

بناام خدا

جزوه هندسه ۲

(يازدهم رياضي)

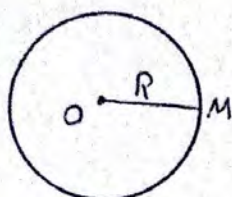
تهيه و تنظيم از :

امير حسين مطلبی دبیر ریاضی دبیرستان نمونه دولتی استاد شهریار ناحیه ۳ تبریز

* هزینه استفاده از این جزوه صلواتی بر محمد و آل محمد است *

دایره:

دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آنها از یک نقطه ثابت

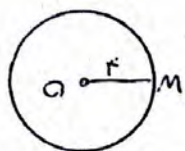


$C(O, R)$

بصنام مرکز برابر مقدار ثابتی باشد که این مقدار ثابت را شعاع دایره می نامیم دایره به مرکز O و شعاع R را

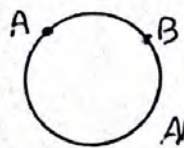
با علامت $C(O, R)$ نشان می دهیم.

مثال) نقطه ثابت O در صفحه داده شده است. اگر نقاط متحرکی مثل M در صفحه طوری قرار گیرند که همواره فاصله شان تا O برابر R باشد محیط منحنی را که این نقاط طی می کنند بیابیم.



حل: مکان دایره ای به مرکز O و شعاع $OA = R = r$ است.

محیط دایره $= 2\pi R = 2\pi(r) = 11\pi$

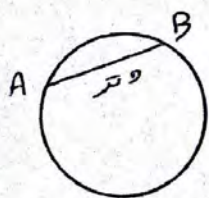


\widehat{AB} کمان AB

کمانی مستقیم از محیط دایره که بین دو نقطه متناهی قرار داشته باشد کمان دایره نامیده می شود.



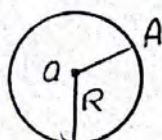
وتره: چاره خطی که دو سر کمان را بهم وصل می کند وتر نامیده می شود وتری که از مرکز دایره می گذرد قطر دایره نامیده می شود. نزدیکترین وتر دایره قطر دایره نامیده می شود.



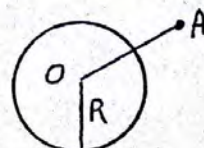
اوضاع نسبی نقطه و دایره:



نقطه داخل دایره است
 $OA < R$

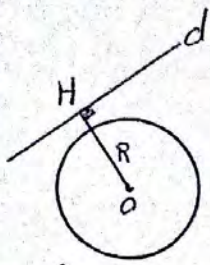


نقطه روی دایره است
 $OA = R$

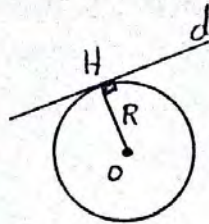


نقطه خارج دایره است
 $OA > R$

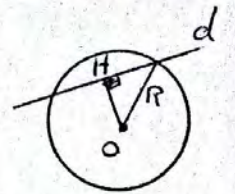
اوضاع نسبی خط و دایره :



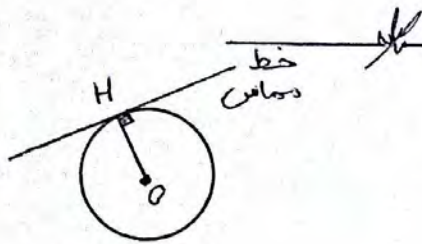
خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند
 $OH > R$



خط و دایره در یک نقطه مشترک اند
 $OH = R$



خط و دایره در دو نقطه مشترک اند
 $OH < R$

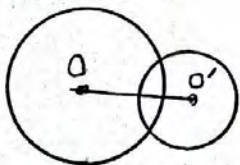


مماس بر دایره :
 اگر نقطه‌ای مانند H روی دایره باشد خطی را که از نقطه H می‌گذرد و بر شعاعی از دایره که از H عبوری کند، عمود باشد مماس بر دایره در نقطه H می‌گوئیم. شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

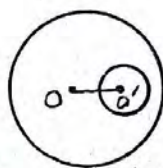


و منعیّت دو دایره نسبت به هم :

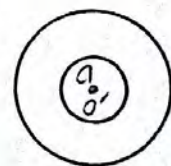
خط المرکزین $d = OO' =$ فاصله مراکز دو دایره



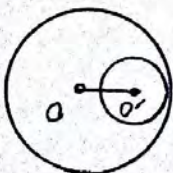
مقاطع
 $r - r' < d < r + r'$



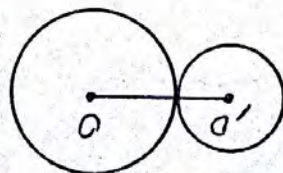
متداخل
 $d < r - r'$



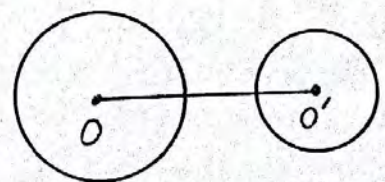
هم مرکز
 $d = 0$



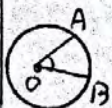
مماس داخل
 $d = r - r'$



مماس بیرون
 $d = r + r'$



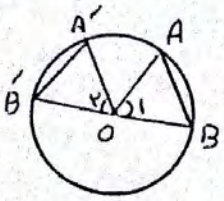
ممتّح
 $d > r + r'$



$\hat{AOB} = \hat{AB}$

زاویه مرکزی : زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره و دو ضلع آن شعاع دایره باشد.

قضیه: ثابت کنید در یک دایره کمانهای نظیر دو وتر مساوی باهم برابرند و برعکس.



$AB = A'B'$	فرض
$\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$	حکم

اثبات: دو مثلث $\triangle OAB$ و $\triangle OA'B'$ را تشکیل می‌دهیم:

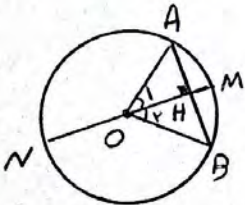
$AB = A'B'$ فرض مسئله $OA = OA' = R$ $OB = OB' = R$	$\xrightarrow{\text{فرض فرض}} \triangle OAB \cong \triangle OA'B' \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{A'B'}$
---	--

$\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$	فرض
$AB = A'B'$	حکم

عکس قضیه:

$\widehat{AB} = \widehat{A'B'} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$ $OA = OA' = R$ $OB = OB' = R$	$\xrightarrow{\text{فرض فرض}} \triangle OAB \cong \triangle OA'B' \Rightarrow AB = A'B'$
---	--

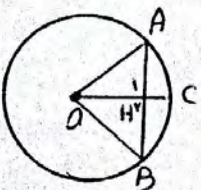
قضیه: ثابت کنید در هر دایره قطر عمود بر وتر، وتر و کمان نظیر آنرا نصف می‌کند.



$MN \perp AB$	فرض
$\widehat{AM} = \widehat{MB}$ و $AH = BH$	حکم

$OA = OB = R$ $OH = OH$ مشترک	$\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle OAH \cong \triangle OBH \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{MB}$ $AH = BH$
----------------------------------	--

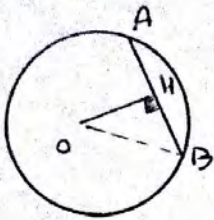
قضیه: ثابت کنید در هر دایره خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از دایره وصل می‌کند بر آن وتر عمود است.



$AH = BH$	فرض
$OC \perp AB$	حکم

$OA = OB = R$ مشترک $AH = BH$ مشترک $AH = BH$ فرض	$\xrightarrow{\text{فرض فرض}} \triangle OAH \cong \triangle OBH \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \Rightarrow \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \Rightarrow OC \perp AB$
---	---

قضیه: ثابت کنید فاصله وتر به طول L در دایره‌ای به شعاع R تا مرکز دایره برابر است با:



$$OH = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - L^2}$$

اثبات: $OH \perp AB$ و $AB = L$

$$OB^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow R^2 = OH^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^2 \Rightarrow R^2 = OH^2 + \frac{1}{4}L^2$$

$$\Rightarrow OH^2 = R^2 - \frac{1}{4}L^2 \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{4R^2 - L^2}}{2}$$

نسبت: فاصله مرکز دایره $C(0, d)$ از وتر AB به طول L کدام است؟

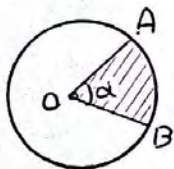
$\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

حل: گزینه ب

$R = d$

$L = L$

$$OH = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - L^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4(d)^2 - L^2} = \frac{1}{2} \sqrt{100 - 44} = \frac{1}{2} \sqrt{56} = \frac{4}{2} = 2$$



قطاع دایره:

ناحیه‌ای از درون و روی دایره را که به دو شعاع دایره و کمان دایره محدود است، یک قطاع دایره می‌نامند.

قضیه: اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(0, R)$ به حسب درجه مساوی

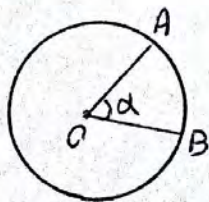
$$L = \frac{\pi R \alpha}{180}$$

α باشد نشان دهید طول کمان AB برابر است با:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$

و مساحت قطاع برابر است با:

(α به حسب درجه)



اثبات: در دایره $C(0, R)$ زاویه مرکزی روبرو

به کمان $AB = L$ است. داریم:

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{L}{2\pi R} \Rightarrow L = \frac{\alpha \cdot 2\pi R}{360} \Rightarrow L = \frac{\pi R \alpha}{180}$$

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{S_{قطاع}}{\pi R^2} \Rightarrow S_{قطاع} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$

مثال ۱: طول کمان روبه رو به زاویه ۳۰° در دایره‌ای به شعاع ۳ cm را بر حسب متر بیابید.

$$R = ۳\text{ cm} \div ۱۰۰ = \frac{۳}{۱۰}\text{ m}$$

$$l = \frac{\pi R \alpha}{۱۸۰^\circ} = \frac{\pi \times \frac{۳}{۱۰} \times ۳۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{۳\pi}{۴۰} \Rightarrow l = \frac{\pi}{۲۰}\text{ m}$$

مثال ۲: اگر طول کمان روبه رو به زاویه ۲۴° در دایره $C(O, R)$ برابر ۴π باشد محیط و مساحت دایره را بیابید.

$$\alpha = ۲۴^\circ$$

$$l = ۴\pi$$

$$l = \frac{\pi R \alpha}{۱۸۰^\circ} \Rightarrow ۴\pi = \frac{\pi R \times ۲۴^\circ}{۱۸۰^\circ} \Rightarrow ۴R = ۱۲ \Rightarrow R = ۳$$

$$\text{محیط} = P = ۲\pi R = ۲\pi \times ۳ = ۴\pi$$

$$\text{مساحت} = S = \pi R^2 = \pi \times ۳^2 = ۹\pi$$

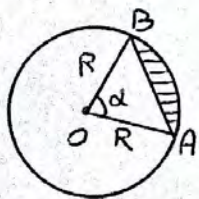
مثال ۳: قطاعی با زاویه ۴° در دایره $C(O, R)$ در نظریه کبریم. اگر مساحت این قطاع $\frac{۵۰\pi}{۳}$ باشد شعاع دایره را بیابید.

$$S = \frac{۵۰\pi}{۳}$$

$$\alpha = ۴^\circ$$

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{۳۶۰^\circ} \Rightarrow \frac{۵۰\pi}{۳} = \frac{\pi R^2 \times ۴^\circ}{۳۶۰^\circ} \Rightarrow R^2 = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۱۰$$

مثال ۴: مطابق شکل در دایره $C(O, R)$ دو قطاع با زاویه بین α بر حسب درجه نسبت به هم رسم شده اند. هندسه رئی را که محدود به وتر AB و دایره است، قطعه‌ای از دایره می‌نامیم. مساحت این قطعه را بر حسب α و R بیابید.



