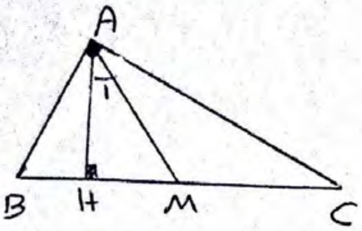
فصل ۳ :

روابط طولی در مثلث :

۱) روابط طولی در مثلث قائم الزاویه :



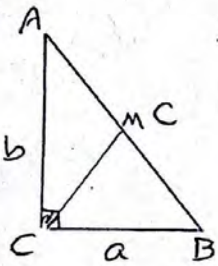
1) $AH^2 = BH \cdot CH$

2) $AB^2 = BH \cdot BC$

3) $AC^2 = CH \cdot BC$　　4) $AH \cdot BC = AB \cdot AC$

5) $AM = \frac{BC}{2}$　　6) $\hat{A}_1 = |\hat{B} - \hat{C}|$

مثال ۱ : در مثلث قائم الزاویه ای به مساحت ۵۴ ، نسبت اضلاع قائم ۳ به ۴ است. طول میانه وارد بر وتر در این مثلث چقدر است؟



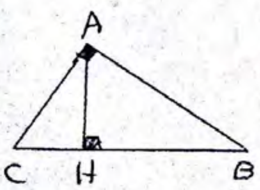
$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{4}b$$

$$S = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}b \times b}{2} = 54 \Rightarrow \frac{3}{4}b^2 = 108 \Rightarrow b^2 = 144 \Rightarrow \boxed{b=12}$$

$$a = \frac{3}{4}b = \frac{3}{4} \times 12 \Rightarrow \boxed{a=9}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow \boxed{c=15} \qquad CM = \frac{AB}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$

مثال ۲ : در مثلث قائم الزاویه روبرو $BH=12$ و $CH=4$ است. محیط و مساحت مثلث $A\hat{B}C$ را بیابید.



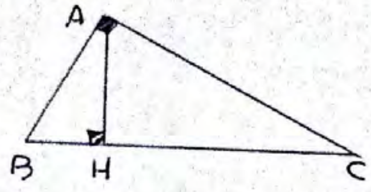
$$AH^2 = BH \cdot CH = 12 \times 4 = 48 \Rightarrow AH = 4\sqrt{3}$$

$$BC = BH + CH = 12 + 4 = 16$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times 16 \times 4\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} AC^2 = CH \cdot BC = 4 \times 16 = 64 \Rightarrow AC = 8 \\ AB^2 = BH \cdot BC = 12 \times 16 = 192 \Rightarrow AB = 8\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{A\hat{B}C}{\text{محیط}} = 8\sqrt{3} + 8 + 16 = 8(\sqrt{3} + 3)$$

مثال ۳: در مثلث قائم الزاویه روبرو اگر $AC=8$ و $BC=10$ باشد طول پاره خط های BH و CH چقدر است؟

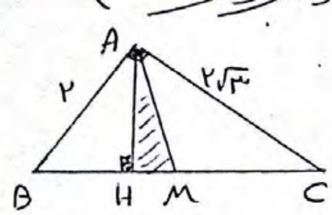


$$AB^2+AC^2=BC^2 \Rightarrow AB^2+8^2=10^2 \Rightarrow AB^2=36 \Rightarrow \boxed{AB=6}$$

$$AB^2=BH\cdot BC \Rightarrow 36=BH\times 10 \Rightarrow BH=3.6$$

$$CH=BC-BH=10-3.6=6.4$$

مثال ۴: در مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ طول اضلاع قائمه ۲ و $2\sqrt{3}$ است. مساحت مثلث AMH چقدر است؟ (AM میانه وارد بر وتر است)



$$BC^2=AB^2+AC^2=(2)^2+(2\sqrt{3})^2=4+12=16 \Rightarrow BC=4$$

$$\Rightarrow AM=\frac{BC}{2}=\frac{4}{2}=2$$

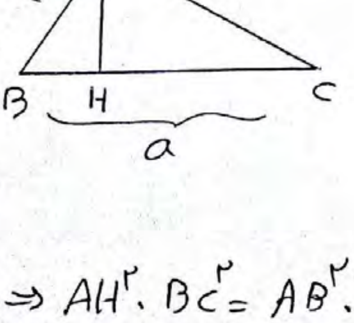
$$\overset{\triangle}{ABC}:\ AH\cdot BC=AB\cdot AC \Rightarrow AH\times 4=2\times 2\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{AH=\sqrt{3}}$$

$$\overset{\triangle}{AHM}:\ MH^2+AH^2=AM^2 \Rightarrow MH^2+(\sqrt{3})^2=2^2 \Rightarrow MH^2=1 \Rightarrow \boxed{MH=1}$$

$$S_{\overset{\triangle}{AHM}}=\frac{1}{2}\times MH\times AH=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

