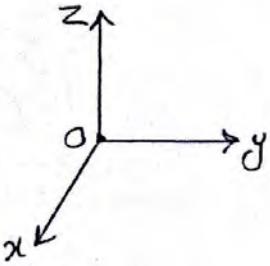
فصل ۳ : بردارها

فضای $\mathbb{R}^3$:

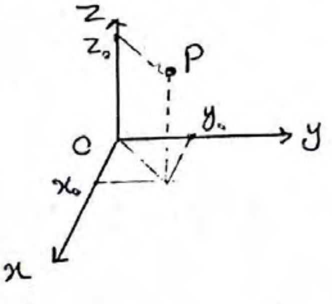
منظور از فضای $\mathbb{R}^3$، مجموعه تمام سه تایی های مرتبی مانند (x,y,z) است که در آنها x و y و z اعداد حقیقی باشند بعبارت دیگر:

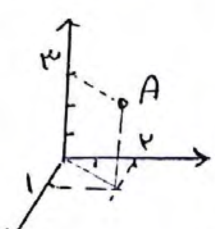
$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$$



دستگاه قائم مختصات یا محورهای مختصات دکارتی در فضا را بصورت $O.xyz$ نشان می دهند.

بطور کلی مختصات هر نقطه مانند P را در فضای $\mathbb{R}^3$ بصورت $P(x_0,y_0,z_0)$ مشخص می کنند که در آن x_0 طول نقطه P، y_0 عرض نقطه P و z_0 ارتفاع نقطه P نامیده می شود.





مثال) مختصات نقطه $A(1,2,3)$ را در فضا مشخص کنید.

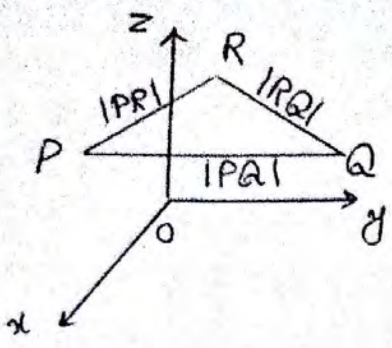
فرمول فاصله ی بین دو نقطه در فضا:

الف - $P(x_0,y_0,z_0)$ و $Q(x_1,y_1,z_1)$ دو نقطه در فضا باشند طول پاره خط PQ را با علامت $|PQ|$ نشان داده و از رابطه زیر بدست می آوریم:

$$|PQ|=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2}$$

مثال) الف - $A(2,-3,1)$ و $B(4,2,0)$ دو نقطه در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند طول AB را بیابید.

$$|AB|=\sqrt{(2-4)^2+(-3-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{30}$$



تذکر مهم:

۱) $|PQ|=0$ اگر و تنها اگر $P=Q$

۲) $|PQ|=|QP|$

۳) $|PQ|\leq|PR|+|RQ|$ (نامساوی مثلثی)

مثال ۱: نقطه $P(4-2m\,,\,m^2+m\,,\,m^2-4)$ مفروض است. مقدار m را چنان بیابید که:

الف) نقطه P روی محور y ها واقع باشد.

ب) نقطه P داخل صفحه xoz واقع شود.

حل: الف) برای آنکه نقطه ای روی محور y ها باشد باید x و z آن نقطه صفر باشد.

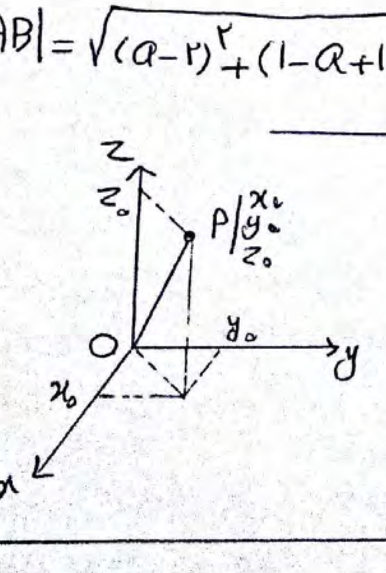
$$x_P=0 \Rightarrow 4-2m=0 \Rightarrow m=2$$
$$z_P=0 \Rightarrow m^2-4=0 \Rightarrow m=\pm 2$$
$$\xrightarrow{\cap} m=2 \Rightarrow P(0,6,0)$$

ب) برای آنکه نقطه ای داخل صفحه xoz باشد باید y آن نقطه صفر باشد.

$$y_P=0 \Rightarrow m^2+m=0 \Rightarrow m(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \Rightarrow P(4,0,-4) \\ m=-1 \Rightarrow P(6,0,-3) \end{cases}$$

