ و در راستای محور $y$ را با $\vec{j}(0,1,0)$ و در راستای محور $z$ را با $\vec{k}(0,0,1)$ نشان می دهیم.

در هر بردار دلخواه می توان آن بردار را به صورت ترکیب خطی از بردارهای $i, j, k$ نمایش داد.

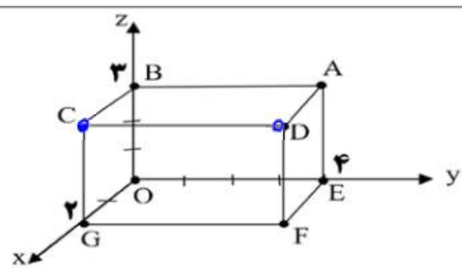
$v(a,b,c) \Longrightarrow v = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

$|i| = |j| = |k| = 1$

## دو بردار موازی

اگر دو بردار $\vec{v_1}(a_1, b_1, c_1)$ و $\vec{v_2}(a_2, b_2, c_2)$ با هم همراستا ( موازی ) باشند، داریم :

$v_1 \parallel v_2 \Longleftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_3}{b_3}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| دی ماه ۹۸ | ۱۲ | وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل مقابل ، قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x=0$ , $x=2$ و $y=0$ , $y=4$ و $z=0$ , $z=3$ هستند.<br>الف) مختصات نقطه A را مشخص کنید.<br>ب) معادلات مربوط به یال AD و وجه CDFG را بنویسید.  | ۱/۵ |

الف) $A(0,4,3)$

ب) $\begin{cases} y=4 \\ z=3 \end{cases}$ AD یال $(0<x<2)$

CDFG صفحه : $x=2$ $\quad (0<y<4 \,,\, 0<z<3)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| دی ماه ۹۸ | ۱۳ | بردارهای $\vec{a}=(1,2,3)$ و $\vec{b}=(-2,0,2)$ مفروض‌اند:<br>ب) طول بردار $2\vec{a}-\vec{b}$ را محاسبه کنید. | ۰/۵ |

$2\vec{a} - \vec{b} = (2,4,6) - (-2,0,2) = (4,4,4)$

$|2a-b| = \sqrt{4^2+4^2+4^2} = \sqrt{16+16+16} = \sqrt{16\times 3} = 4\sqrt{3}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| خرداد ۹۸ | ۲ | درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.<br>پ) نقطه $A(2,-3,0)$ روی صفحه xoy قرار دارد. درست | ۰/۲۵ |

xoy بردار روی صفحه $\longrightarrow v(a,b,0)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| خرداد ۹۸ | ۱۱ | به سؤالات زیر پاسخ دهید .<br>الف) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسیدکه از نقطه $A=(2,3,4)$ بگذرد و با صفحه xoy موازی باشد.<br>ب) معادلات $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ مربوط به کدام محور است؟<br>پ) در فضای $\mathbb{R}^3$، نقطه A به طول ۲ روی محور طولها و نقطه $B=(-4,6,-3)$ مفروض‌اند مختصات وسط AB را بیابید. | ۱/۵ |

الف) $Z=4$  ب) محور yها  پ) $A(2,0,0)$  $B(-4,6,-3)$

$M=\left(-1,3,-\frac{3}{2}\right)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| خرداد ۹۸ | ۱۲ | اگر $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(1,2,1)$ باشد، طول بردار $\vec{a}-2\vec{b}$ را به‌دست آورید. | ۱ |

$\vec{a}-2\vec{b}=(2,0,-1)-(2,4,2)=(0,-4,-3)$

$|a-2b|=\sqrt{0+16+9}=\sqrt{25}=5$

| | | | |
|---|---|---|---|
| شهریور ۹۸ | ۱۳ | نقاط $A(3,1,2)$ و $B(3,-2,2)$ در $\mathbb{R}^3$ مفروض‌اند.<br>الف) طول پاره‌خط $AB$ را به‌دست آورید.<br>ب) معادلات مربوط به پاره‌خط $AB$ را بنویسید. | ۱/۲۵ |