قضیه: در مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ ($\hat{A}=90^\circ$) ثابت کنید:

$$\boxed{\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} \quad \text{یا} \quad \boxed{\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AB^2}}$$

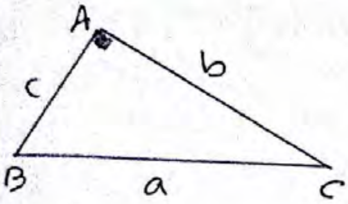


$$\left.\begin{array}{l} S=\frac{1}{2}AH\cdot BC \\ S=\frac{1}{2}AB\cdot AC \end{array}\right\} \Rightarrow AH\cdot BC=AB\cdot AC=2S$$

$$\Rightarrow AH^2\cdot BC^2=AB^2\cdot AC^2 \Rightarrow \frac{1}{AH^2\cdot BC^2}=\frac{1}{AB^2\cdot AC^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{BC^2}{AB^2\cdot AC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{AB^2+AC^2}{AB^2\cdot AC^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{AH^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}$$

قضیه: ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت هر کدام از اضلاع به سینوس زاویه روبرو یش برابر است با وتر مثلث.



فرض: $\hat{A}=90^\circ$

حکم: $\dfrac{a}{\sin\hat{A}}=\dfrac{b}{\sin\hat{B}}=\dfrac{c}{\sin\hat{C}}=a$

اثبات: می دانیم در هر مثلث قائم الزاویه، سینوس هر زاویه حاده برابر است با نسبت ضلع مقابل بر وتر:

$$\sin\hat{B}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b}{\sin\hat{B}}=a \quad (1) \qquad \sin\hat{C}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{c}{\sin\hat{C}}=a \quad (2)$$

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{a}{\sin 90^\circ}=\frac{a}{1}=a \quad (3) \qquad (1),(2),(3)\Rightarrow\boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=a}$$

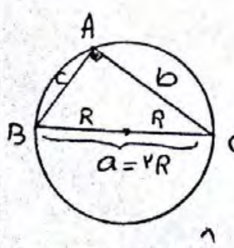
مثال ۱: در مثلث قائم الزاویه $A\hat{B}C$ ($\hat{A}=90^\circ$) اگر $tg\hat{B}=\sqrt{2}$ و $a=3\sqrt{3}$ آنگاه اندازه ضلع AB را بیابید.

$$\hat{B}+\hat{C}=90^\circ \Rightarrow tg\hat{B}=cotg\hat{C}=\sqrt{2}$$

$$1+cotg^2 C=\frac{1}{\sin^2 C}\Rightarrow 1+(\sqrt{2})^2=\frac{1}{\sin^2 C}\Rightarrow 3=\frac{1}{\sin^2 C}\Rightarrow \sin^2 C=\frac{1}{3}\Rightarrow \sin C=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{\hat{C}\text{ حاده}} \sin\hat{C}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{c}{\sin\hat{C}}=a\Rightarrow\frac{c}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=3\sqrt{3}\Rightarrow c=3\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\boxed{c=3}$$

قضیه: ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌رو به آن ضلع برابر است با قطر دایره محیطی مثلث:



$$a=2R$$

$$\sin\hat{B}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b}{\sin\hat{B}}=a\Rightarrow\frac{b}{\sin\hat{B}}=2R \quad (1)$$

$$\sin\hat{C}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{c}{\sin\hat{C}}=a\Rightarrow\frac{c}{\sin C}=2R \quad (2)$$

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{a}{\sin 90^\circ}=\frac{a}{1}=a=2R \quad (3) \qquad (1),(2),(3)\Rightarrow\boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R}$$

مثال) در مثلث قائم الزاویه $A\hat{B}C$ $(\hat{A}=90^\circ)$ شعاع دایره محیطی برابر R است ثابت کنید: $\frac{b^2}{R^2}+\frac{c^2}{R^2}=4$

اثبات: $\frac{b^2}{R^2}+\frac{c^2}{R^2}=\frac{b^2+c^2}{R^2}=\frac{a^2}{R^2}=\frac{(2R)^2}{R^2}=\frac{4R^2}{R^2}=4$

مثال) در یک مثلث قائم الزاویه، محیط دایره محیطی برابر 20π است اگر یکی از زاویه های حاده این مثلث 60° باشد مساحت مثلث را بیابید.