مثال ۲: اگر $A(a,1,-1)$ و $B(2,a-1,2a)$ دو نقطه در فضا باشند به ازای کدام مقادیر a، طول پاره خط AB برابر $\sqrt{11}$ می باشد؟

$$|AB|=\sqrt{(a-2)^2+(1-a+1)^2+(-1-2a)^2}=\sqrt{11} \Rightarrow 6a^2-4a-2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-\frac{1}{3} \end{cases}$$



فاصله نقطه از مبدا مختصات:

فاصله نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ از مبدا مختصات $O(0,0,0)$ یعنی طول پاره خط $|OP|$ از رابطه زیر بدست می آید:

$$|OP|=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$$

مثال: به ازای چه مقادیری از a فاصله نقطه $P(a+1, 3, -1)$ از مبدا مختصات برابر $\sqrt{26}$ است؟

$$|OP| = \sqrt{(a+1)^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{26} \Rightarrow \sqrt{(a+1)^2+10}=\sqrt{26} \Rightarrow (a+1)^2+10=26$$

$$\Rightarrow (a+1)^2=16 \Rightarrow a+1=\pm 4 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-5 \end{cases}$$

فرمول مختصات نقطه وسط پاره خط:

اگر $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ دو نقطه دلخواه در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند مختصات نقطه M وسط پاره خط AB از رابطه‌های زیر بدست می‌آید:

$$x_M = \frac{x_A+x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A+y_B}{2}, \quad z_M = \frac{z_A+z_B}{2}$$

(هماهنگ - ۸۲)

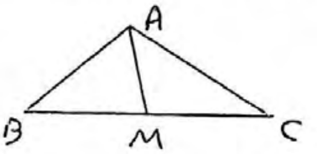
نقاط $A(1,2,1)$ و $B(3,1,4)$ و $C(1,5,2)$ سه راس مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ هستند. طول میانه AM را پیدا کنید:

$$x_M = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{3+1}{2}=2$$

$$y_M = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{1+5}{2}=3$$

$$z_M = \frac{z_B+z_C}{2} = \frac{2+4}{2}=3$$

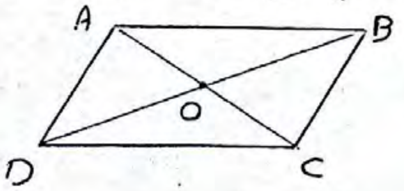
$M(2,3,3)$



$$|AM| = \sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6}$$

فرمول مختصات چهار راس متوازی الاضلاع در فضا:

در متوازی الاضلاع $ABCD$ رابطه‌های زیر بین مختصات چهار راس آن برقرار است:



$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \\ z_A+z_C=z_B+z_D \end{cases}$$

مثال: اگر $A(1,2,1)$ و $B(3,1,-1)$ و $C(2,1,2)$ مختصات سه راس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند مختصات D را بدست آورید:

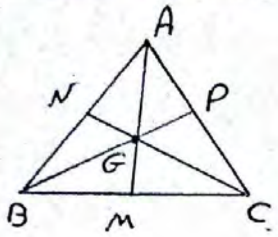
$$x_A+x_C=x_B+x_D \Rightarrow 1+2=3+x_D \Rightarrow x_D=0$$

$$y_A+y_C=y_B+y_D \Rightarrow 2+1=1+y_D \Rightarrow y_D=2$$

$$z_A+z_C=z_B+z_D \Rightarrow 1+2=-1+z_D \Rightarrow z_D=4$$

$D(0,2,4)$

فرمول مختصات مرکز ثقل مثلث در فضای $\mathbb{R}^3$:



در مثلث $A\hat{B}C$ نقطه برخورد سه میانه مثلث را مرکز ثقل مثلث نامیده و با G نامگذاری می‌کنیم

مختصات نقطه G از رابطه‌های زیر بدست می‌آید:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad , \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \quad , \quad z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

مثال: نقاط $A(1,2,-3)$ و $B(-2,1,1)$ دو راس مثلث $A\hat{B}C$ هستند اگر نقطه $G(1,-3,4)$ محل برخورد میانه‌های مثلث $A\hat{B}C$ باشند مختصات راس C را بیابید.