الف) $\vec{AB}=(3,-2,2)-(3,1,2)=(0,-3,0)$

$|\vec{AB}|=\sqrt{0^2+(-3)^2+(0)^2}=\sqrt{9}=3$

ب) معادله AB $\begin{cases} x=3 \\ z=2 \end{cases}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| دی‌ماه ۹۷ | ۱۴ | اگر $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(3,1,-1)$ و $r=2$ باشد، بردار $r\vec{b}-\vec{a}$ را به دست آورید. | ۱ |

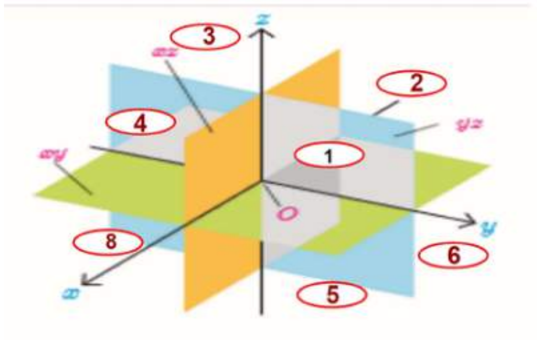
$\vec{a}(3,2,-1)$  $\vec{b}(3,1,-1)$

$2\vec{b}-\vec{a}=(6,2,-2)-(3,1,-1)=(3,1,-1)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| خرداد ۹۹ | ۱۵ | دو بردار $\vec{a}=(3,-2,1)$ ، $\vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ را در نظر بگیرید.<br>الف) بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای $\mathbb{R}^3$ واقع است؟ ( شماره ناحیه ذکر شود).<br>ب) طول بردار $\vec{a}+2\vec{b}$ را حساب کنید. | ۱ |

هر نقطه در فضای $R^3$ به صورت $A(a,b,c)$ که علامت هر متغیر در فضای سه بعدی به این صورت است.

| شماره ناحیه | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| ۱ | + | + | + |
| ۲ | — | + | + |
| ۳ | — | — | + |
| ۴ | + | — | + |
| ۵ | + | + | — |
| ۶ | — | + | — |
| ۷ | — | — | — |
| ۸ | + | — | — |




بردار a در ناحیه ۴ است

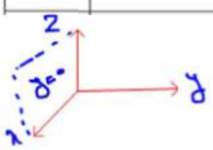
$\vec a+2\vec b=(3,-2,1)+2(-2,1,-1)=(-1,0,-1)$ $\qquad |\vec a+2\vec b|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt2$

| 1 | درجاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.<br>د) اگر دو بردار مانند $\vec a$ و $\vec b$، ...موازی... باشند، آنگاه یکی از آنها مضرب دیگری است. | 1 |
|---|---|---|

خرداد ۹۹
خارج کشور

| 1 | نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادلهٔ $y=0$ دارد ؟ چرا؟ | 11 |
|---|---|---|

خرداد ۹۹ـ خارج کشور




مربوط به محور xها و منطبق با صفحه $y=0$ است.

| 1/5 | اگر $\vec a=(\sqrt{8},2,4)$ و $\vec b=-6\vec j+8\vec k$ و $r=\frac{-1}{2}$،<br>الف) طول بردار $r\vec b$ را مشخص کنید.<br>ب) بردار $r\vec a+\vec b$ را بیابید. | 12 |
|---|---|---|

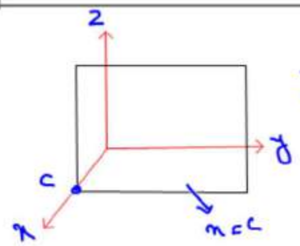
خرداد ۹۹
خارج کشور

الف) $r\vec b=-\frac{1}{2}(0,-6,8)=(0,3,-4)$ $\qquad |r\vec b|=\sqrt{0+9+16}=5$

ب) $r\vec a+\vec b=-\frac{1}{2}(2\sqrt2,2,4)+(0,-6,8)=(-\sqrt2,-7,6)$

$|r\vec a+\vec b|=\sqrt{2+49+36}=\sqrt{87}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| شهریور ۹۹ | ۱۵ | الف) نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=c \\ z=c \end{cases}$ در فضای $\mathbb{R}^3$ چه شکلی است ؟ و چه ارتباطی با نمودار $x=c$ دارد؟<br>ب) اگر $\vec{a}=(2,-1,3)$ و $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$ باشد اندازه بردار $\vec{a}+2\vec{b}$ را به‌دست آورید | ۳ |