$\hat{A}=90^\circ \;,\; \hat{B}=60^\circ \Rightarrow \hat{C}=30^\circ$

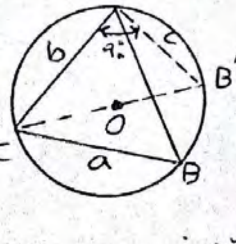
$\text{محیط}=20\pi \Rightarrow 2\pi R=20\pi \Rightarrow \boxed{R=10}$

$\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R \Rightarrow \frac{b}{\sin 60^\circ}=\frac{c}{\sin 30^\circ}=20 \Rightarrow \begin{cases} b=10\sqrt{3} \\ c=10 \end{cases}$

$$S_{A\overset{\triangle}{B}C}=\frac{1}{2}.b.c=\frac{1}{2}\times 10\sqrt{3}\times 10=50\sqrt{3}$$

قضیه سینوس ها: در هر مثلث غیر مشخص، نسبت طول هر ضلع به سینوس زاویه مقابلش برابر است با قطر دایره محیطی مثلث.

فرض	$AB=c \;,\; AC=b \;,\; BC=a$
حکم	$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$



اثبات: دو حالت درنظر می گیریم:

حالت اول: مثلث $A\hat{B}C$ را با زاویه های حاده A و B و C درنظر می گیریم. رأس C را به مرکز دایره محیطی یعنی نقطه O وصل کرده و امتداد می دهیم تا دایره را در B' قطع کند.

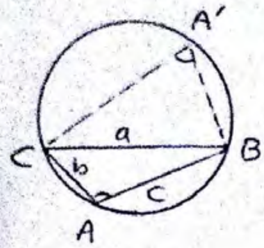
$\left.\begin{array}{l} \text{محاطی } \hat{B'}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \\ \text{محاطی } \hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}=\hat{B'} \Rightarrow \sin\hat{B}=\sin\hat{B'} \quad (1)$

زاویه محاطی $B'\hat{A}C$ روبرو به قطر است پس: $B'\hat{A}C=90^\circ$

قائم الزاویه $B'\overset{\triangle}{A}C$: $\sin\hat{B'}=\frac{b}{B'C}=\frac{b}{2R} \overset{(1)}{\Rightarrow} \sin\hat{B}=\frac{b}{2R} \Rightarrow \frac{b}{\sin\hat{B}}=2R$

بهمین ترتیب با رسم قطرهای گذرنده از راس های A و B ثابت می شود:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R}$$



حالت دوم: مثلث $A\hat{B}C$ را با فرض $\hat{A}>90^\circ$ درنظر می گیریم:

نقطه A' را به دلخواه روی دایره محیطی مثلث ABC و در طرف دیگر راس A درنظر می گیریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{محاطی } \hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{BA'C}}{2}\\ \text{محاطی } \hat{A}'=\dfrac{\overset{\frown}{BAC}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}+\hat{A}'=\frac{\overset{\frown}{BA'C}+\overset{\frown}{BAC}}{2}=\frac{360}{2}=180$$

چون زاویه A منفرجه است پس $\hat{A}'$ حاده خواهد بود از طرفی چون $\hat{A}$ و $\hat{A}'$ مکمل اند پس سینوس آنها مساوی است یعنی: $\sin\hat{A}=\sin\hat{A}'$ ②

مثلث $A'BC$ دارای سه زاویه حاده است طبق قسمت الف داریم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}'}=2R \xRightarrow{②} \frac{a}{\sin A}=2R$$

بهمین ترتیب ثابت می شود:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R}$$

مثال ۱: درمثلث $A\hat{B}C$ با فرض $b=20$ و $\hat{B}=30^\circ$ و $c=20\sqrt{2}$ مطلوبست شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زاویه های $\hat{A}$ و $\hat{C}$:

$$\frac{b}{\sin\hat{B}}=2R \Rightarrow \frac{20}{\sin 30}=2R \Rightarrow \frac{20}{\frac{1}{2}}=2R \Rightarrow 40=2R \Rightarrow \boxed{R=20}$$

$$\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R \Rightarrow \frac{20\sqrt{2}}{\sin C}=40 \Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases}\hat{C}=45^\circ\\ \hat{C}=135^\circ\end{cases}$$

$$\hat{A}=180^\circ-(\hat{B}+\hat{C}) \Rightarrow \begin{cases}\hat{A}=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=105^\circ\\ \hat{A}=180^\circ-(30^\circ+135^\circ)=15^\circ\end{cases}$$