$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع OAB}} - S_{\Delta OAB}$$

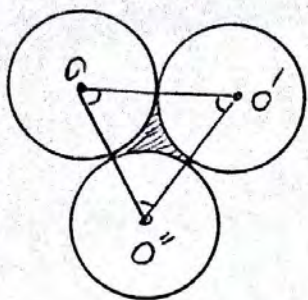
$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{۳۶۰^\circ} - \frac{1}{2} (OA \times OB \times \sin \alpha)$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{۳۶۰^\circ} - \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha \Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{1}{۲} R^2 \left(\frac{\pi \alpha}{۱۸۰^\circ} - \sin \alpha \right)$$

اگر زاویه مرکزی قطاع بر حسب رادیان باشد مساحت قطعه از فرمول زیر

$$S = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha) \quad (\alpha \text{ بر حسب رادیان}) \quad \text{برستی می آید}$$

مثال ۵: شعاع هر سه دایره برابر R است. مساحت قسمت‌های سفید را حساب کنید:

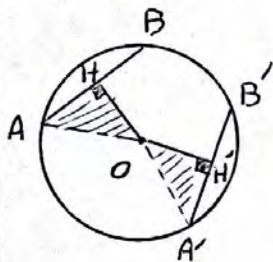


$$OO' = OO'' = O'O'' = 2R$$

$$\Delta_{OO'O''} \text{ متساوی الاضلاع} \Rightarrow S_{\Delta_{OO'O''}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(2R)^2 \sqrt{3}}{4} = R^2 \sqrt{3}$$

$$S_{\text{رشته}} = S_{\Delta_{OO'O''}} - \frac{S_{\text{شعاع}}}{\text{بضایره}} = R^2 \sqrt{3} - \frac{1}{4} \pi R^2 = R^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{4} \right)$$

قضیه: ثابت کنید اگر دو وتر مساوی باشند آنگاه فاصله آنها تا مرکز دایره مساوی است و برعکس.



$AB = A'B'$	فرض
$OH = OH'$	حکم

اثبات: O را به A و A' وصل می‌کنیم، می‌دانیم

قطر یا شعاع عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند:

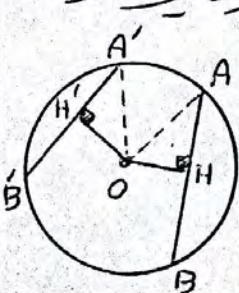
$$AB = A'B' \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{A'B'}{2} \Rightarrow AH = A'H'$$

$$OA = OA' = R \left\{ \begin{array}{l} \text{وتر و یک} \\ \text{منهج} \end{array} \right. \Rightarrow \Delta OAH \cong \Delta OA'H' \Rightarrow OH = OH'$$

$OH = OH'$	فرض	عکس قضیه:
$AB = A'B'$	حکم	

$$OA = OA' = R \left\{ \begin{array}{l} \text{وتر و یک} \\ \text{منهج} \end{array} \right. \Rightarrow \Delta OAH \cong \Delta OA'H' \Rightarrow AH = A'H' \Rightarrow 2AH = 2A'H' \Rightarrow AB = A'B'$$

قضیه: در دایره از دو وتر نابرابر آنکه بزرگتر است به مرکز دایره نزدیکتر است و برعکس:



$AB > A'B'$	فرض
$OH < OH'$	حکم

اثبات: می‌دانیم شعاع عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند.

$$AH = \frac{AB}{2} \text{ و } A'H' = \frac{A'B'}{2}, \text{ و } AB > A'B' \Rightarrow AH > A'H'$$

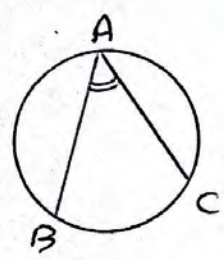
$$\begin{cases} \triangle OAH: OA^2 = OH^2 + AH^2 \\ \triangle OA'H': OA'^2 = OH'^2 + A'H'^2 \end{cases} \xrightarrow{OA=OA'=R} OH^2 + AH^2 = OH'^2 + A'H'^2 \Rightarrow AH^2 - A'H'^2 = OH'^2 - OH^2$$

$$AH > A'H' \Rightarrow OH^2 - OH'^2 > 0 \Rightarrow OH' > OH \Rightarrow OH' > OH$$

عکس قضیه: $\frac{OH < OH'}{AB > A'B'} \mid \begin{matrix} منصف \\ حکم \end{matrix}$

$$OH' > OH \Rightarrow OH' > OH \Rightarrow OH' - OH > 0 \left. \begin{matrix} از طرفی \\ AH^2 - A'H'^2 = OH'^2 - OH^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow AH^2 - A'H'^2 > 0 \Rightarrow AH^2 > A'H'^2 \Rightarrow AH > A'H'$$

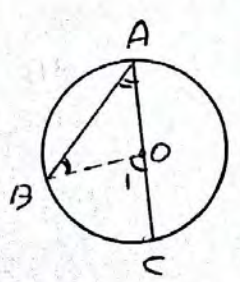
$$\Rightarrow \sphericalangle A > \sphericalangle A' \Rightarrow AB > A'B'$$



زاویه محاطی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و اضلاعش دو وتر از دایره باشند زاویه محاطی نامیده می‌شود.

قضیه: ثابت کنید اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف کمان روبروست

سه حالت در نظر می‌گیریم:
حالت اول: یک ضلع زاویه، قطر دایره باشد.

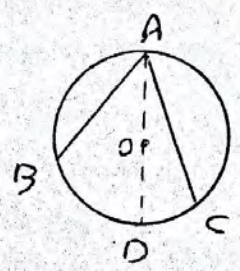


$$OA = OB = R \Rightarrow \widehat{OAB} \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$$

$$\widehat{O_1} = \hat{A} + \hat{B} \xrightarrow{\hat{A} = \hat{B}} \widehat{O_1} = \hat{A} + \hat{A} \Rightarrow \widehat{O_1} = 2\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{O_1}}{2}$$

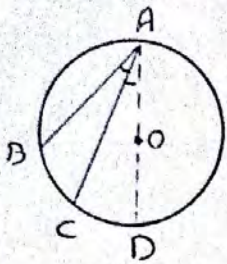
$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

حالت دوم: دو ضلع زاویه در دو طرف مرکز دایره باشند.



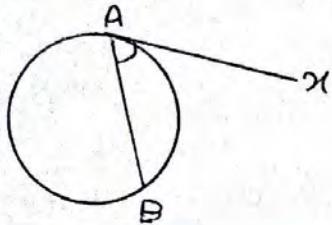
قطر AD را رسم می‌کنیم طبق حالت اول داریم:

$$\left. \begin{matrix} \widehat{BAD} = \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \widehat{DAC} = \frac{\widehat{DC}}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$



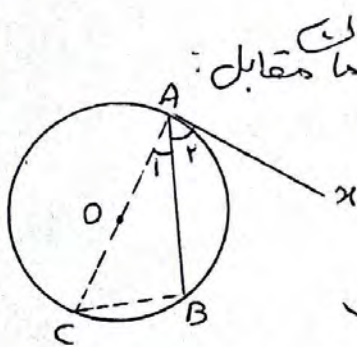
حالت سوم: دو ضلع در یک طرف مرکز باشند.
 قطر AD را رسم می‌کنیم طبق حالت الف داریم:

$$\hat{BAC} = \hat{BAD} - \hat{CAD} = \frac{\widehat{BD}}{2} - \frac{\widehat{CD}}{2} \Rightarrow \hat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$



زاویه ظلّی:

زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و یک ضلع آن وتر از دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره باشد زاویه ظلّی نامیده می‌شود.



قضیه: اندازه هر زاویه ظلّی برابر است با نصف کمان مقابل آن.

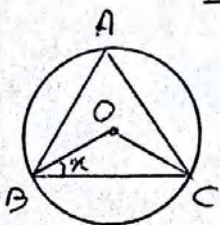
فرض	\hat{A}_1 ظلّی
کام	$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2}$

اثبات: قطر AC را رسم می‌کنیم \hat{B} محاطی و روبروی

قطر AC است پس: $\hat{B} = 90^\circ$ از طرفی می‌دانیم شعاع دایره در نقطه

تماس بر خط مماس عمود است پس: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$

$$\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{C} = 90^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}_1 + \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_2 = \frac{\widehat{AB}}{2}$$



تقدیرین: ثابت کنید در شکل مقابل: $\hat{x} = 90^\circ - \hat{A}$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O} = \widehat{BC} \\ \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\hat{O}}{2} \Rightarrow \hat{O} = 2\hat{A}$$

$$\hat{O}_{BC} : OB = OC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \hat{x}$$

$$\hat{O}_{BC} : \hat{B} + \hat{C} + \hat{O} = 180^\circ \Rightarrow \hat{x} + \hat{x} + 2\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{x} + 2\hat{A} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\hat{x} = 180^\circ - 2\hat{A} \Rightarrow \hat{x} = \frac{180^\circ - 2\hat{A}}{2} \Rightarrow \hat{x} = 90^\circ - \hat{A}$$

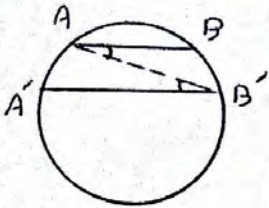


نسبت: مقدار \hat{A} کدام است؟

۵۶ (۱) ۲۸ (۲) ۴۲ (۳) ۴۲ (۴)

$$\hat{x} = 90^\circ - \hat{A} = 90^\circ - 2\hat{A} = 42^\circ$$

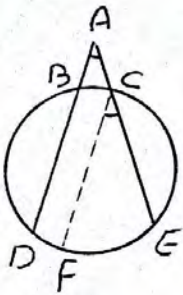
قضیه ثابت کنید در دایره، گمانه‌های محصور بین دو وتر موازی، یکدیگر برابرند و برعکس.



$AB \parallel A'B'$	منته
$\widehat{AA'} = \widehat{BB'}$	م

اثبات: A را به B' وصل می‌کنیم:

$$(AB \parallel A'B' \text{ و } AB' \text{ مورب}) \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B'} \Leftrightarrow \frac{\widehat{BB'}}{2} = \frac{\widehat{AA'}}{2} \Leftrightarrow \widehat{BB'} = \widehat{AA'}$$



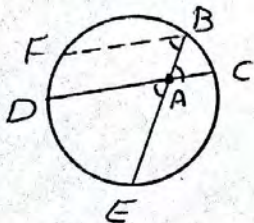
$$\hat{A} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{2} \quad \text{قضیه: ثابت کنید:}$$

اثبات: از نقطه C، خط CF موازی BD رسم می‌کنیم:

$$BD \parallel CF \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{DF}$$

$$AD \parallel CF \text{ و } AE \text{ مورب} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = \frac{1}{2} \widehat{EF}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \widehat{EF} \Rightarrow \hat{A} = \frac{1}{2} (\widehat{DE} - \widehat{DF}) \xrightarrow{\widehat{BC} = \widehat{DF}} \hat{A} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{2}$$



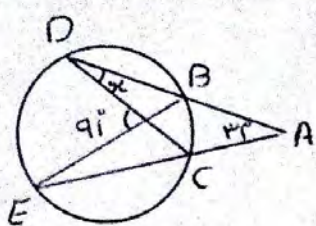
$$\hat{A} = \frac{\widehat{DE} + \widehat{BC}}{2} \quad \text{قضیه: ثابت کنید:}$$

اثبات: از نقطه B، خط BF موازی CD رسم می‌کنیم.

$$CD \parallel BF \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{FD}$$

$$BF \parallel CD \text{ , } BE \text{ مورب} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \frac{1}{2} \widehat{EF}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{2} (\widehat{FD} + \widehat{ED}) \xrightarrow{\widehat{BC} = \widehat{FD}} \hat{A} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{DE}}{2}$$



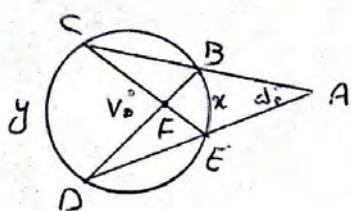
تمرین ۱: در شکل مقابل اندازه \hat{x} را بیابید.

$$3r = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{DE} - \widehat{BC} = 4r$$

$$9r = \frac{\widehat{DE} + \widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{DE} + \widehat{BC} = 18r$$

$$2\widehat{DE} = 14r \Rightarrow \widehat{DE} = 7r$$

$$3r = \frac{18r - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow 4r = 18r - \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{BC} = 14r \Rightarrow \hat{x} = \frac{4r}{r} \Rightarrow \hat{x} = 4^\circ$$