الف) محور ها - $x=c$ یک صفحه است که موازی صفحه $yoz$ است که با محور $y$ موازی است

ب)

$$\vec{a}+2\vec{b}=(2,-1,3)+2(1,2,0)=(4,3,3)$$

$$|a+2b|=\sqrt{4^2+3^2+3^2}=\sqrt{16+9+9}=\sqrt{34}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| دی ماه ۹۹ | ۱۴ | دوبردار $\vec{a}=(1,2,-1)$ و $\vec{b}=(0,2,-1)$ را درنظر بگیرید.<br>الف)بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه ازفضای $\mathbb{R}^3$ واقع است؟(شماره ناحیه ذکرشود)<br>ب) طول بردار $2\vec{a}-\vec{b}$ را به دست آورید . | ۱/۵ |

الف) ناحیه چهارم

$$2\vec{a}-\vec{b}=2(1,2,-1)-(0,2,-1)=(2,2,-1)$$

$$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$$

## ضرب داخلی دو بردار

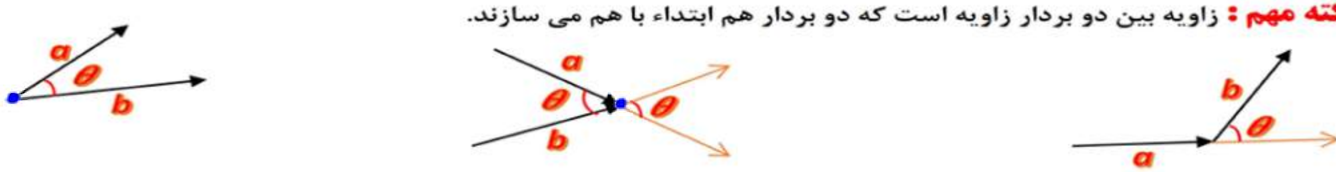
اگر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند حاصل ضرب داخلی ( یا اسکالر یا نقطه ای ) دو بردار یک عدد است که از دستور زیر بدست می آید.

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

اگر زاویه بین دو بردار برابر $\theta$ باشد، آن وقت می توان ضرب داخلی دو بردار را از دستور زیر محاسبه کرد.

$$a.b = |a||b|\cos\theta$$

**نکته مهم :** زاویه بین دو بردار زاویه است که دو بردار هم ابتداء با هم می سازند.




## نکات ضرب داخلی بردارها

۱) $\vec{a}.\vec{a} = |a|^2$

۲) $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

۳) $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{i}.\vec{k} = 0$

۴) $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = |a|^2 - |b|^2$

۵) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

۶) $R^2 - \acute{R}^2 = 4a.b$

۷) $R^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$

۸) $\acute{R}^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$

۹) زاویه بین دو بردار از دستور زیر محاسبه می شود:

$$\cos\theta = \frac{a.b}{|a||b|}$$

۱۰) اگر دو بردار بر هم عمود باشند حتماً ضرب داخلی آنها صفر است و برعکس

$$a \perp b \iff a.b = 0$$

## تصویر بردار $\vec{a}$ نسبت به بردار $\vec{b}$

تصویر بردار $\vec{a}$ نسبت به بردار $\vec{b}$ را با بردار $\acute{a}$ نشان می دهیم که از دستور زیر محاسبه می شود.


$$\vec{a}' = \frac{a.b}{|b|^2}\vec{b}$$

## رابطه کشی و شوارتز

برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم:

$v.v' \le |v|.|v'|$

## برآیند سه بردار

اگر بخواهیم برآیند سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را بدست آوریم از رابطه زیر استفاده می کنیم.