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow 1 = \frac{1 + (-2) + x_C}{3} \Rightarrow x_C = 4$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow -3 = \frac{2 + 1 + y_C}{3} \Rightarrow y_C = -12 \qquad C(4, -12, 14)$$

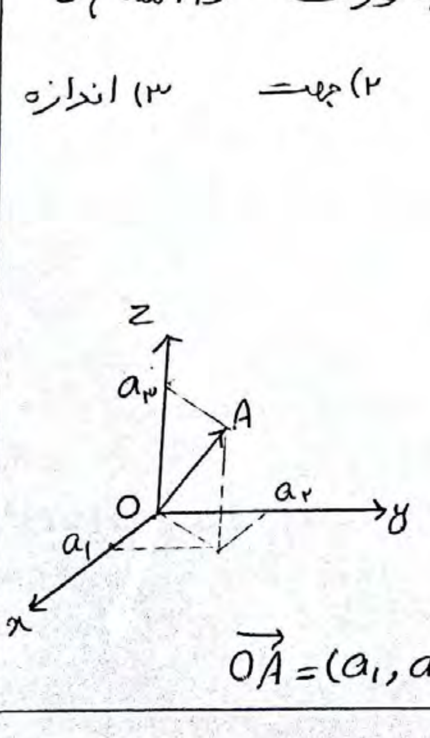
$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \Rightarrow 4 = \frac{-3 + 1 + z_C}{3} \Rightarrow z_C = 14$$

بردار در فضای $\mathbb{R}^3$:

هر پاره خط جهت دار را یک بردار هندسی می‌نامند. برداری که نقطه ابتدای آن A و نقطه انتهای آن B باشد را بصورت $\overrightarrow{AB}$ نشان می‌دهند

هر بردار دارای سه مشخصه است: ۱) راستا ۲) جهت ۳) اندازه

مولفه‌های یک بردار:



فرض کنید $A(a_1, a_2, a_3)$ نقطه‌ای دلخواه درفضای $\mathbb{R}^3$ باشد. پاره خط جهت دار با نقطه‌ی شروع مبدا $O(0,0,0)$ و نقطه پایان $A(a_1, a_2, a_3)$ را یک بردار در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌گوئیم.

$$\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$$

ویژگی‌های بردار در فضای $\mathbb{R}^3$:

۱) مختصات برداری که ابتدای آن نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ و مختصات انتهای آن $B(x_2, y_2, z_2)$ باشد عبارت است از:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1\,,\ y_2-y_1\,,\ z_2-z_1)$$

$A\begin{vmatrix}1\\2\\3\end{vmatrix}$ $B\begin{vmatrix}-2\\4\\1\end{vmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}=(-2-1\,,\ 4-2\,,\ 1-3)=(-3, 2, -2)$$

۲) برداری که ابتدا و انتهای آن یک نقطه باشد بردار صفر نامیده می‌شود و آن را بصورت $\vec{O}=(0,0,0)$ نشان می‌دهند.

۳) تساوی دو بردار: دو بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ مساوی هستند اگر و تنها اگر مولفه‌های آنها نظیر به نظیر برابر باشند.

$$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3)=(b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=b_1 \\ a_2=b_2 \\ a_3=b_3 \end{cases}$$

مثال) مقادیر m و n را طوری بیابید که دو بردار $\vec{a}=(2m, 3, -7)$ و $\vec{b}(4, n-1, -7)$ باهم مساوی باشند.

$2m=4 \Rightarrow m=2$ $\qquad$ $n-1=3 \Rightarrow n=4$

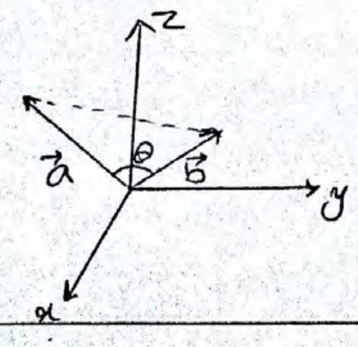
۴) اندازه (طول) یک بردار:

طول یا اندازه بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ را با علامت $|a|$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

مثال) طول بردار $\vec{a}=(-3, 0, 4)$ را بیابید.

$$|\vec{a}|=\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}=\sqrt{9+0+16}=\sqrt{25}=5$$



۵) زاویه بین دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را زاویه‌ای مانند θ در نظر می‌گیریم که:

$$0 \le \theta \le \pi$$

۶) ضرب عدد در بردار :

اگر m یک عدد حقیقی و $a(a_1, a_2, a_3)$ یک بردار باشد حاصلضرب m در بردار a را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$m\vec{a} = (ma_1, ma_2, ma_3)$$

مثال) $m=2$ ، $\vec{a}(1,2,-3)$

$$m\vec{a} = 2(1,2,-3) = (2,4,-6)$$

۷) قرینه بردار :

اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ یک بردار باشد قرینه $\vec{a}$ را با علامت $-\vec{a}$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$$

مثال) $\vec{a} = (-1,2,-3) \Rightarrow -\vec{a} = (1,-2,3)$

۸) جمع بردارها :

اگر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند مجموع آنها را با علامت $\vec{a}+\vec{b}$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$

بهمین ترتیب داریم :

$$\vec{a}-\vec{b} = (a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$$

مثال) بردارهای $\vec{a}(2,-1,3)$ و $\vec{b}(-1,3,-2)$ و $\vec{c}(2,4,1)$ مفروض است بردار $2a+b-c$ را بدست آورده سپس طول آنرا بیابید.

$$2a+b-c = 2(2,-1,3) + (-1,3,-2) - (2,4,1) = (1,-3,3)$$

$$|2a+b-c| = \sqrt{1^2+(-3)^2+3^2} = \sqrt{19}$$

دو بردار هم راستا :

دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را هم راستا می‌گویند هرگاه یکی مضربی از دیگری باشد

بعبارت دیگر : $\vec{b} = r\vec{a}$

مثال) $\vec{a} = (1,2,3)$ ، $\vec{b} = (4,8,12)$ ، $\vec{b} = 4\vec{a}$

خواص جمع بردارها:

اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار دلخواه و $\vec{0}=(0,0,0)$ بردار صفر و نیز r و s دو عدد حقیقی باشند آنگاه:

۱) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (خاصیت جابجایی جمع)

۲) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (خاصیت شرکت پذیری جمع)

۳) $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$ (عضو قرینه)

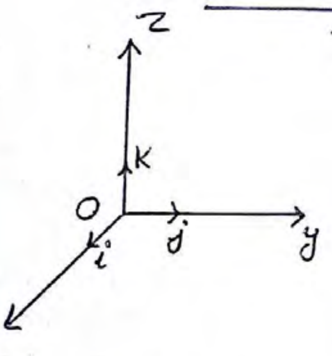
۴) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ (عضو خنثی)

۵) $r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$

۶) $(r+s)\vec{a}=r\vec{a}+s\vec{a}$

۷) $(rs)\vec{a}=\vec{r}(s\vec{a})$

۸) اگر $\vec{b}=r\vec{a}$ آنگاه: $|\vec{b}|=|r|\cdot|\vec{a}|$



بردارهای یکه محورهای مختصات در فضای $\mathbb{R}^3$:

هر بردار که طول (اندازه) آن یک واحد باشد بردار یکه نامیده می‌شود. بردار یکه در جهت محور طولها را با $\vec{i}=(1,0,0)$ و بردار یکه در جهت محور عرضها را با $\vec{j}=(0,1,0)$ و بردار یکه در جهت محور ارتفاع‌ها را با $\vec{k}=(0,0,1)$ نشان می‌دهیم هر بردار مانند $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ را می‌توان برحسب بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ نوشت:

$$a=(a_1,a_2,a_3)=(a_1,0,0)+(0,a_2,0)+(0,0,a_3)=a_1(1,0,0)+a_2(0,1,0)+a_3(0,0,1)=a\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

$$\boxed{a=(a_1,a_2,a_3)=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}}$$

مثال) (هماهنگ دیماه ۹۷)
اگر $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(3,1,-1)$ و $r=2$ باشد بردار $r\vec{b}-\vec{a}$ را بدست آورید:

$$\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}=(3,2,-1)$$

$$r\vec{b}-\vec{a}=2\vec{b}-\vec{a}=2(3,1,-1)-(3,2,-1)=(6,2,-2)-(3,2,-1)=(3,0,-1)$$

ضرب داخلی دو بردار:

۱) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر و زاویه بین آنها θ ($0\leq\theta\leq\pi$) باشد در اینصورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ با علامت $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|\cos\theta}$$

۲) اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند در اینصورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را با علامت $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

مثال ۱: زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $b=(1,-1,0)$ را پیدا کنید.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2\times1)+(-1\times-1)+(0\times2)=3$$

$$|a|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3 \qquad |b|=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|\cos\theta\Rightarrow 3=3\sqrt{2}\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۲: زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(2,2,2)$ و $\vec{b}=(2,0,-2)$ را بیابید.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2)(2)+(0)(2)+(+2)(-2)=0$$

$$|a|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=\sqrt{12}$$

$$|b|=\sqrt{2^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{8}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|.\cos\theta\Rightarrow 0=\sqrt{12}\times\sqrt{8}\cos\theta$$

$$\Rightarrow\cos\theta=0\Rightarrow\theta=90^\circ$$

مثال ۳: مقدار m را طوری تعیین کنید که زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(m,-1,2)$ و $\vec{b}=(1,-1,0)$ برابر 45° باشد.