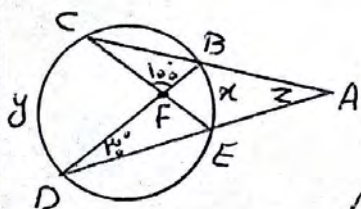


تمرین ۲: در شکل مقابل مقادیر x و y را بیابید.

$$70^\circ = \frac{x + y}{2} \Rightarrow x + y = 140^\circ$$

$$d^\circ = \frac{y - x}{2} \Rightarrow y - x = 100$$

$$\begin{cases} y + x = 140 \\ y - x = 100 \end{cases} \Rightarrow 2y = 240 \Rightarrow y = 120^\circ \text{ و } x = 20^\circ$$



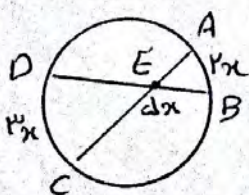
تمرین ۳: در شکل روبرو مقادیر x و y و z را بیابید.

$$\widehat{D} = \frac{\widehat{BE}}{2} \Rightarrow 30^\circ = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 60^\circ$$

$$\widehat{CFD} = 110^\circ - 100^\circ = 10^\circ$$

$$10^\circ = \frac{y + x}{2} \Rightarrow 14^\circ = y + 4^\circ \Rightarrow y = 10^\circ$$

$$z = \frac{y - x}{2} \Rightarrow z = \frac{100 - 40}{2} \Rightarrow z = 30^\circ$$



تمرین ۴: در شکل روبرو مقدار x را بیابید.

$$\widehat{DEC} = 110^\circ - dx$$

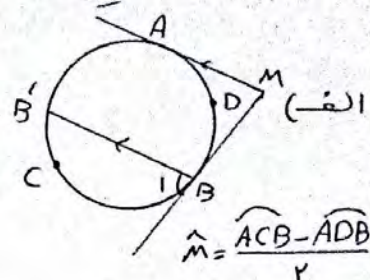
$$110^\circ - dx = \frac{2x + 3x}{2} \Rightarrow 340^\circ - 10x = dx \Rightarrow 340^\circ = 1dx$$

$$\Rightarrow x = \frac{340}{14} \Rightarrow x = 24^\circ$$

« حل تمرینات ص ۱۴ کتاب »

۱) در شکل‌های زیر ثابت کنید: (راحتی! از نقطه B خط موازی ضلع دیگر زاویه کشید)

از B خطی به موازات AM رسم می‌کنیم

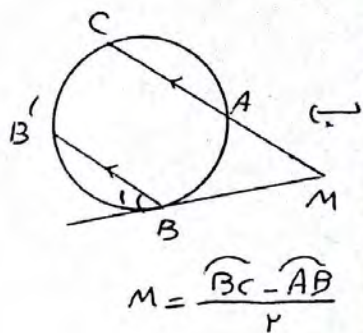


$$(BB' \parallel AM, \text{ مورب } AB) \Rightarrow \hat{M} = \hat{B}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \widehat{BB'} \\ \text{ظلی} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{BB'}}{2} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB'}}{2}$$

$$\underline{\widehat{AB'} = \widehat{ADB}} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$$

از B خطی به موازات MC رسم می‌کنیم:

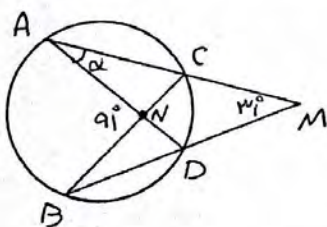


$$(BB' \parallel MC, \text{ مورب } MB) \Rightarrow \hat{M} = \hat{B}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \widehat{BB'} \\ \text{ظلی} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{BB'}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{B'C}}{2} \xrightarrow{\widehat{B'C} = \widehat{AB}} M = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$$

۲) در شکل مقابل اندازه زاویه α را بدست آورید.



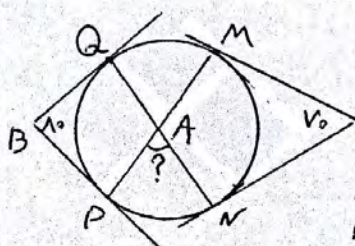
$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 31^\circ = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} - \widehat{CD} = 62^\circ$$

$$\hat{N} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 91^\circ = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{CD} = 182^\circ$$

$$\begin{cases} \widehat{AB} - \widehat{CD} = 62^\circ \\ \widehat{AB} + \widehat{CD} = 182^\circ \end{cases} +$$

$$\underline{2\widehat{AB} = 244^\circ} \Rightarrow \widehat{AB} = 122^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 40^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$$

۳) در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس اند. اندازه زاویه \hat{A} چند درجه است؟

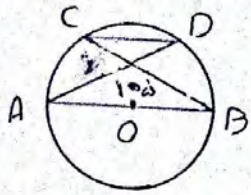


$$V_0^\circ = \frac{(34^\circ - \widehat{MN}) - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow 14^\circ = 34^\circ - 2\widehat{MN} \Rightarrow \widehat{MN} = 10^\circ$$

$$A_0^\circ = \frac{(34^\circ - \widehat{PQ}) - \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow 14^\circ = 34^\circ - 2\widehat{PQ} \Rightarrow \widehat{PQ} = 10^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{MQ} + \widehat{PN}}{2} = \frac{34^\circ - (\widehat{MN} + \widehat{PQ})}{2} = \frac{34^\circ - (10^\circ + 10^\circ)}{2} = \frac{14^\circ}{2} = 7^\circ$$

۱۴ در دایره رسم شده شکل مقابل $CD \parallel AB$ اندازه گمان CD را بدست آورید.



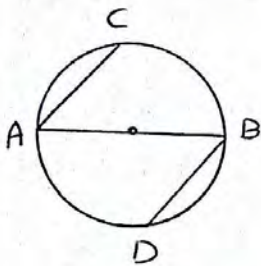
$$CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \quad (1)$$

$$v\hat{d} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} \Rightarrow 1d^\circ = \widehat{AC} + \widehat{BD} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 1d^\circ = 2\widehat{AC} \Rightarrow \widehat{AC} = v\hat{d} \Rightarrow \widehat{BD} = v\hat{d}$$

$$\widehat{CD} = 180^\circ - (\widehat{AC} + \widehat{BD}) = 180^\circ - (v\hat{d} + v\hat{d}) = 3^\circ$$

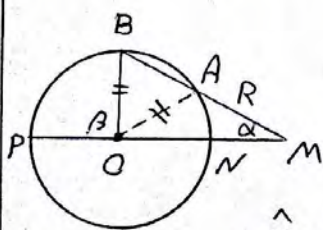
۱۵ در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی اند
ثابت کنید: $AC = BD$



$$AC \parallel BD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{BD} = 180^\circ - \widehat{AC}$$

$$\Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC}$$

۱۶ دایره $C(O, R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده اند که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$ باشد. α و β را بدین شکل دهید: $\beta = 3\alpha$

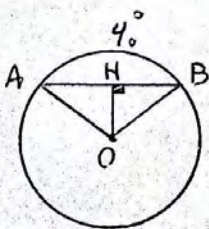


$$OA = MA = R \Rightarrow \triangle OAM \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{M} = \alpha$$

$$\widehat{AOM} \text{ مرکزی} = \widehat{AN} = \alpha$$

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{BP} - \widehat{AN}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{BP} - \alpha}{2} \Rightarrow 2\alpha = \widehat{BP} \left. \begin{array}{l} \widehat{BP} = \beta \text{ از طرفی} \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = 3\alpha$$

۱۷ در دایره $C(O, R)$ ، $\widehat{AB} = 4^\circ$ و $AB = 10$ ، فاصله O از وتر AB را بدست آورید.

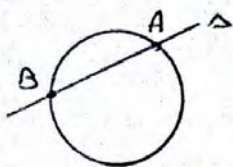


$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AOB} = 4^\circ \text{ مرکزی} \\ OA = OB = R \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAB \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow OB = 10, \widehat{B} = 4^\circ$$

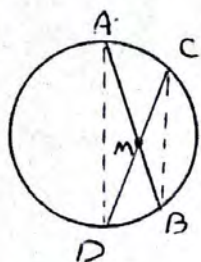
$$\triangle OBH: \sin \widehat{B} = \frac{OH}{OB} \Rightarrow \sin 4^\circ = \frac{OH}{10} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 \Rightarrow OH = 5\sqrt{3}$$

روابط طولی در دایره:

قاطع بردایره: خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع کند قاطع بردایره یا به طور خلاصه قاطع نامیده می شود.



قضیه: هرگاه خطهای شامل دو وتر داخله AB و CD در نقطه ای مانند M درون دایره یکدیگر را قطع کنند آنگاه:



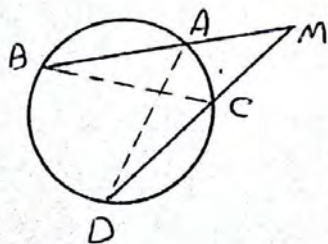
$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

اثبات: C را به B وصل می کنیم داریم:

$$\left. \begin{matrix} \hat{A} = \hat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \hat{B} = \hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{حالت} \\ \text{زاویه} \end{matrix} \Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle CMB \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC} = \frac{AD}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

قضیه: هرگاه خطهای شامل دو وتر داخله AB و CD در نقطه ای مانند M بیرون دایره یکدیگر را قطع کنند آنگاه:

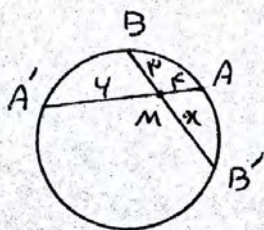


$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

$$\left. \begin{matrix} \hat{B} = \hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{حالت} \\ \text{زاویه} \end{matrix} \Rightarrow \triangle MBC \sim \triangle MAD \Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{MC}{MA} = \frac{MB}{MD}$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{MB}{MD} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

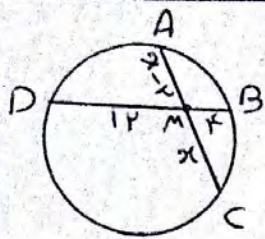
تعمیر: در شکل مقابل طول وتر BB' را بیابید.



$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB' \Rightarrow 3 \cdot 4 = 3 \cdot x \Rightarrow x = 4$$

$$BB' = 3 + x = 3 + 4 = 7$$

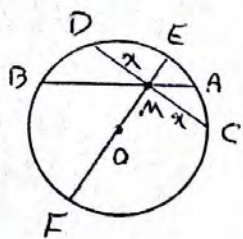
تقریب: در شکل روی مقدار x را بیابید.



$$MA \cdot MC = MB \cdot MD \Rightarrow x(x-2) = 4 \times 12 \Rightarrow x^2 - 2x = 48$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0 \Rightarrow (x-8)(x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 & \text{وق} \\ x=-6 & \text{غوق} \end{cases}$$

تقریب: نقطه M روی وتر AB به طول 9 واحد از دایره (C) چنانکه قدر دارد که آن وتر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاهترین وتر گذرنده از M را بیابید.