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(a.b+a.c+b.c)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| دی ماه ۹۷ | ۱۳ | اگر $\vec{c}=(-1,1,4)$ , $\vec{b}=(3,-4,2)$ , $\vec{a}=(-1,-3,0)$ باشند آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ برامتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید. | ۱/۵ |

$v=b+c=(3,-4,2)+(-1,1,4)=(2,-3,6)$

$a.v=-2+9+0=7$

$|v|=\sqrt{4+9+36}=7$

$\vec{a'}=\frac{a.v}{|v|^2}\vec{v}=\frac{7}{49}(2,-3,6) \Rightarrow a'=\frac{1}{7}(2,-3,6)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| دی ماه ۹۷ | ۱۴ | برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b}=0$ . | ۱ |

$\vec{a}.\vec{b}=|a||b|\cos\theta \xrightarrow{\theta=90} \vec{a}.\vec{b}=|a||b|\times 0 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$

$\vec{a}.\vec{b}=0 \Rightarrow |a|.|b|\cos\theta=0 \Rightarrow \begin{cases} |a|=0 & \text{غ ق ق} \\ |b|=0 & \text{غ ق ق} \\ \cos\theta=0 \Rightarrow \theta=90 \end{cases}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| خرداد ۹۸ | ۱۳ | بردارهای $\vec{a}=(1,-3,2)$ و $\vec{b}=(-2,1,-5)$ را در نظر بگیرید.<br>الف) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به‌دست آورید. | ۱ |

$a'=\frac{a.b}{|b|^2}\vec{b}$

$a.b=-2-3-10=-15$

$|b|=\sqrt{4+1+25}=\sqrt{30}$

$\vec{a'}=\frac{-15}{30}(-2,1,-5)=-\frac{1}{2}(-2,1,-5)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| شهریور ۹۸ | ۱۴ | ثابت کنید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دریک راستا باشند آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$ ، برابر خود $\vec{a}$ می‌شود. | ۱/۲۵ |

فرض : $\vec{a} = k\vec{b}$

$$\vec{a}' = \frac{a.b}{|b|^2}\vec{b} = \frac{(kb).b}{|b|^2}\vec{b} = \frac{k\cancel{|b|^2}}{\cancel{|b|^2}}\vec{b} = k\vec{b} = \vec{a} \Rightarrow \vec{a}' = \vec{a}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| دی ماه ۹۸ | ۲ | درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.<br>ت)اگر برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$ در این‌صورت $\theta = \frac{\pi}{2}$ است( $\theta$ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است). | ۰/۲۵ |

$$a.b = |a||b| \Rightarrow \cancel{|a||b|}\cos\theta = \cancel{|a||b|} \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$$ نادرست

| | | | |
|---|---|---|---|
| دی ماه ۹۸ | ۱۳ | بردارهای $\vec{a} = (1,2,3)$ و $\vec{b} = (-2,0,2)$ مفروض‌اند:<br>الف) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ را به‌دست آورید. | ۱ |

$$\vec{a}' = \frac{a.b}{|b|^2}\vec{b} \qquad a.b = -2+0+6 = 4 \qquad |b| = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8}$$

$$\vec{a}' = \frac{4}{8}(-2,0,2) = \frac{1}{2}(-2,0,2) \Rightarrow \vec{a}' = (-1,0,1)$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| دی ماه ۹۸ | ۱۵ | اگر بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ باشد، ثابت کنید: $\vec{a}.\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$ | ۱ |

$a(a_1, a_2, a_3)$

$$\left.\begin{array}{l} a.a = a_1.a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 \Rightarrow a.a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \Rightarrow |a|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a.a = |a|^2$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| خرداد ۹۹ | ۱۶ | بردارهای $\vec{a} = (-2,0,2)$ و $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$ را در نظر بگیرید.<br>الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست آورید.<br>ب) تصویر قائم بردار $\vec{a} + \vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به‌دست آورید. | ۲ |

الف) $b(0,2,2)$ $\quad |b| = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8}$ $\quad |a| = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8}$ $\quad a.b = 0+0+4 = 4$

$$\cos\theta = \frac{a.b}{|a||b|} = \frac{4}{\sqrt{8}\times\sqrt{8}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$$

ب) $C = a+b = (-2,2,4)$

$\vec{C}.\vec{b} = 0+4+8 = 12$

$$C' = \frac{C.b}{|b|^2}\vec{b} = \frac{12}{8}(0,2,2) = \frac{3}{2}(0,2,2) \Rightarrow C' = (0,3,3)$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| خرداد ۹۹ - خارج کشور | 2 | درستی یا نادرستی گزاره های زیر را معلوم کنید.<br>د) برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، نامساوی $\lvert\vec{a}\cdot\vec{b}\rvert \geq \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$ برقرار است. | ۰/۲۵ |