مثال ۲: در مثلثی $a=6$ و $b=6\sqrt{3}$ ، $\hat{A}=30^\circ$ ، اندازه ضلع AB را بیابید

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{6}{\sin 30^\circ}=\frac{6\sqrt{3}}{\sin B} \Rightarrow \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} B=60^\circ \\ B=120^\circ \end{cases}$$

$$\hat{C}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B}) \Rightarrow \begin{cases} \hat{C}=180^\circ-(30^\circ+60^\circ) \Rightarrow \hat{C}=90^\circ \\ \hat{C}=180^\circ-(30^\circ+120^\circ) \Rightarrow \hat{C}=30^\circ \end{cases}$$

$$\hat{C}=90^\circ \Rightarrow c^2=a^2+b^2=6^2+(6\sqrt{3})^2=36+108=144 \Rightarrow \boxed{c=12}$$

$\hat{C}=30^\circ=\hat{A} \Rightarrow$ متساوی الساقین $\hat{ABC} \Rightarrow c=a=6$

مثال ۳: مساحت دایره محیطی مثلث $\hat{ABC}$ برابر 16π است. اگر $c=4\sqrt{3}$ و $b=4$ ، مطلوبست مقدار a (زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هر دو حاده هستند)

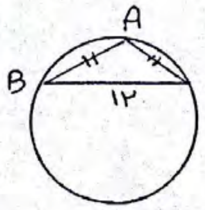
$$S=\pi R^2 \Rightarrow 16\pi=\pi R^2 \Rightarrow \boxed{R=4}$$

$$\frac{b}{\sin B}=2R \Rightarrow \frac{4}{\sin B}=8 \Rightarrow \sin B=\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B}=30^\circ$$

$$\frac{c}{\sin \hat{C}}=2R \Rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{\sin C}=8 \Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{C}=60^\circ$$

$$\hat{A}=180^\circ-(\hat{B}+\hat{C})=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)=90^\circ \Rightarrow a=2R=8$$

مثال ۴: طول قاعده مثلث متساوی الساقین ۱۲ و شعاع دایره محیطی آن $4\sqrt{3}$ است. طول ساق مثلث را بیابید.



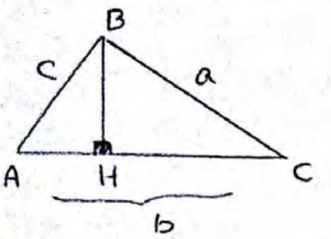
$$\frac{a}{\sin A}=2R \Rightarrow \frac{12}{\sin A}=2(4\sqrt{3}) \Rightarrow \sin\hat{A}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}=60^\circ \\ \hat{A}=120^\circ \end{cases}$$

$$\hat{A}=60^\circ \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=60^\circ \Rightarrow \frac{b}{\sin B}=2R \Rightarrow \frac{b}{\sin 60^\circ}=2(4\sqrt{3}) \Rightarrow b=8\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12$$

$$\hat{A}=120^\circ \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=30^\circ \Rightarrow \frac{b}{\sin B}=2R \Rightarrow \frac{b}{\sin 30^\circ}=2(4\sqrt{3}) \Rightarrow b=8\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=4\sqrt{3}$$

قضیه کسینوس‌ها:

در هر مثلث مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربعات اندازه‌های دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصلضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها



فرض	$AB=c\ ,\ AC=b\ ,\ BC=a$
حکم	$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos\hat{A}$ $b^2=a^2+c^2-2ac.\cos\hat{B}$ $c^2=a^2+b^2-2ab.\cos\hat{C}$

حالت اول: $\hat{A}<90^\circ$

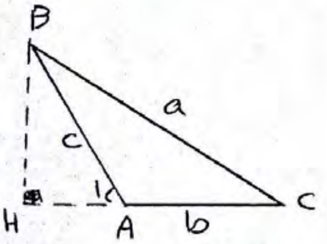
$\cos\hat{A}=\frac{AH}{c}\Rightarrow AH=c.\cos\hat{A}$ $\quad\quad \sin\hat{A}=\frac{BH}{c}\Rightarrow BH=c.\sin\hat{A}$

$\overset{\triangle}{BHC}:\ a^2=BH^2+CH^2=(c.\sin A)^2+(b-AH)^2=c^2\sin^2A+b^2-2bAH+AH^2$

$\Rightarrow a^2=c^2\sin^2A+b^2-2b(c.\cos A)+c^2\cos^2A\Rightarrow a^2=c^2(\sin^2A+\cos^2A)+b^2$

$-2bc.\cos A\Rightarrow \boxed{a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A}$

بهمین ترتیب دو رابطه بعدی اثبات می‌شود.