حل: مطابق شکل ابتدا وتر AB را در دایره C رسم می‌کنیم
برای رسم کوتاهترین وتر گذرنده از M ابتدا M را به
O مرکز دایره وصل کرده از دو طرف امتدای دهیم تا قطر

EF رسم شود سپس از M بر EF عمود می‌کنیم تا وتر DC رسم شود
می‌دانیم قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند پس:

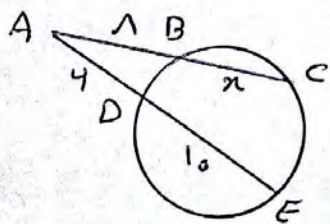
$$DM = DC = x$$

$$AB = 9 \Rightarrow MA = 3 \text{ و } MB = 4 \text{ (نسبت ۱ به ۲)}$$

$$MD \cdot MC = MA \cdot MB \Rightarrow x \cdot x = 3 \times 4 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12} \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

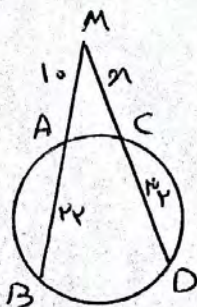
$$DC = 2x = 4\sqrt{3}$$

تقریب: در شکل‌های زیر مقادیر x را تعیین کنید:



$$AB \cdot AC = AD \cdot AE \Rightarrow 1(1+x) = 4(4+10)$$

$$\Rightarrow 4x + 1x = 44 \Rightarrow 5x = 44 \Rightarrow x = 8.8$$



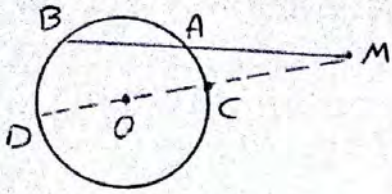
$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

$$10(10+2) = x(x+32) \Rightarrow 120 = x^2 + 32x$$

$$\Rightarrow x^2 + 32x - 120 = 0 \Rightarrow (x+40)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -40 & \text{غوق} \\ x = 3 & \text{وق} \end{cases}$$

تقریباً مطابق شکل $AB=3$ و $MA=5$ است. اگر محیط دایره برابر 1π باشد فاصله M از مرکز دایره را بیابید.

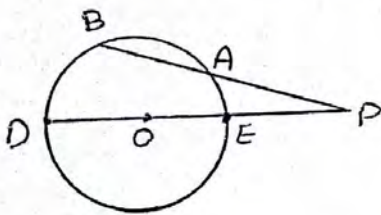


حل: M را به نقطه O مرکز دایره وصل کرده و امتداد می دهیم:
 $2\pi R = 1\pi \Rightarrow R=1/2$

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD \Rightarrow MA \cdot MB = (MO - OC)(MO + OD)$$

$$\Rightarrow MA \cdot MB = MO^2 - R^2 \Rightarrow 5(5+3) = MO^2 - 1/4 \Rightarrow MO^2 = 4 \Rightarrow MO = 2$$

تقریباً: نقطه P خارج دایره $C(O, R)$ است. اگر فاصله این نقطه تا مرکز دایره برابر d باشد، ثابت کنید حاصلضرب طول قطعات هر قاطعی که از P بردایره رسم می شود مقدار ثابت $d^2 - R^2$ است که این مقدار ثابت را قوت نقطه P نسبت به دایره (C) می گوئیم.

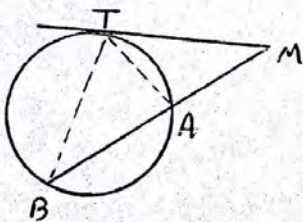


$PO = d$	فرض
$PA \cdot PB = d^2 - R^2$	حکم

حل: نقطه P را به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می دهیم:

$$PA \cdot PB = PE \cdot PD \Rightarrow PA \cdot PB = \left(\frac{PO}{d} - \frac{OE}{R}\right) \left(\frac{PO}{d} + \frac{OD}{R}\right) \Rightarrow PA \cdot PB = d^2 - R^2$$

قضیه: اگر از یک نقطه خارج دایره، یک مماس و یک قاطع نسبت به آن دایره رسم کنیم، مربع طول مماس برابر است با حاصلضرب دو قطعه قاطع.



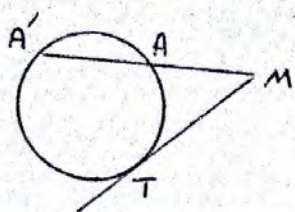
$MT^2 = MA \cdot MB$	فرض
	حکم

اثبات:

$$\left. \begin{aligned} \hat{MTA} &= \hat{AT} \\ \hat{MBT} &= \hat{AT} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{MTA} = \hat{MBT}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{MTA} &= \hat{MBT} \\ \hat{M} &= \hat{M} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle MTB \sim \triangle MTA \Rightarrow \frac{MA}{MT} = \frac{AT}{BT} = \frac{MT}{MB}$$

$$\Rightarrow \boxed{MT^2 = MA \cdot MB}$$

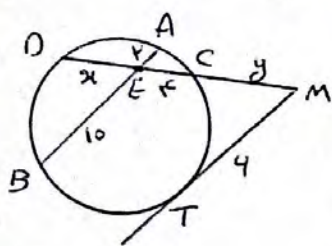


تعمیر: در شکل روبه‌رو از نقطه M بر دایره مماس و
 قاطعی رسم شده است.
 الف) اگر $MA = 4$ و $AA' = 7$ باشد طول MT را بیابید.
 ب) اگر $MA' = 11$ و $MT = 12$ باشد طول وتر AA' را بیابید.

الف) $MT^2 = MA \cdot MA' \Rightarrow MT^2 = MA \cdot (MA + AA') \Rightarrow MT^2 = 4(4 + 7)$
 $\Rightarrow MT^2 = 34 \Rightarrow MT = \sqrt{34}$

ب) $MT^2 = MA \cdot MA' \Rightarrow 12^2 = MA \cdot 11 \Rightarrow MA = \frac{144}{11}$

$AA' = MA' - MA = 11 - \frac{144}{11} = \frac{121 - 144}{11} = -\frac{23}{11}$

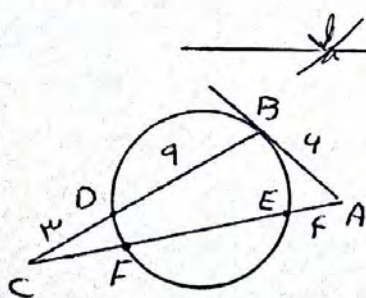


تعمیر: با توجه به شکل مطلوبین محاسبه
 مقادیر x و y:

$EA \cdot EB = ED \cdot EC \Rightarrow 2 \times 10 = x \times 4 \Rightarrow x = 5$

$MT^2 = MC \cdot MD \Rightarrow 4^2 = y(y + 9) \Rightarrow y^2 + 9y - 34 = 0$

$\Rightarrow (y + 12)(y - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -12 & \text{نقض} \\ y = 3 & \text{واقف} \end{cases}$



تعمیر: در شکل روبه‌رو AB بر دایره مماس است.
 محیط مثلث ABC را بیابید.

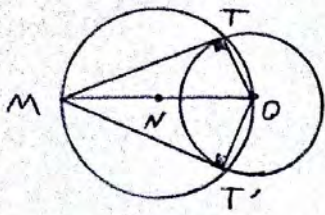
$AB^2 = AE \cdot AF \Rightarrow 4^2 = 4 \times AF \Rightarrow AF = 4$

$\Rightarrow EF = AF - AE = 4 - 9 = -5$

$CD \cdot CB = CF \cdot CE \Rightarrow 3(3 + 9) = CF(CF + FE) \Rightarrow 34 = CF(CF + 5)$

$\Rightarrow CF^2 + 5CF - 34 = 0 \Rightarrow (CF + 9)(CF - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} CF = -9 & \text{نقض} \\ CF = 4 & \text{واقف} \end{cases}$

محیط $\triangle ABC = AB + AC + BC = AB + (AE + EF + FC) + (CD + DB) = 4 + (4 + 5 + 4) + (3 + 9) = 31$



رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره :

برای رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره

مانند M ، بصورت زیر عمل می‌کنیم :

۱) نقطه M را به مرکز دایره وصل می‌کنیم .

۲) وسط MO را نقطه N می‌نامیم .

۳) از نقطه N دایره‌ای به شعاع MN رسم می‌کنیم محل تلاقی را T و T'

می‌نامیم MT و MT' دو مماس هستند و $MT = MT'$ زیرا :

$$\left. \begin{array}{l} \text{شعاع } OT = OT' \\ \text{مستقیم } MO = MO \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{وتروئید} \\ \text{مربع} \end{array} \Rightarrow \triangle MOT \cong \triangle MOT' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} MT = MT' \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \Rightarrow \text{مماس } TMT' \text{ بر } MO \end{array} \right.$$

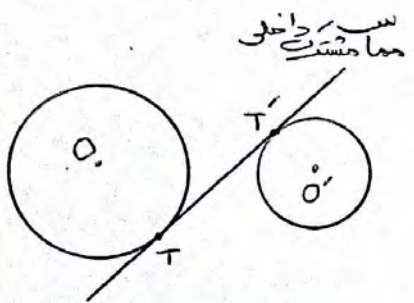
مماس مشترک دو دایره :

مماس مشترک دو دایره ، خطی است که بر هر دو دایره مماس باشد .

مماس مشترک دو دایره ، بر دو نوع است :

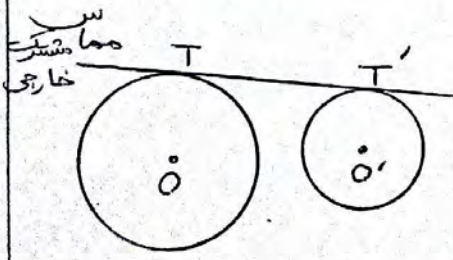
۱) مماس مشترک داخلی :

اگر دو دایره در طرفین خط مماس باشند ، خط مماس را مماس مشترک داخلی می‌گوئیم .



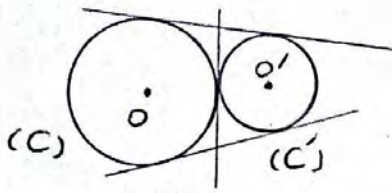
۲) اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند ،

خط مماس را مماس مشترک خارجی می‌گوئیم .

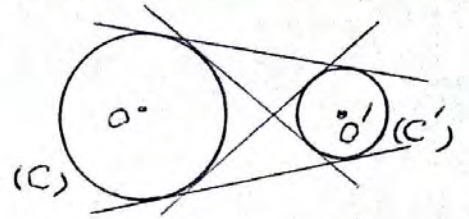


تک‌دایره: دودایره $C(O, R)$ و $C(O', R')$ با طول خط‌الرکزی d مفروض اند
 با در نظر گرفتن اوضاع نسبی این دودایره، در هر حالت مماس‌های مشترک
 داخلی و خارجی این دودایره را رسم کنید.

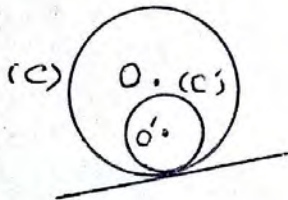
۲) دودایره مماس بیرونی اند.
 دو مماس مشترک خارجی و
 یک مماس مشترک داخلی دارند.



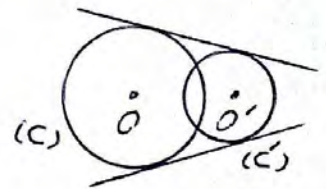
۱) دودایره متقاطع هستند
 دو مماس مشترک داخلی و
 دو مماس مشترک خارجی دارند.



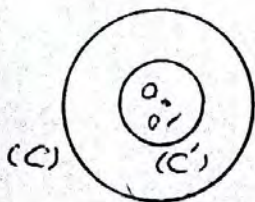
۴) دودایره مماس درونی اند.
 فقط یک مماس مشترک خارجی
 دارند.



۳) دودایره متقاطع اند.
 فقط دو مماس مشترک خارجی دارند.



۴) دودایره هم‌مرکزند
 هیچ مماس مشترکی ندارند.



۵) دودایره متداخل اند
 هیچ مماس مشترکی ندارند.

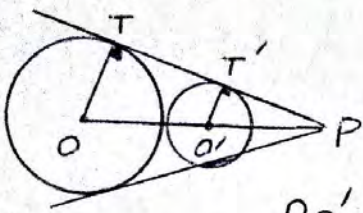


مثال) دودایره $C(O, ۳)$ و $C(O', ۲)$ مفروض اند. مرکز این دودایره نقاط $O(m-۱, ۲)$ و $O'(۳, -۲)$ هستند. این دو دایره در کل سه مماس مشترک داشته باشند مقدار m را بیابید.

$$OO' = R + R' \Rightarrow \sqrt{(m-1-3)^2 + (2-(-2))^2} = 3+2 \Rightarrow \sqrt{(m-4)^2 + 14} = 5$$

$$\Rightarrow (m-4)^2 + 14 = 25 \Rightarrow (m-4)^2 = 9 \Rightarrow m-4 = \pm 3 \Rightarrow m = 1 \text{ یا } 7$$

مثال) دو دایره به شعاع های ۲ و ۳ مماس خارج اند. مماس مشترک خارجی آنها یکدیگر را در نقطه P قطع کرده اند. فاصله P را تا مرکز دایره بزرگتر بیابید.