نادرست $\quad |a.b| \leq |a||b|$ رابطه کوشی شوارتز

| | | | |
|---|---|---|---|
| خرداد ۹۹ - خارج از کشور | 13 | زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=(\circ,-1,-1)$ و $\vec{b}=(2,-1,-2)$ را به دست آورید. | 1/25 |

$a.b = \circ + (1) + (2) = 3 \qquad |a| = \sqrt{\circ+1+1} = \sqrt{2} \qquad |b| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

$\cos\theta = \dfrac{a.b}{|a||b|} = \dfrac{\cancel{3}}{\sqrt{2}\times\cancel{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ$

| | | | |
|---|---|---|---|
| خرداد ۹۹ - خارج کشور | 15 | بردار های $\vec{a}=(-4,3,-5)$ و $\vec{b}=(1,-1,1)$ را در نظر بگیرید.<br>الف) تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$ را به دست آورید. | 1 |

$a.b = -4-3-5 = -12 \qquad |b| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$\vec{a}' = \dfrac{a.b}{|b|^2}\vec{b} = \dfrac{-12}{3}(1,-1,1) \Longrightarrow \vec{a}' = (-4,4,-4)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| شهریور ۹۹ | ۱۶ | بردارهای $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $\vec{b}=(1,-1,\circ)$ را در نظر بگیرید<br>الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بدست آورید | 1 |

$a.b = 2+1+\circ = 3 \qquad |a| = \sqrt{4+1+4} = 3 \qquad |b| = \sqrt{1+1+\circ} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \dfrac{a.b}{|a||b|} = \dfrac{3}{3\times\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \theta = 45^\circ$

| | | | |
|---|---|---|---|
| دی ماه ۹۹ | ۱۵ | برای هردوبردارغیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید: اگر $\vec{a}\cdot\vec{b}=\circ$ باشد آنگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند. | ۱ |

$a.b = \circ \Longrightarrow |a||b|\cos\theta = \circ \Longrightarrow \begin{cases} |a| = \circ & \text{غ ق ق} \\ |b| = \circ & \text{غ ق ق} \\ \cos\theta = \circ \Longrightarrow \boxed{\theta = 90^\circ} \end{cases}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| دی ماه ۹۹ | ۱۶ | بردارهای $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $\vec{b}=(1,-1,\circ)$ رادرنظربگیرید. تصویرقائم بردار $\vec{a}$ رابر امتداد بردار $\vec{b}$ بیابید. | ۱ |

$a.b = 2+1+\circ = 3 \qquad |b| = \sqrt{1+1+\circ} = \sqrt{2}$

$a' = \dfrac{a.b}{|b|^2}\vec{b} = \dfrac{3}{2}(1,-1,\circ) \Longrightarrow a'\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2},\circ\right)$

## ضرب خارجی دو بردار

اگر $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند حاصل ضرب خارجی ( برداری ) دو بردار یک **بردار** است که عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است که از دستور زیر بدست می آید.

$\vec{a}=(a_1,b_1,c_1)$ $\quad \vec{b}(a_2,b_2,c)$

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad |a\times b|=|a||b|\sin\theta$$

**نکته مهم :** بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ بر صفحه $ab$ عمود است، پس بر هر بردار به شکل $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ عمود است.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | ثابت کنید : دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$ . | ۱۴ | خرداد ـ ۹۸ |

$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta \Rightarrow 0=|a||b|\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} |a|=0 & \text{غقق} \\ |b|=0 & \text{غقق} \\ \sin\theta=0 \Rightarrow \theta=0 \ \text{یا}\ \theta=180 \Rightarrow \vec{a}\parallel\vec{b} \end{cases}$$

$$a\parallel b \Rightarrow \theta=0 \ \text{یا}\ \theta=180 \Rightarrow \sin\theta=0$$

$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta=|a||b|\times 0 \Rightarrow |a\times b|=0$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۰/۷۵ | بردارهای $\vec{a}=(1,-3,2)$ و $\vec{b}=(-2,1,-5)$ را در نظر بگیرید.<br>ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنویسید. | ۱۳ | خرداد ۹۸ |