$a.b = m+1+0 = m+1$

$|a| = \sqrt{m^2+1+4} = \sqrt{m^2+5}$

$|b| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$

$$\cos\alpha = \frac{a.b}{|a||b|} \Rightarrow \frac{m+1}{\sqrt{m^2+5}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 2(m+1) = 2\sqrt{m^2+5} \Rightarrow m+1 = \sqrt{m^2+5}$$

$$\Rightarrow m^2+2m+1 = m^2+5 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

خواص ضرب داخلی:

۱) چون حاصلضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است به آن ضرب اسکالر یا ضرب عددی نیز می‌گویند.

۲) اگر یکی از دو بردار a یا b یا هر دو برابر بردار صفر باشند حاصلضرب داخلی آنها صفر می‌باشد. $\vec{a}=\vec{0}$ یا $\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$

عکس رابطه درست نیست $\vec{a}.\vec{b}=0 \not\Rightarrow \vec{a}=\vec{0}$ یا $\vec{b}=\vec{0}$

۳) ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد. $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

۴) برای هر دو بردار a و b و هر عدد حقیقی m داریم: $m\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.m\vec{b}=m(\vec{a}.\vec{b})$

۵) حاصلضرب داخلی هر بردار در خودش برابر است با مجذور اندازه آن بردار

$$\vec{a}.\vec{a} = |a||a|\cos 0 = |a|^2$$

۶) اگر دو بردار برهم عمود باشند حاصلضرب داخلی آنها صفر است و برعکس

(اثبات هماهنگ دیماه ۸۷) $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow |a||b|\cos\theta=0 \Leftrightarrow \cos\theta=0 \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$

مثال) به ازای چه مقدار m دو بردار $\vec{a}=(-4,5,m)$, $\vec{b}=(1,-2,2)$ برهم عمودند.

$\vec{a}.\vec{b}=0 \Rightarrow (-4)(1)+(5)(-2)+(m)(2)=0 \Rightarrow -4-10+2m=0 \Rightarrow \boxed{m=7}$

۷) ضرب داخلی بر روی جمع بردارها، خاصیت توزیع پذیری (پخشی) دارد.

$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ $\quad$ $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c} = \vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}$

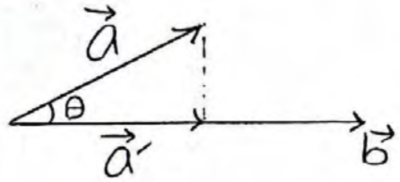
ضرب داخلی بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$:

چون بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ دو به دو بر هم عمودند پس:

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0 \quad , \quad \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

تصویر قائم یک بردار روی بردار دیگر:

دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را که زاویه بین آنها θ است در نظر می‌گیریم. تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ را با بردار $\vec{a'}$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:



$$\vec{a'}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|b|^2}\,\vec{b}$$

مثال ۱: تصویر قائم بردار $\vec{a}=(2,3,-2)$ را بر روی امتداد بردار $\vec{b}=(-1,2,-2)$ بیابید.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2+6+4=8 \qquad |\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$$

$$\vec{a'}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b}=\frac{8}{9}(-1,2,-2) \Rightarrow \vec{a'}=\left(-\frac{8}{9},\frac{16}{9},-\frac{16}{9}\right)$$

مثال ۲: تصویر قائم بردار $\vec{a}=(2,-1,2)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(-1,3,2)$ بیابید و اندازه آنرا بدست آورید.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2-3+4=-1 \qquad |\vec{b}|=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$$

$$\vec{a'}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b}=\frac{-1}{14}(-1,3,2) \Rightarrow \vec{a'}=\left(\frac{1}{14},-\frac{3}{14},-\frac{2}{14}\right)$$

$$|\vec{a'}|=\sqrt{\left(\frac{1}{14}\right)^2+\left(-\frac{3}{14}\right)^2+\left(-\frac{2}{14}\right)^2}=\sqrt{\frac{1+9+4}{14^2}}=\sqrt{\frac{14}{14^2}}=\sqrt{\frac{1}{14}}=\frac{\sqrt{14}}{14}$$

(هماهنگ دی ماه ۹۷)