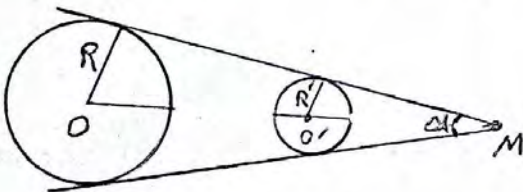
حل: مطابق شکل، شعاع به خط مماس عمود است

پس: $OT \parallel O'T'$ طبق قضیه تالس؛

$$\frac{PO'}{PO} = \frac{O'T'}{OT} \Rightarrow \frac{PO'}{PO'+OO'} = \frac{R'}{R} \Rightarrow \frac{PO'}{PO'+(2+3)} = \frac{2}{3}$$

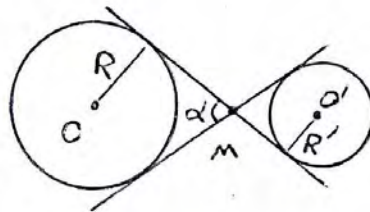
$$\Rightarrow 3PO' = 2PO' + 10 \Rightarrow PO' = 10 \Rightarrow PO = PO' + OO' = 10 + (2+3) = 15$$

فرمول محاسبه زاویه بین مماس های مشترک خارجی و داخلی:



$\alpha =$ زاویه بین مماس های مشترک خارجی

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|R - R'|}{d}$$



$\alpha =$ زاویه بین مماس های مشترک داخلی

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R + R'}{d}$$

مثال: شعاع دو دایره متخارج $2d$ و $7d$ است. اگر طول خط مرکزین این دو دایره برابر $4d$ باشد زاویه بین دو مماس مشترک داخلی دو دایره را بیابید.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R+R'}{d} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2d+7d}{4d} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{9d}{4d} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 4^\circ \Rightarrow \boxed{\alpha = 8^\circ}$$

مثال) زاویه بین مماس های مشترک خارجی دو دایره متخارج 9° است. اگر طول خط مرکزین این دو دایره $10\sqrt{2}$ بوده و شعاع یکی از دایره ها سه برابر شعاع دایره دیگر باشد، مساحت دایره بزرگتر را بیابید.

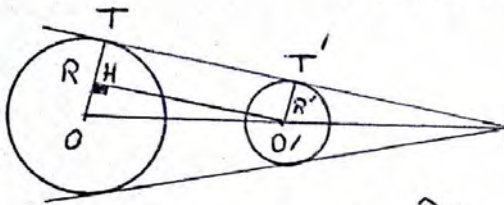
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|R-R'|}{d} \Rightarrow \sin \frac{90^\circ}{2} = \frac{|R-3R|}{10\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{2R}{10\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2R}{10\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 2R = 10 \Rightarrow \boxed{R = 5} \Rightarrow \text{شعاع دایره بزرگ} = 3R = 3 \times 5 = 15$$

$$S = \pi (15)^2 = 225\pi$$

قضیه: در دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ اگر طول مماس خارج باشد

$$\text{و } OO' = d \text{ ثابت کنید: } TT' = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} \text{ خارجی}$$



اثبات: از O' عمود $O'H$ را بر OT رسم

می کنیم چهارضلعی $TT'O'H$ مستطیل است

طبق رابطه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه $O'OH$ داریم:

$$(OO')^2 = O'H^2 + OH^2 \Rightarrow d^2 = TT'^2 + (R-R')^2 \Rightarrow TT'^2 = d^2 - (R-R')^2$$

$$\Rightarrow \boxed{TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}}$$

مثال ۱: دو دایره $C(O, 7)$ و $C'(O', 1)$ مفروضه. اگر طول خط مرکزین

این دو دایره ۱۰ باشد طول مماس مشترک خارجی این دو دایره را بیابید.

$$TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} = \sqrt{10^2 - (7-1)^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

مثال ۲: طول مماس مشترک خارجی دو دایره متقاطع به شعاع های ۱۲ و ۴ برابر ۸ است. طول خط مرکزین این دو دایره را بیابید.

$$TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} \Rightarrow 8 = \sqrt{d^2 - (12-4)^2} \Rightarrow 8 = \sqrt{d^2 - 64} \Rightarrow 64 = d^2 - 64$$

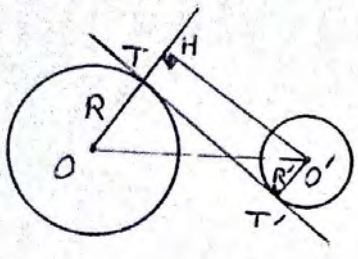
$$\Rightarrow d^2 = 128 \Rightarrow \boxed{d = 11.31}$$

مثال ۳: مقدار a را چنان تعیین کنید که طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های ۳ و ۸ و طول خط مرکزین ۱۳ برابر $(a-3)$ باشد.

$$TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} \Rightarrow a-3 = \sqrt{13^2 - (3-8)^2} \Rightarrow a-3 = \sqrt{169} \Rightarrow a-3 = 13 \Rightarrow \boxed{a = 16}$$

قضیه: در دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ طول مماس داخل TT' است.

با فرض $OO' = d$ ثابت کنید: $TT' = \sqrt{d^2 - (R+R')^2}$ داخلی



اثبات: از O' عمود $O'H$ را بر امتداد OT رسم می‌کنیم چهارضلعی $HO'TT'$ مستطیل است درصورت قائم الزویه $\widehat{O'OH}$ طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$(OO')^2 = OH^2 + O'H^2 \Rightarrow d^2 = (R+R')^2 + TT'^2 \Rightarrow TT'^2 = d^2 - (R+R')^2$$

$$\Rightarrow \boxed{TT' = \sqrt{d^2 - (R+R')^2}} \text{ داخلی}$$

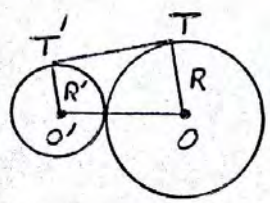
نست: حاصله مراکز دو دایره برابر 41 cm و شعاع دایره کوچک 4 cm و شعاع دایره بزرگتر $d \text{ cm}$ است. طول مماس مشترک داخلی دو دایره چند سانتیمتر است؟

- | | | | |
|--------|----------|--------|--------|
| ۴۰ (۱) | ۳۹,۸ (۳) | ۳۹ (۲) | ۴۱ (۴) |
|--------|----------|--------|--------|

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R+R')^2} = \sqrt{41^2 - (4+4)^2} = \sqrt{141 - 11} = \sqrt{130} = 40$$

قضیه: ثابت کنید طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس بیرونی برابر است با:

$$TT' = 2\sqrt{RR'}$$

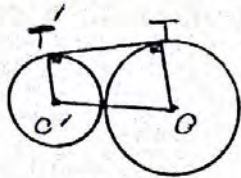


اثبات: چون دو دایره مماس بیرونی هستند پس: $OO' = d = R + R'$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} = \sqrt{(R+R')^2 - (R-R')^2} = \sqrt{(R^2 + R'^2 + 2RR') - (R^2 + R'^2 - 2RR')} = \sqrt{4RR'}$$

$$= \sqrt{4RR'} \Rightarrow \boxed{TT' = 2\sqrt{RR'}} \text{ خارجی}$$

مثال) مطابق شکل دایره‌ها به شعاع ۲ و ۸ بوده و مماس خارج اند. محیط و مساحت چهارضلعی $T'TOO'$ را مشخص کنید. ($T'T'$ مماس مشترک خارجی دو دایره است)



$$T'T' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{8 \times 2} = 2 \times 4 = 8$$

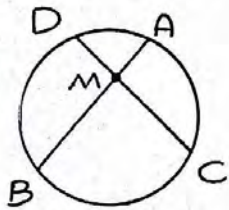
چهارضلعی $T'TOO'$ دوزخه قائم الزویه است.

$$S = \frac{(1+2) \times 8}{2} = 40$$

$$P = 8 + 2 + 10 + 8 = 28$$

تقسیم ۲۳

۱) در دایره $C(O, R)$ وتر AB و وتر CD به طول ۹ و ۱۱ سانتیمتر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11 \text{ cm}$ آنگاه وتر CD و وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟



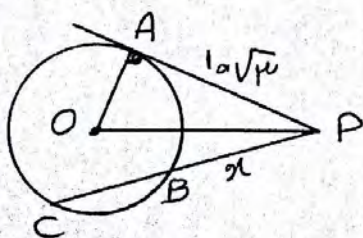
$$\frac{DM}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DM}{DM+MC} = \frac{1}{1+2} \Rightarrow \frac{DM}{CD} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{DM}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{DM = 3} \Rightarrow MC = 9 - 3 = 6$$

$$AM = x \Rightarrow MB = 11 - x \quad AM \cdot MB = DM \cdot MC \Rightarrow x(11-x) = 3 \cdot 6 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$AM = 2, \quad MB = 11 - 2 = 9$$

۲) از نقطه P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است) همچنین خط راستی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC = 20$ ، طول PB و PC را بیابید.



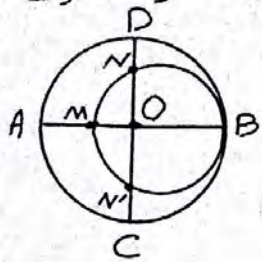
$$AP^2 = PB \cdot PC \Rightarrow (10\sqrt{3})^2 = x(20+x)$$

$$\Rightarrow 3000 = 20x + x^2 \Rightarrow x^2 + 20x - 3000 \Rightarrow (x-10)(x+300) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -300 \\ x = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 10 \Rightarrow BP = 10 \Rightarrow PC = 10 + 20 = 30$$

۳ در شکل مقابل دو دایره به هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر عمودند برهم عمودند اگر $AM=14$ و $ND=10$ شعاع های دو دایره را بیابا کنید.



حل: می دانیم قطر عمود بر هر وتر، و تر و کمان نظیرین را نصف می کند پس $ON=ON'$

$$AM=14 \text{ و } OM=x \text{ و } ON=ON'=y \text{ و } ND=10$$

در دایره کوچکتر دو وتر در داخل دایره متقاطعند پس داریم:

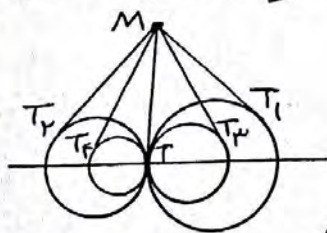
$$OM=OD \text{ (شعاع دایره بزرگ)} \Rightarrow 14+x=y+10 \Rightarrow y=4+x$$

$$ON \cdot ON' = OM \cdot OB \Rightarrow y \cdot y = x(14+x) \xrightarrow{y=4+x} (4+x)^2 = x(14+x)$$

$$\Rightarrow x^2 + 12x + 34 = 14x + x^2 \Rightarrow 34 = 2x \Rightarrow \boxed{x=9}$$

$$\text{شعاع دایره بزرگ} = 14+9=23 \quad \text{قطر دایره کوچک} = 23+9=32 \Rightarrow \frac{32}{2}=16 = \frac{32}{2} = 16$$

۴ مطابق شکل مقابل، تمام دایره ها در نقطه T به هم مماس اند. از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره ها مماس رسم کرده ایم ثابت کنید:



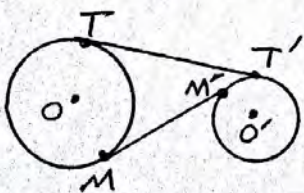
$$MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$$

حل: می دانیم دو مماسی که از نقطه ای خارج دایره بر آن رسم شود با هم برابرند از نقطه M دو مماس

بر دایره رسم شده پس $MT = MT_1$ در دایره کوچکتر از نقطه M نیز دو مماس

بر آن رسم شده پس $MT = MT_2$ به همین ترتیب $MT = MT_3 = MT_4 = \dots$

۵ طول شعاع های دو دایره متخارج را بیابا که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.