حاصلضرب خارجی دو بردار بر هر دو آنها عمود است

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix}=i(15-2)-j(-5+4)+k(1-6)=13i+j-5k=(13,1,-5)$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | دو بردار $\vec{a}=(3,-2,1)$ ، $\vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ را در نظر بگیرید.<br>پ) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را پیداکنید. | ۱۵ | خرداد ۹۹ |

بردار ضرب خارجی آنها بر هر دو بردار عمود است

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=i(2-1)-j(-3+2)+k(3-4)=i+j-k=(1,1,-1)$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| شهریور ۹۹ | ۱۶ | بردارهای $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $\vec{b}=(1,-1,0)$ را در نظر بگیرید<br>ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید. | ۱ |

بردار ضرب خارجی دو بردار بر هر دو آنها عمود است

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=i(0+2)-j(0-2)+k(-2+1)=2i+2j-k=(2,2,-1)$$

## نکات ضرب برداری

۱) اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ در اینصورت $\vec{a}\|\vec{b}$ و برعکس

۲) $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$

۳)در ضرب برداری، بردارها خاصیت جابه جای نداریم یعنی $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ پس هیچ اتحادی در ضرب برداری برقرار نیست.

۴) $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ و $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ و $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

$i \to j \to k \to i$

۵) $\vec{a}\times(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}\pm\vec{a}\times\vec{c}$

۶) $|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}.\vec{b})^2=|\vec{a}|^2\times|\vec{b}|^2$ مهم

۷) زاویه بین دو بردار از رابطه زیر بدست می آید.

$$\tan\theta=\frac{|a\times b|}{|a.b|}$$

۸)اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع یک مثلث باشند، مساحت مثلث از دستور زیر بدست می آید.

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}|a\times b|$$

۹)اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع یک متوازی الاضلاع باشند، مساحت مثلث از دستور زیر بدست می آید.

$$S_{\square}=|a\times b|$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| دی ماه ۹۷ | ۱۵ | بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به طوری که $\|\vec{a}\|=3$، $\|\vec{b}\|=26$ ، $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=72$ مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را محاسبه کنید . | ۱/۵ |

$$|a\times b|^2+(a.b)^2=|a|^2|b|^2 \Rightarrow 72^2+(a.b)^2=26^2\times 3^2 \Rightarrow (a.b)^2=\underbrace{26^2}_{4\times 13^2}\times 9-9\times 8\times 72$$

$$\Rightarrow (a.b)^2=9\times 4\,(13^2-2\times 72)=9\times 4\,(169-144)=9\times 4\times 25 \xrightarrow{\text{جذر}} a.b=3\times 2\times 5=30$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| دی ماه ۹۷ | ۱۶ | مساحت متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a}=(1,0,1)$ و $\vec{b}=(0,1,1)$ تولید می‌شود را به دست آورید . | ۱ |

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=i(0-1)-j(1-0)+k(1-0)=(-1,-1,1)$$

$$S_{\square}=|a\times b|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| خرداد ۹۸ | ۱۶ | اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب ۴ و ۶ و $\vec{a}.\vec{b}=12$ باشد ، مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست آورید. | ۱/۲۵ |

$$|a\times b|^2+(a.b)^2=|a|^2.|b|^2 \Rightarrow |a\times b|^2+144=16\times 36 \Rightarrow |a\times b|^2=504-144=360 \Rightarrow$$

$$|a\times b|=6\sqrt{10}$$

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}|a\times b|=3\sqrt{10}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| شهریور ۹۸ | ۱۵ | اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد در $\mathbb{R}^3$ باشند ، حاصل $\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k})$ را به‌دست آورید. | ۱ |

$$\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k})=\vec{i}.\vec{i}=|i|^2=1$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| شهریور ۹۸ | ۲ | درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.<br>پ) برای بردارغیر صفر $\vec{a}$ در $\mathbb{R}^3$ داریم: $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ درست | ۰/۲۵ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| دی ماه ۹۸ | ۱۴ | اگر $A=(-1,2,0)$ و $B=(1,0,-1)$ و $C=(0,-1,1)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به‌دست آورید. | ۱/۵ |