مثال ۳: اگر $\vec{a}=(-1,-3,0)$ و $\vec{b}=(3,-4,2)$ و $\vec{c}=(-1,1,4)$ باشند آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را بدست آورید.

$$\vec b+\vec c=(2,-3,6) \qquad |\vec b+\vec c|=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=7$$

$$\vec a\cdot(\vec b+\vec c)=(-1,-3,0)\cdot(2,-3,6)=-2+9+0=7$$

$$\vec a'=\frac{\vec a\cdot(\vec b+\vec c)}{|\vec b+\vec c|^2}(\vec b+\vec c)=\frac{7}{49}(2,-3,6)=\frac{1}{7}(2,-3,6)=\left(\frac{2}{7},-\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)$$

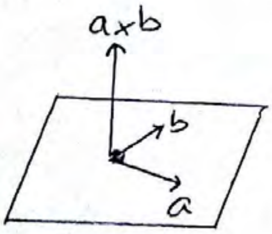
ضرب خارجی:

فرض کنیم $\vec a=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec b=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند ضرب خارجی $\vec a$ در $\vec b$ را با علامت $\vec a\times\vec b$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec i-\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec j+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec k$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2\ ,\ -a_1b_3+a_3b_1\ ,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

از نظر هندسی:



ضرب خارجی دو بردار بر هر دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ و صفحه تشکیل دهنده از دو بردار $\vec a$ و $\vec b$، عمود است.

مثال) اگر $\vec a=(1,2,-1)$, $\vec b=(0,1,2)$ مطلوب است محاسبه: $\vec a\times\vec b$

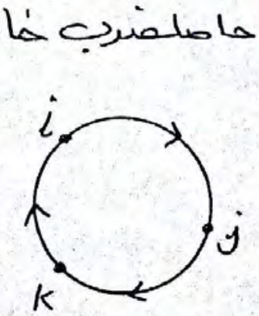
$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec i-\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec j+\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec k=(5,-2,1)$$

حاصلضرب خارجی بردارهای یکه $\vec i$ و $\vec j$ و $\vec k$:

$\vec i\times\vec j=\vec k$ $\qquad$ $\vec j\times\vec i=-\vec k$

$\vec j\times\vec k=\vec i$ $\qquad$ $\vec k\times\vec j=-\vec i$

$\vec k\times\vec i=\vec j$ $\qquad$ $\vec i\times\vec k=-\vec j$



مثال) حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

الف) $\vec{i}\times(\vec{i}\times\vec{k}) = \vec{i}\times(-\vec{j}) = -\vec{i}\times\vec{j} = -\vec{k}$

ب) $(\vec{j}\times\vec{k})\times\vec{k} = \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$

ویژگی های ضرب خارجی:

۱) ضرب خارجی دو بردار خاصیت جابجایی ندارد ولی: $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

۲) ضرب خارجی هر بردار در خودش برابر بردار صفر است. $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$

اثبات: $\vec{a}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{a} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{a} + \vec{a}\times\vec{a} = 0 \Rightarrow ۲(\vec{a}\times\vec{a}) = 0 \Rightarrow \vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$

نتیجه: $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$

۳) ضرب خارجی هر بردار در بردار صفر، برابر بردار صفر است. $\vec{a}\times\vec{0} = \vec{0}$

۴) برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و هر عدد حقیقی m داریم:

$$m\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times m\vec{b} = m(\vec{a}\times\vec{b})$$

۵) ضرب خارجی بردارها نسبت به جمع بردارها، خاصیت توزیع پذیری دارد:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c} \qquad (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$$

۶) ضرب خارجی بردارها خاصیت شرکت پذیری ندارد: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

۷) فرض کنیم $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه باشند در اینصورت:

$$\begin{cases} a\cdot(a\times b) = 0 \\ b\cdot(a\times b) = 0 \end{cases}$$

اثبات: فرض کنیم $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ در نتیجه:

$$a\cdot(a\times b) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_1 - a_2b_1) = 0$$

۸) برای هر دو بردار غیر صفر a و b که زاویه بین آنها θ باشد داریم:

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ (فرمول اندازه ضرب خارجی)

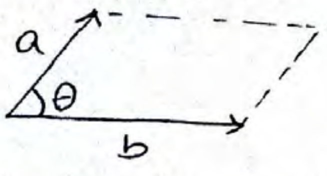
مثال) $|\vec{a}| = ۲ \quad |\vec{b}| = ۳ \quad \theta = ۳۰^\circ \quad |\vec{a}\times\vec{b}| = ۲\times۳\times\sin۳۰^\circ = ۲\times۳\times\frac{1}{۲} = ۳$