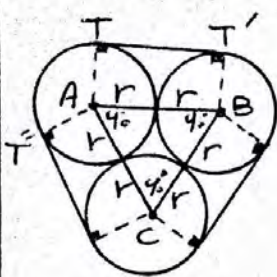


$$OO' = 8 \quad TT' = 3\sqrt{7} = \sqrt{49} \quad MM' = \sqrt{15}$$

$$TT'^2 = OO'^2 - (R-R')^2 \Rightarrow 49 = 64 - (R-R')^2 \Rightarrow R-R' = 1$$

$$MM'^2 = OO'^2 - (R+R')^2 \Rightarrow 15 = 64 - (R+R')^2 \Rightarrow R+R' = 7$$

$$\begin{cases} R - R' = 1 \\ R + R' = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 2R = 1 \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{2}}, \boxed{R' = \frac{1}{2}}$$



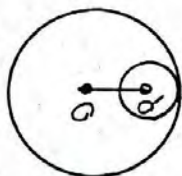
۴ سه دایره به شعاع های برابر r دو به دو به هم مماس اند مطابق شکل مقابل، این سه دایره به وسیله نخ بسته شده اند، نشان دهید طول این نخ برابر $4r + 2\pi r$ است همچنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$ است.

$$TT' = 2r \quad \widehat{TAT'} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 40^\circ) = 140^\circ \quad \widehat{TT'} = \frac{140^\circ}{360^\circ} (2\pi r) = \frac{7}{9}\pi r$$

$$\text{طول نخ} = 3(2r) + 3(\frac{7}{9}\pi r) = 4r + 2\pi r$$

$$S_{\text{محدود}} = S_{\triangle ABC} - S_{\text{سه دایره}} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2r)^2 - \frac{1}{2} \pi r^2 = r^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$$

۷ طول خط مرکزین دو دایره متداخل مساوی $2cm$ و مساحت ناحیه محدود بین آنها 14π سانتیمتر مربع است. طول شعاع های دو دایره را بیابید.



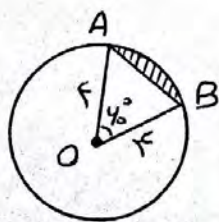
$$OO' = R - R' = 2$$

$$S_{\text{محدود}} = S_{\text{دایره بزرگ}} - S_{\text{دایره کوچک}} \Rightarrow 14\pi = \pi R^2 - \pi R'^2 = \pi(R^2 - R'^2)$$

$$\Rightarrow R^2 - R'^2 = 14 \Rightarrow (R - R')(R + R') = 14 \Rightarrow 2(R + R') = 14 \Rightarrow R + R' = 7$$

$$\begin{cases} R - R' = 2 \\ R + R' = 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{R = 5}, \boxed{R' = 3}$$

۸ مطابق شکل در دایره به شعاع r مساحت ناحیه سایه زده را بیابید. این ناحیه یک قطعه دایره نام دارد.



$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \hat{O} = \frac{1}{2} (r)(r) \sin 40^\circ = r^2 \sin 40^\circ$$

$$S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi (r^2) (40^\circ)}{360^\circ} = \frac{14\pi}{9} = \frac{14\pi}{9}$$

$$S_{\text{سایه زده}} = S_{\text{شکل}} - S_{\text{قطعه}} = \frac{14\pi}{9} - r^2 \sin 40^\circ$$

چند ضلعی های محیطی و محاطی:

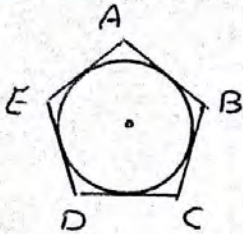
تعریف ۱: یک چند ضلعی را محیطی می گوئیم اگر فقط اگر دایره ای در

صفحه چند ضلعی وجود داشته باشد که بر تمام

امتلاعات آن مماس باشد. دایره گفته شده را دایره

محاطی چند ضلعی می گوئیم. در شکل روبه

پنج ضلعی محیطی است.



تعریف ۲: یک چند ضلعی را محیطی می گوئیم

اگر فقط اگر نیمساز داخلی تمام زاویه های

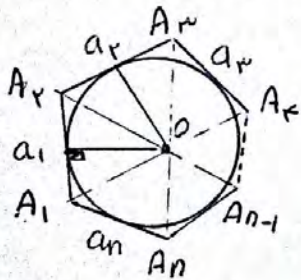
در یک نقطه هدرس باشند. این نقطه مرکز دایره

محاطی چند ضلعی است.



مثال) اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط $2P$ شعاع دایره

محاطی برابر r باشد ثابت کنید: $r = \frac{S}{P}$ یا $S = rP$



فرض	یک n ضلعی محیطی با محیط $2P$ و مساحت S است
حکم	$r = \frac{S}{P}$ (شعاع دایره محاطی)

اثبات: مطابق شکل مرکز دایره محاطی یعنی نقطه O

را به رئوس n ضلعی محیطی A_1, A_2, \dots, A_n وصل می کنیم. در این صورت

این n ضلعی به n مثلث تقسیم می شود که مساحت کل n ضلعی با جمع

مساحت این n مثلث مساوی است.

$$S = S_{\triangle OA_1A_2} + S_{\triangle OA_2A_3} + \dots + S_{\triangle OA_nA_1}$$

$$= \frac{a_1 r}{2} + \frac{a_2 r}{2} + \dots + \frac{a_n r}{2} = \frac{r}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{r}{2} \times 2P$$

$$\Rightarrow \boxed{S = rP} \quad \text{یا} \quad \boxed{r = \frac{S}{P}}$$

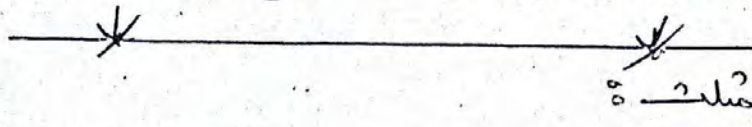
مثال) یک n ضلعی محیطی با مساحت ۲۰ و محیط ۱۰ مفروض است مساحت دایره محاطی این n ضلعی را بیابید.

$$S = 20$$

$$2P = 10 \Rightarrow P = 5$$

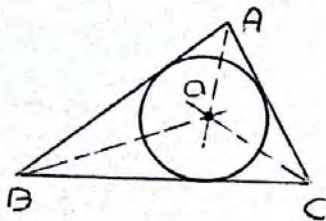
$$r = \frac{S}{P} = \frac{20}{5} \Rightarrow |r = 4|$$

$$S_{\text{دایره محاطی}} = \pi r^2 = \pi (4)^2 = 16\pi$$



دایره محاطی مثلث

مرکز دایره محاطی هر مثلث محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث است.



$$r = \text{شعاع دایره محاطی}$$

$$S = \text{مساحت مثلث}$$

$$2P = \text{محیط مثلث}$$

$$r = \frac{2S}{P}$$

مثال) شعاع دایره محاطی مثلثی با اضلاعی به طول ۱۲ و ۱۳ را بیابید.

$$13^2 = 12^2 + d^2 \Rightarrow \text{مثلث قائم الزویه} \Rightarrow \text{رابطه فیثاغورس برقرار است}$$

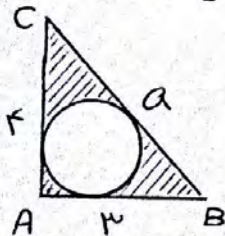
$$S = \frac{d \times 12}{2} = 30$$

$$2P = d + 12 + 13 = 30 \Rightarrow P = 15$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{30}{15} = 2$$



مثال) مساحت محصور به مثلث قائم الزاویهای به اضلاع قائم ۳ و ۴ و دایره محاطی آن را بیابید.



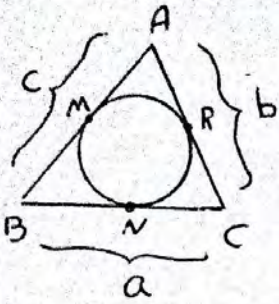
$$a^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$S = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

$$P = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow S_{\text{دایره محاطی}} = \pi r^2 = \pi (1)^2 = \pi$$

$$S_{\text{محصور}} = 6 - \pi = 2,14$$



مثال) مطابق شکل دایره محاطی مثلث ABC به محیط ۲P رسم شده و نقاط M و N و R محل تماس این دایره با اضلاع مثلث هستند ثابت کنید:

$$AM = AR = P - a \quad BM = BN = P - b \quad CR = CN = P - c$$

اثبات: می دانیم طول مماس های مرسوم از یک نقطه خارج دایره بر دایره باهم مساویند

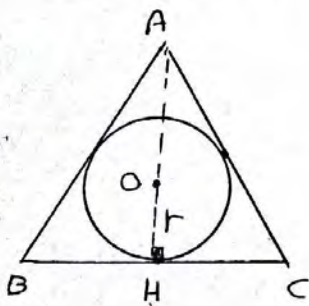
$$AM = AR \quad BM = BN \quad CN = CR$$

$$2P = AB + AC + BC = (AM + BM) + (AR + CR) + (BN + CN)$$

$$\Rightarrow 2P = 2AM + 2BN + 2CN \Rightarrow P = AM + \frac{BN + CN}{a} \Rightarrow \underline{AM = P - a}$$

دو حالت دیگر به همین ترتیب ثابت می شود.

مثال) مثلث متساوی الاضلاع ABC بر دایره ای به شعاع r محیط است. محیط و مساحت این مثلث را بر حسب r بیابید



حل: می دانیم مرکز دایره محاطی مثلث محل برخورد نیمسازهای داخلی آن است از طرفی در

مثلث متساوی الاضلاع میانده ها و نیمسازها برهم

منطبق هستند در نتیجه مرکز دایره محاطی مثلث همان محل برخورد میانده های این مثلث است و می دانیم محل برخورد میانده ها هر میانده را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می کند.

$$OA = 2OH \Rightarrow OA = 2r \Rightarrow AH = OA + OH = 2r + r = 3r$$

$$\left. \begin{matrix} AH = 3r \\ AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3r \Rightarrow a = \frac{4r}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = 2r\sqrt{3}$$

$$\text{محیط} = 2P = 3a = 3(2r\sqrt{3}) = 6r\sqrt{3}$$

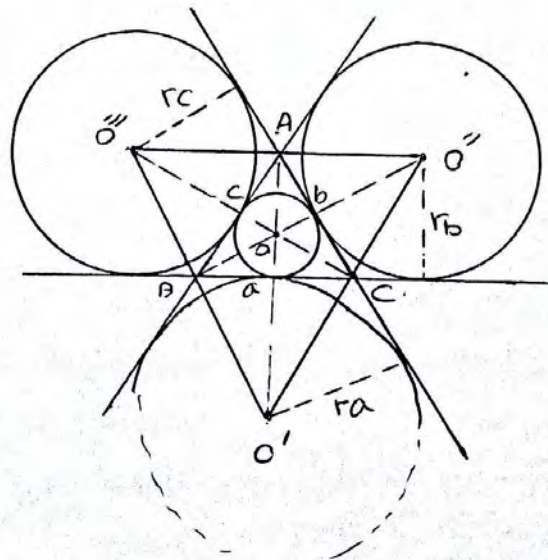
$$\text{مساحت} = S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2r\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}r^2$$

دایره محاطی خارجی مثلث :

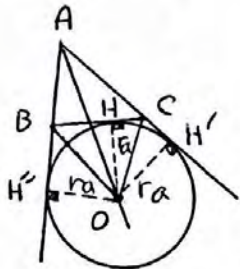
با توجه به این که نیمساز داخلی بی از زاویه های داخلی هر مثلث با دو نیمساز خارجی زاویه های دیگر در یک نقطه هم رس اند پس این نقطه از یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث به یک فاصله است.