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(2,-2,-1) \qquad \vec{b}=\overrightarrow{AC}=(1,-3,1)$$

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=i(-2-3)-j(2+1)+k(-6+2)=(-5,-3,-4)$$

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}|a\times b|=\frac{1}{2}\sqrt{25+9+16}=\frac{1}{2}\sqrt{50}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| نمونه سوال امتحان نهایی<br>خرداد ۹۹_خارج از کشور | 15 | بردار های $\vec{a}=(-۴,۳,-۵)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۱)$ را در نظر بگیرید.<br>ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنویسید.<br>ج) مساحت مثلث پدید آمده توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابید. | ۱٫۵ |

حاصلضرب خارجی دو بردار بر هر دو آنها عمود است

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۴ & ۳ & -۵ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{vmatrix}=i(۳-۵)-j(-۴+۵)+k(+۴-۳)=(-۲,-۱,۱)$$

ب) $S_{\triangle}=\frac{۱}{۲}|a\times b|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱+۱}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| نمونه سوال امتحان نهایی<br>دی ماه ۹۹ | ۱۷ | مساحت متوازی الاضلاعی رابه دست آورید که توسط دو بردار $\vec{a}=(۳,۲,۱)$ و $\vec{b}=(۲,۰,۱)$ به وجود می آید. | ۱ |

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}=i(۲-۰)-j(۳-۲)+k(۰-۴)=(۲,-۱,-۴)$$

$$S_{\square}=|a\times b|=\sqrt{۴+۱+۱۶}=\sqrt{۲۱}$$

## ضرب مختلط سه بردار

اگر سه بردار $\vec{a}(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}(b_۱,b_۲,b_۳)$ و $\vec{c}(c_۱,c_۲,c_۳)$ سه بردار در فضا باشند، ضرب مختلط آنها را با $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ نشان می دهیم که از طریق زیر قابل محاسبه است.

$$a.(b\times c)=\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}$$

## نکات ضرب مختلط سه بردار

۱) شرط لازم و کافی برای اینکه سه بردار در یک صفحه باشند آن است که ضرب مختلط آنها صفر شود.

۲) ضرب مختلط سه بردار داری ویژگی زیر است.

$$a.(b\times c)=b.(c\times a)=c.(a\times b)$$

۳) خاصیت تکرار در ضرب مختلط به صورت زیر است.

$$a.(a\times b)=۰$$

۴) حجم متوازی السطوحی که بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه یال همرأس آن باشند، از رابطه زیر بدست می آید.

$$V=|a.(b\times c)|$$

۵) حجم هرم بنا شده روی سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ از دستور زیر حساب می شود.

$$V=\frac{۱}{۶}|a.(b\times c)|$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| دی ماه ۹۹ | ۲ | درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.<br>ت) برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، حاصل $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=0$ است. درست | ۰/۲۵ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| شهریور ۹۸ | ۱۶ | سه بردار $\vec{a}=(2,3,1)$ و $\vec{b}=(-1,1,0)$ و $\vec{c}=(2,1,-2)$ مفروض‌اند.<br>ب) حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود را به‌دست آورید. | ۱ |

$$a.(b\times c)=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=2(-2-0)-3(2-0)+1(-1-2)=-4-6-3=-13$$

$$V=|a.(b\times c)|=|-13| \Longrightarrow V=13$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| خرداد ۹۸ | ۱۵ | مقدار $m$ را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}=(1,m,-11)$ ، $\vec{b}=(2,3,-1)$ و $\vec{c}=(1,-1,3)$ در یک صفحه باشند. | ۱ |

اگر ۳ بردار در یک صفحه باشند پس حجم متوازی السطوح که با این ۳ بردار ساخته می‌شود صفر است چون اصلاً متوازی السطوحی ساخته نمی‌شود

$$a.(b\times c)=0 \Longrightarrow \begin{vmatrix}1 & m & -11\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=0 \Longrightarrow 1(9-1)-m(6+1)-11(-2-3)=0 \Longrightarrow$$

$$8-7m+55=0 \Longrightarrow 63=7m \Longrightarrow m=\frac{63}{7} \Longrightarrow m=9$$