۹) برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، بردار $\vec{a}$ با $\vec{b}$ موازی است اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ یا $|\vec{a}\times\vec{b}|=0$

اثبات:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=0 \Leftrightarrow |a|\,|b|\sin\theta=0 \Leftrightarrow \sin\theta=0 \Rightarrow \theta=0 \text{ یا } \theta=\pi \Leftrightarrow a\parallel b$$

مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده روی دو بردار:



اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر باشند که زاویه بین آنها θ باشد مساحت متوازی الاضلاعی که توسط دو بردار ساخته می‌شود و $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور آن هستند برابر است با اندازه حاصلضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$:

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|$$

مثال ۱: مساحت متوازی الاضلاعی که بر روی بردارهای $\vec{a}=(2,-1,3)$ و $\vec{b}=(1,2,-2)$ ساخته می‌شود را بیابید.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\big((-1)(-2)-(3)(2),\ (3)(1)-(2)(-2),\ (2)(2)-(-1)(1)\big)=(-4,7,5)$$

$$\Rightarrow S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{16+49+25}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$$

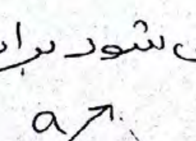
مثال ۲: (هماهنگ دی ماه ۹۷):

مساحت متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a}=(-1,0,1)$ و $\vec{b}=(0,1,1)$ تولید می‌شود را بدست آورید:

$\vec{a}\times\vec{b}=(-1,-1,-1)$ $\qquad S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

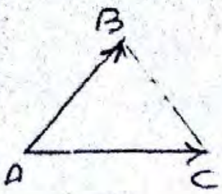
مساحت مثلث:

مساحت مثلثی که بوسیله دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود برابر است با:



$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

مثال) مساحت مثلث $A\hat{B}C$ به رئوس $A=(1,2,0)$ و $B=(3,0,-3)$ و $C=(5,2,6)$



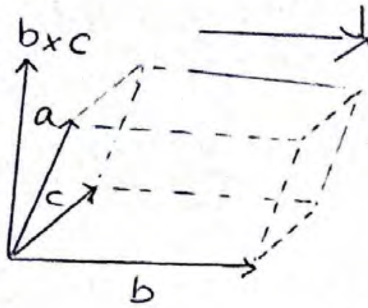
را بیابید

$$\vec{AB} = (3-1,\ 0-2,\ -3-0) = (2,-2,-3)$$

$$\vec{AC} = (5-1,\ 2-2,\ 6-0) = (4,0,6)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-12,-24,8)$$

$$S = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{144+576+64} = \frac{1}{2}\sqrt{784} = \frac{1}{2} \times 28 = 14$$



حجم متوازی السطوح:

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند که در یک صفحه نباشند حجم متوازی السطوحی که روی این سه بردار ساخته می شود بطوریکه سه بردار یالهای مجاور آن باشند از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})| = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$$

قدر مطلق

مثال) حجم متوازی السطوحی که روی بردارهای $\vec{a} = (2,-2,1)$ و $\vec{b} = (1,1,0)$ و $\vec{c} = (-1,0,1)$ ساخته می شود را بیابید.

$$\vec{b} \times \vec{c} = \big((1)(1)-(0)(0),\ (0)(-1)-(1)(1),\ (1)(0)-(1)(-1)\big) = (1,-1,1)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (2,-2,1) \cdot (1,-1,1) = 2+2+1 = 5$$

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |5| = 5$$

مثال) حجم متوازی السطوحی را بدست آورید که توسط بردارهای $\vec{a} = (1,1,0)$ و $\vec{b} = (0,1,1)$ و $\vec{c} = (1,0,1)$ تولید می شود.

$$\vec{b} \times \vec{c} = (1,1,-1) \qquad V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |1+1+0| = 2$$

سه بردار هم صفحه:

سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را هم صفحه می گویند هرگاه: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ (حجم متوازی السطوح صفر)

مثال) ثابت کنید سه بردار $\vec{a} = (2,-1,2)$ و $\vec{b} = (1,2,-3)$ و $\vec{c} = (3,-4,7)$ هم صفحه اند

$$\vec{b} \times \vec{c} = (2,-16,-10) \qquad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (2,-1,2) \cdot (2,-16,-10) = 4+16-20 = 0$$

تمرین ص ۸۰ (کتاب درسی)

۱) تصویر بردار $\vec{i}=(1,0,0)$ بر امتداد بردار $\vec{j}=(0,1,0)$ را بیابید.