مطابق شکل (۱) نیمساز داخلی \hat{A} با نیمسازهای خارجی \hat{B} و \hat{C} در نقطه O' متقاطع است. فاصله نقطه O' از ضلع $BC = a$ و امتداد دو ضلع $AC = b$ و $AB = c$ یکسان است. بنابراین به مرکز O' شعاعی معادل فاصله O' تا ضلع BC می تواند دایره ای رسم کرد که بر ضلع BC و امتداد اضلاع AB و AC مماس باشد. به این دایره، دایره محاطی خارجی نظیر رأس A می گویند. شعاع دایره محاطی خارجی نظیر رأس A را با r_a نشان می دهیم

مطابق شکل (۲) هر مثلث دارای سه دایره محاطی خارجی است. در مثلث ABC شعاع سه دایره محاطی خارجی عبارتست از: r_a, r_b, r_c



قضیه: ثابت کنید در مثل $\triangle ABC$ با طول اضلاع a, b, c ، شعاع دایره‌های محاطی خارجی برابر است با: $r_a = \frac{S}{P-a}$ و $r_b = \frac{S}{P-b}$ و $r_c = \frac{S}{P-c}$ که در این فرمولها P نصف محیط مثلث است.



اثبات: مطابق شکل، دایره محاطی خارجی نظیر یک رأس مثلاً رأس A را رسم می‌کنیم و از مرکز این دایره بر ضلع BC و امتداد اضلاع AB و AC عمود می‌کشیم:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAC} - S_{\triangle OBC}$$

$$\Rightarrow S = \frac{OH'' \times AB}{2} + \frac{OH' \times AC}{2} - \frac{OH \times BC}{2} = \frac{r_a \cdot c}{2} + \frac{r_a \cdot b}{2} - \frac{r_a \cdot a}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{r_a}{2} (b + c - a)$$

محیط = $2P = a + b + c$

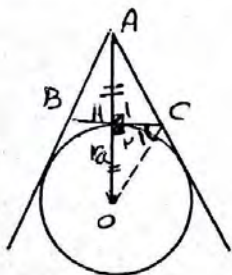
می‌دانیم:

$$S = \frac{r_a}{2} (b + c + a - 2a) \Rightarrow S = \frac{r_a}{2} (2P - 2a) \Rightarrow S = \frac{r_a}{2} \times 2(P - a)$$

$$\Rightarrow S = r_a (P - a) \Rightarrow \boxed{r_a = \frac{S}{P - a}}$$

بصورت ترتیب ثابت می‌شود: $r_b = \frac{S}{P - b}$ و $r_c = \frac{S}{P - c}$

مثال) شعاع دایره محاطی خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a را بیابید.



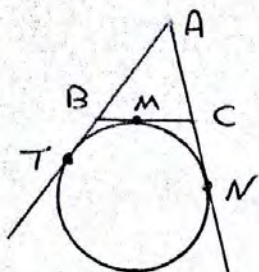
مطابق شکل نیمساز داخلی A (ارتفاع مثلث) و نیمساز خارجی \hat{C} در نقطه O هم‌دیگر را قطع کرده‌اند.

$$\hat{C}_1 = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \Rightarrow \hat{C} \text{ خارجی} = 120^\circ \Rightarrow \hat{C} \text{ داخلی} = 60^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ CH = CH \text{ مشترک} \\ \hat{C}_1 = \hat{C} = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACH \cong \triangle OCH \Rightarrow OH = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

نتیجه: شعاع دایره محاطی خارجی در مثلث متساوی‌الاضلاع با هم برابرند.

مثال) مطابق شکل طول اضلاع مثلث ABC عبارت است از: $a=3$ و $b=d$ و $C=V$ اگر دایره محاطی خارجی این مثلث نظیر رأس A رسم شده باشد حاصل $\frac{BM}{MC}$ را بیابید.



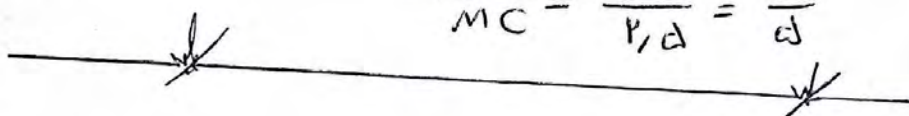
$$AT = AN \Rightarrow AB + BT = AC + CN \Rightarrow C + BM = b + MC$$

$$\Rightarrow V + BM = d + MC \Rightarrow \boxed{BM - MC = -2} \quad (1)$$

$$BM + MC = BC = a \Rightarrow \boxed{BM + MC = 3} \quad (2)$$

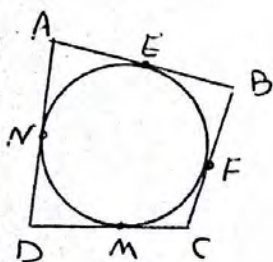
$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} BM - MC = -2 \\ BM + MC = 3 \end{cases} + \Rightarrow 2BM = 1 \Rightarrow BM = \frac{1}{2}d \Rightarrow MC = \frac{1}{2}d$$

$$\frac{BM}{MC} = \frac{\frac{1}{2}d}{\frac{1}{2}d} = 1$$



چهار ضلعی محیطی

قضیه: یک چهار ضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع طول دو ضلع مقابلش برابر مجموع طول دو ضلع دیگر باشد.



اثبات: فرض کنیم $ABCD$ چهار ضلعی محیطی باشد

ثابت می‌کنیم: $AB + DC = AD + BC$

$$\begin{cases} AE = AN \\ BE = BF \\ CM = CF \\ DM = DN \end{cases} + \begin{cases} + \\ + \\ + \\ + \end{cases} \Rightarrow (AE + BE) + (CM + DM) = (AN + DN) + (BF + CF)$$

$$\Rightarrow \boxed{AB + CD = AD + BC}$$

عکس قضیه: فرض کنیم $AB + DC = AD + BC$ ثابت می‌کنیم

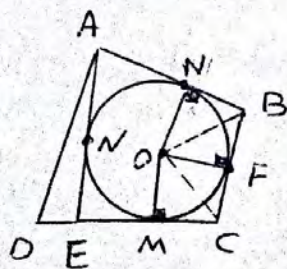
$ABCD$ چهار ضلعی محیطی است.

مطابق شکل نیمسازهای \hat{C} و \hat{B} در نقطه O هم‌رس اند

روی \hat{B} نیمساز $O \Rightarrow ON = OF$

روی \hat{C} نیمساز $O \Rightarrow OF = OM$

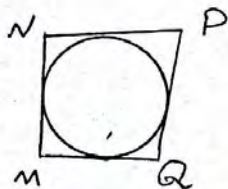
$$\Rightarrow ON = OF = OM = R$$



دایره‌ای به مرکز O و شعاع R رسم می‌کنیم دایره بر سه ضلع AB و BC و CD مماس است. اگر بر AD هم مماس باشد حکم ثابت شده است.
فرض کنیم این دایره بر AD مماس نباشد (فرض خلف) از A بر آن مماسی رسم می‌کنیم تا خط CD را در نقطه‌ای مانند E قطع کند.

$$\left. \begin{array}{l} AE + BC = AB + EC \\ AD + BC = AB + DC \end{array} \right\} \Rightarrow E \text{ همان } D \text{ است} \Rightarrow \text{دایره بر } AD \text{ نیز مماس است.}$$

مثال: اگر $MN = x + 4$ و $NP = 4x + 5$ و $PQ = 3x + 8$ و $QM = x + 2$ اضلاع متوالی یک چهارضلعی محیطی باشند مقدار x را بیابید.



$$MN + PQ = NP + MQ$$

$$x + 4 + 3x + 8 = 4x + 5 + x + 2 \Rightarrow x = 1$$

چند ضلعی محیطی:

تعریف ۱: یک چند ضلعی را محیطی می‌گوئیم اگر فقط آن دایره‌ای در صفحه آن

چند ضلعی وجود داشته باشد که از تمام رئوس آن چند ضلعی بگذرد. دایره گفته شده را دایره محیطی چند ضلعی می‌گوئیم. در شکل رو برو



محیطی چند ضلعی می‌گوئیم. در شکل رو برو یک شش ضلعی محیطی است.

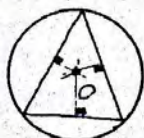
تعریف ۲:

یک چند ضلعی محیطی است اگر فقط آن عمود منصف تمام اضلاعش، در یک نقطه هم‌رس باشند. این نقطه مرکز دایره محیطی چند ضلعی است.

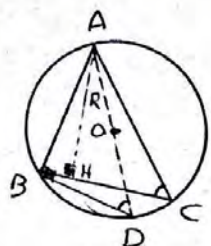


تکته ریاضی:

مرکز دایره محیطی مثلث، محل برخورد عمود منصف‌های آن است.



قضیه: ثابت کنید در مثلثی به اضلاع a, b, c و مساحت S شعاع دایره محیطی از دستور $R = \frac{abc}{4S}$ بدست می آید.



فرض	شعاع دایره محیطی $R = \frac{abc}{4S}$
حکم	$R = \frac{abc}{4S}$

اثبات: ارتفاع نظیر ضلع BC (یعنی AH) را رسم می کنیم و از نقطه A به مرکز دایره (نقطه O) وصل کرده و امتداد می دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند. B را به D وصل می کنیم زاویه B معادل زاویه D و در نتیجه قائمه است.

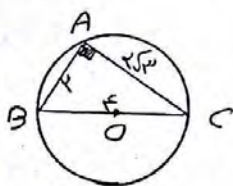
$$\left. \begin{array}{l} \hat{D} = \hat{C} = \widehat{AB} \\ \hat{H} = \hat{B} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ز.ز.}} \triangle ABD \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{HC}$$

$$\Rightarrow AH \cdot AD = AB \cdot AC \Rightarrow AH \cdot 2R = c \cdot b$$

$$\Rightarrow AH = \frac{bc}{2R}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{bc}{2R} \Rightarrow S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

مثال: در مثلثی به طول اضلاع $2, 2\sqrt{3}$ و 4 شعاع دایره محیطی را بیابید.



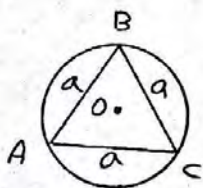
$$2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4^2 \Rightarrow \text{مثلث قائم الزامی}$$

$$S = \frac{2 \times 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{2 \times 2\sqrt{3} \times 4}{4 \times 2\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{R = 2}$$

نتیجه: شعاع دایره محیطی مثلث قائم الزامی برابر نصف وتر است.

مثال: شعاع و مساحت دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a را بیابید.



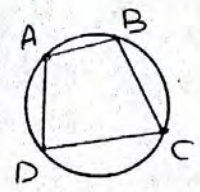
$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{a^3}{4 \left(\frac{a\sqrt{3}}{4} \right)} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{R = \frac{a\sqrt{3}}{3}}$$

$$S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2 \Rightarrow \boxed{S = \frac{\pi a^2}{3}}$$

چهار ضلعی محاطی:

قضیه: یک چهار ضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابلش مکمل یکدیگر باشند.

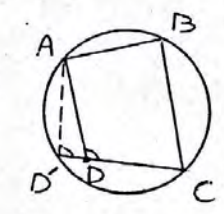
فرض	یک چهار ضلعی محاطی ABCD
حکم	$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$



اثبات:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مقابل } \hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2} \\ \text{مقابل } \hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD}}{2} + \frac{\widehat{BAD}}{2} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

همین ترتیب ثابت می شود: $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$



فرض	$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$
حکم	یک چهار ضلعی محاطی ABCD

عکس قضیه:

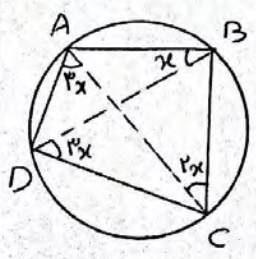
اثبات: می دانیم از سه نقطه غیر واقع بر رأس یک دایره می گذرد

دایره ای رسم می کنیم که از A و B و C بگذرد اگر دایره از D هم بگذرد حکم تمام است. فرض کنیم دایره از D نگذرد پس نقطه D' را روی دایره در نظر می گیریم $D \neq D'$ (فرض خلف) چهار ضلعی ABCD' محاطی است.

$$\left. \begin{array}{l} B + D' = 180^\circ \\ \text{فرض } B + D = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow B + D = B + D' \Rightarrow D = D'$$

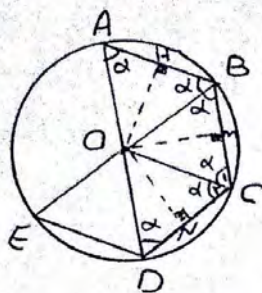
و این تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

مثال) در شکل روبه رو از رأس های چهار ضلعی ABCD، یک دایره می گذرد مقدار x را بیابید.



$$\begin{aligned} \widehat{DAC} = \frac{\widehat{DC}}{2} &\Rightarrow 3x = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{DC} = 4x \\ \widehat{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{2} &\Rightarrow x = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = 2x \\ \widehat{ACD} = \frac{\widehat{AB}}{2} &\Rightarrow 2x = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 4x \\ \widehat{BDC} = \frac{\widehat{BC}}{2} &\Rightarrow 2x = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 4x \end{aligned}$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ \Rightarrow 18x = 360^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$



قضیه: ثابت کنید هر n ضلعی منتظم محیطی است.

اثبات: عمود منصف AB و BC را رسم می‌کنیم

OH و OM همدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند O روی

عمود منصف AB و BC است پس: $OA = OB = OC$ (۱)

O را به D وصل می‌کنیم

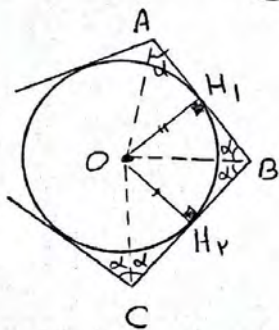
$$\left. \begin{array}{l} BC = CD \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \alpha \\ OC = OC \text{ مشترک} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ضلعی} \\ \Rightarrow \triangle OBC \cong \triangle OCD \Rightarrow OB = OD \end{array} \quad (۲)$$

$$OA = OB = OC = OD \leftarrow (۱), (۲)$$

همین ترتیب ثابت می‌شود $OA = OB = OC = OD = \dots = R$

پس رئوس n ضلعی روی این دایره هستند و n ضلعی منتظم محیطی است

قضیه: ثابت کنید هر n ضلعی منتظم محیطی است.



اثبات: نیمسازهای \hat{A} و \hat{B} را رسم می‌کنیم تا

همدیگر را در O قطع کنند

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \alpha \\ AB = BC \\ B_2 = C_1 = \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ضلعی} \\ \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OBC \Rightarrow OH_1 = OH_2 = R \end{array}$$

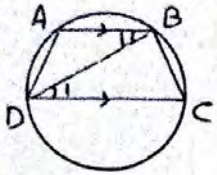
همین ترتیب ثابت می‌شود: $OH_1 = OH_2 = OH_3 = \dots = R$ پس

دایره به تمام اضلاع n ضلعی مماس است و n ضلعی منتظم محیطی است

تقریبات ص ۲۹ و ص ۳۰ و ص ۳۱ کتاب درسی

۱ ثابت کنید ذوزنقه محاطی است و تنها اگر متناوی الساقین باشد.

ضمیمه ذوزنقه متناوی الساقین
مهم ذوزنقه محاطی



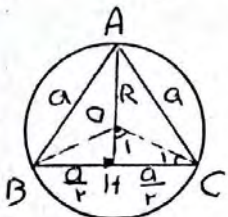
$$\left. \begin{aligned} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ & \xrightarrow{\hat{C} = \hat{D}} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ & \xrightarrow{\hat{A} = \hat{B}} \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \end{aligned} \right\} \text{ذوزنقه } ABCD \text{ محاطی است}$$

ضمیمه ذوزنقه محاطی
مهم ذوزنقه متناوی الساقین

$$(AB \parallel CD, BD \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow \frac{\widehat{BC}}{r} = \frac{\widehat{AD}}{r} \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} \Rightarrow AD = BC \Rightarrow$$

ABCD متناوی الساقین

۲ مساحت مثلث متناوی الاضلاع را بیست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.



حل: حی دانیم نقطه تقاطع عمود منصف‌ها در هر مثلث، مرکز دایره محیطی است پس AH عمود منصف است و چون مثلث متناوی الاضلاع است عمود منصف‌ها

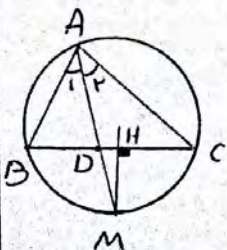
میانه هم هستند و میانه‌ها همدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند

$$2OH = OA \Rightarrow 2OH = R \Rightarrow OH = \frac{R}{2} \quad AH = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$$

$$\triangle ACH: AH^2 = AC^2 - CH^2 \Rightarrow \left(\frac{3R}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{9R^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow a = \sqrt{3}R$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3}R)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

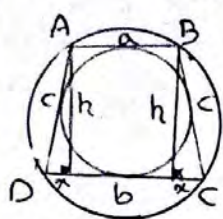
۳ ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند.



$$BH = CH \quad \text{نیمساز } AD \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \widehat{BM} = \widehat{MC}$$

حی دانیم مرکز دایره محیطی، روی عمود منصف قرار دارد و قطری که عمود بر وتر باشد و تر و کمان آنرا نصف می‌کند پس امتداد عمود منصف روی امتداد نیمساز یعنی M دایره محیطی را قطع می‌کند.

۱۴) یک ذوزنقه هم محیطی است و هم محاطی، ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها



حل: ذوزنقه ABCD محاطی است پس متساوی الساقین است (تقریباً)

یعنی $AD=BC=c$ همچنین محیطی است پس: $a+b=c+c \Rightarrow c=\frac{a+b}{2}$

$$b = a + 2x \Rightarrow x = \frac{b-a}{2}$$

$$h^2 = c^2 - x^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - b^2 + 2ab - a^2}{4} = \frac{4ab}{4} = ab \Rightarrow h = \sqrt{ab}$$

$$S = \frac{(AB+CD) \times h}{2} = \frac{(a+b) \sqrt{ab}}{2} = \frac{1}{2} (a+b) \times \sqrt{ab}$$

میانگین هندسی میانگین حسابی

۱۵) اگر r_a ، r_b و r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و شعاع دایره محاطی داخلی باشند نشان دهید:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

بهمین ترتیب اگر h_a ، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند نشان دهید:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

اثبات قسمت اول:

$$S = Pr \Rightarrow r = \frac{S}{P} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{P}{S}$$

$$r_a = \frac{S}{P-a} \Rightarrow \frac{1}{r_a} = \frac{P-a}{S} \Rightarrow \text{بهمین ترتیب: } \frac{1}{r_b} = \frac{P-b}{S} \text{ و } \frac{1}{r_c} = \frac{P-c}{S}$$

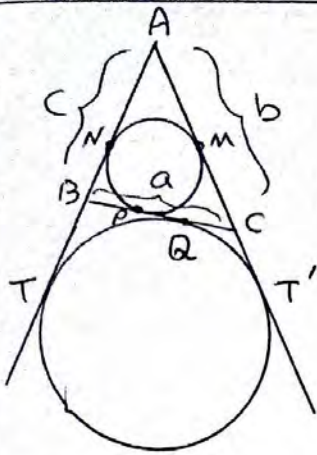
$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{P-a}{S} + \frac{P-b}{S} + \frac{P-c}{S} = \frac{3P - (a+b+c)}{S} = \frac{3P - 3P}{S} = \frac{0}{S} = \frac{P}{S} = \frac{1}{r}$$

اثبات قسمت دوم:

$$S = Pr \Rightarrow r = \frac{S}{P} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{P}{S}$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S} \xrightarrow{\text{بهمین ترتیب}} \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S} \text{ و } \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{3P}{2S} = \frac{P}{S} = \frac{1}{r}$$



۱۶) اگر نقاط تماس دایره محاط داخلی مثلث $\triangle ABC$ با اضلاع a, b, c باشند و P باشد و T و T' نقطه‌های تماس یک دایره محاط خارجی با خطهای شامل دو ضلع باشند نشان دهید:

$$AM = AN = P - a$$

$$BN = BP = P - b$$

$$CM = CP = P - c$$

$$AT = AT' = P$$

($P =$ نصف محیط)

$$P = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{AN + NB + AM + MC + BP + PC}{2} = \frac{2AN + 2PB + 2PC}{2}$$

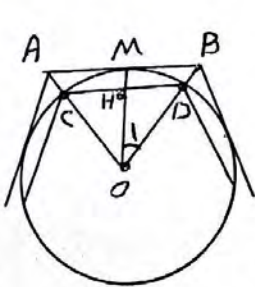
$$\Rightarrow P = AN + \underbrace{PB + PC}_a \Rightarrow AN = AM = P - a$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود: $BN = BP = P - b$, $CM = CP = P - c$

$$\left. \begin{array}{l} AT = c + BT \\ AT' = b + CT' \end{array} \right\} \Rightarrow AT + AT' = c + b + (BT + CT') \xrightarrow[\substack{BT=BQ, CT'=CQ}]{AT=AT'} 2AT = c + b + (BQ + CQ)$$

$$\Rightarrow 2AT = c + b + a \Rightarrow 2AT = 2P \Rightarrow AT = P$$

۱۷) یک دایره به شعاع r ، n ضلعی‌های منتظم محاط و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلع‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند آنگاه:



$$AB = 2r \tan \frac{180^\circ}{n}$$

$$CD = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

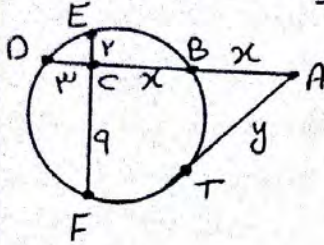
$$\Delta O: \hat{O} = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow \hat{O}_1 = \frac{\hat{O}}{2} = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$$

$$\Delta OHD: \sin \hat{O}_1 = \frac{HD}{r} \Rightarrow HD = r \sin \frac{180^\circ}{n} \Rightarrow CD = 2HD = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$\Delta OMB: \tan \hat{O}_1 = \frac{MB}{OM} \Rightarrow MB = OM \tan \hat{O}_1 = r \tan \frac{180^\circ}{n} \Rightarrow AB = 2MB = 2r \tan \frac{180^\circ}{n}$$

«تمرینات تکمیلی»

۱) در شکل روبرو از نقطه A مماس و مقاطع و مقاطع بر دایره رسم شده است. مقادیر x و y را بیابید.



حل: با توجه به شکل وتر BD و EF مقاطع از بیرون:

$$CD \cdot CB = CE \cdot CF \Rightarrow 3 \cdot x = 2 \cdot 4 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

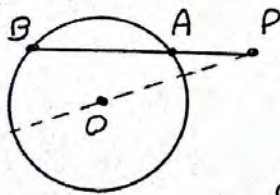
$$AT^2 = AB \cdot AD \Rightarrow y^2 = x(x + x + 3) = 4(4 + 4 + 3) \Rightarrow y^2 = 90 \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{90}}$$

۲) دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ مفروضند. اگر طول مماس مشترک خارجی این دو دایره $3\sqrt{11}$ باشد طول مماس مشترک داخلی آنها را بیابید.

$$TT' \text{ خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 3\sqrt{11} = \sqrt{d^2 - (3 - 2)^2} \Rightarrow 99 = d^2 - 1 \Rightarrow \boxed{d = 10}$$

$$TT' \text{ داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{10^2 - (3 + 2)^2} = \sqrt{51}$$

۳) در شکل روبرو اگر $AP = 4$ و $AB = 4$ و محیط دایره 14π باشد فاصله نقطه P از مرکز دایره را بیابید.



حل: نقطه P را به مرکز دایره وصل کرده و امتداد

می دهیم. می دانیم حاصلضرب قطعات حاصل

روی هر قاطع مرسوم از یک نقطه خارج دایره برابر مقدار

ثابت $d^2 - R^2$ است ($OP = d$)

$$\text{محیط دایره} = 2\pi R \Rightarrow 14\pi = 2\pi R \Rightarrow \boxed{R = 7}$$

$$PA \cdot PB = d^2 - R^2 \Rightarrow 4(4 + 4) = d^2 - 7^2 \Rightarrow d = \sqrt{104}$$