$\vec{i}\cdot\vec{j}=0+0+0=0$ $\quad |\vec{j}|=\sqrt{0^2+1^2+0^2}=1$ $\quad \vec{i}'=\frac{\vec{i}\cdot\vec{j}}{|\vec{j}|^2}\vec{j}=\frac{0}{1}(0,1,0)=(0,0,0)$

۲) نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمود باشند آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری، بردار صفر می‌شود.

$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad \Rightarrow \vec{a}'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}b=\frac{0}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=0$

۳) نشان دهید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند آنگاه تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ برابر خود $\vec{a}$ می‌شود.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 0=|a||b|$

$\vec{a}'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{k\vec{b}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{k\vec{b}^2}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=k\vec{b}=\vec{a}$

$\vec{a},\vec{b}$ هم راستا $\Rightarrow \vec{a}=kb$

تمرین ص ۸۴ (کتاب درسی)

۱) برای هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ بدست آورید.

الف) $\vec{a}=(2,-1,2)$ $\quad \vec{b}=\vec{i}=(1,0,0)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2+0+0=2$ $\quad |\vec{b}|=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1$ $\quad \vec{a}'=\frac{a\cdot b}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{2}{1}(1,0,0)=(2,0,0)$

ب) $\vec{a}=(2,3,1)$, $\vec{b}=(3,2,1)\Rightarrow$ جواب $=a'=\left(\frac{39}{14},\frac{26}{14},\frac{13}{14}\right)$

ج) $\vec{a}=(1,1,0)$, $\vec{b}=(-1,2,4)\Rightarrow$ جواب $=a'=\left(\frac{-1}{21},\frac{2}{21},\frac{4}{21}\right)$

۲) فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طولهای ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ مقدار $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ را محاسبه کنید.

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{0}=0\\ \vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{b}\cdot\vec{0}=0\\ \vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{c}\cdot\vec{0}=0\end{cases}\Rightarrow |\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{b}|^2+$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+|\vec{c}|^2=0\Rightarrow 1+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})+4+9=0$$

$$\Rightarrow 2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})=-14\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-7$$

۳) سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$

$\vec{a}=(1,0,0)=\vec{i}$ $\quad \vec{b}=(0,1,0)=\vec{j}$ $\quad \vec{c}=(0,0,1)=\vec{k}$ $\quad \left.\begin{array}{l}\vec{a}\cdot\vec{b}=0\\ \vec{a}\cdot\vec{c}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{b}\neq\vec{c}$

۴) اگر $\vec{a}=(1,-3,4)$ و $\vec{b}=(3,-4,2)$ و $\vec{c}=(-1,1,4)$ باشند آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را بدست آورید.

$\vec{b}+\vec{c}=(4,-7,6)$

$|\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{16+49+36}=\sqrt{101}$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=-4-7+24=13$

$\vec{a}'=\frac{13}{101}(4,-7,6)=\left(\frac{52}{101},\frac{-91}{101},\frac{78}{101}\right)$

۵) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}=(1,-3,4)$ و $\vec{b}=(-2,1,-5)$ پیدا کنید.

$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=(15-2,-5+4,1-6)=(13,-1,-5)$

۶) سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$

$\vec{a}=(1,0,0)$ $\quad \vec{b}=(1,0,0)$ $\quad \vec{c}=(0,0,1)$ $\quad \left.\begin{array}{l}\vec{a}\times\vec{b}=(0,-1,0)\\ \vec{a}\times\vec{c}=(0,-1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{b}\neq\vec{c}$

۷) بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروضند بطوریکه $|\vec{a}|=3$ و $|\vec{b}|=26$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$ مقدار $\vec{a}\cdot\vec{b}$ را محاسبه کنید (هماهنگ دیماه ۹۷)

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \Rightarrow 72=3\times 26\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{12}{13}$

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{169}}=\pm\frac{5}{13}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=3\times 26\times\left(\pm\frac{5}{13}\right)=\pm 30$

۸) مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A=(3,5,7)$ و $B(5,5,0)$ و $C=(-4,0,4)$ داده شده است را بیابید.

$\vec{AB}=(2,0,-7)$

$\vec{AC}=(-7,-5,-3)$

$\vec{AB}\times\vec{AC}=(-35,55,-10)$

$|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{(-35)^2+55^2+(-10)^2}=\sqrt{4350}$

$S=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{4350}$

(پایان)