حالت دوم: $\hat{A}>90^\circ$

$\sin\hat{A}_1=\frac{BH}{c}\Rightarrow BH=c.\sin\hat{A}_1$

$\cos\hat{A}_1=\frac{AH}{c}\Rightarrow AH=c.\cos\hat{A}_1$

$\overset{\triangle}{BCH}:\ a^2=BH^2+CH^2\Rightarrow a^2=(c.\sin\hat{A}_1)^2+(b+AH)^2$

$\Rightarrow a^2=c^2.\sin^2\hat{A}_1+b^2+AH^2+2b.AH\Rightarrow a^2=c^2.\sin^2A_1+b^2+c^2.\cos^2A_1+$

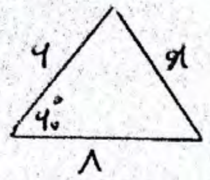
$2b(c.\cos\hat{A}_1)\Rightarrow a^2=c^2(\sin^2A_1+\cos^2A_1)+b^2+2bc.\cos\hat{A}_1$

$\Rightarrow a^2=c^2+b^2+2bc(-\cos A)\Rightarrow \boxed{a^2=b^2+c^2-2bc.\cos\hat{A}}$

بهمین ترتیب دو رابطه دیگر اثبات می‌شوند.

حالت سوم: $\hat{A}=90^\circ$ در اینصورت قضیه کسینوس‌ها تبدیل به رابطه فیثاغورس می‌شود.

مثال ۱: مطلوبست محاسبه x :



$$x^2 = 6^2 + 8^2 - 2(6)(8)\cos 60^\circ = 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 = 52 \Rightarrow x = \sqrt{52}$$

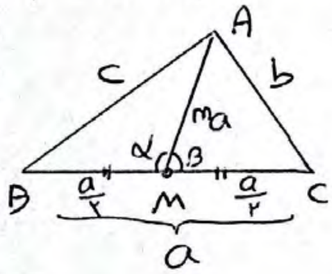
مثال ۲: طول اضلاع مثلثی $2\sqrt{2}$ و $4\sqrt{2}$ و $\sqrt{56}$ است. بزرگترین زاویه مثلث را بیابید.

$$(\sqrt{56})^2 = (2\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2(2\sqrt{2})(4\sqrt{2})\cos\theta$$

$$\Rightarrow 56 = 8 + 32 - 32\cos\theta \Rightarrow 16 = -32\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120^\circ$$

قضیه میانه‌ها:

ثابت کنید در هر مثلث، مجموع مربعات هر دو ضلع برابر است با نصف مربع ضلع سوم به علاوه دو برابر مربع میانه وارد بر ضلع سوم:



فرض	$AM = m_a$ و M وسط BC
حکم	$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2$ $a^2 + c^2 = \frac{b^2}{2} + 2m_b^2$ $a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2m_c^2$

$$\overset{\triangle}{AMB}: \quad c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 - 2m_a \cdot \left(\frac{a}{2}\right)\cos\alpha \Rightarrow c^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - a m_a \cos\alpha \quad (1)$$

$$\overset{\triangle}{ACM}: \quad b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 - 2m_a \left(\frac{a}{2}\right)\cos\beta \Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - a m_a \cos\beta \quad (2)$$

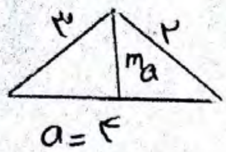
$$(1) + (2) \Rightarrow b^2 + c^2 = 2\left(\frac{a^2}{4}\right) + 2m_a^2 - a m_a(\cos\alpha + \cos\beta)$$

چون α و β مکمل هستند پس: $\cos\alpha = -\cos\beta \Rightarrow \cos\alpha + \cos\beta = 0$

$$\Rightarrow \boxed{b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2}$$

مثال) در مثلثی به اضلاع ۲، ۳ و ۴ طول کوچکترین میانه را بیابید.

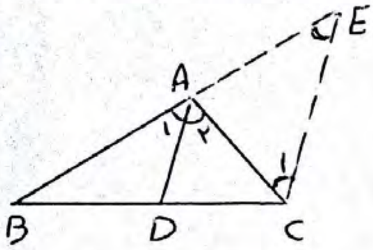
حل: کوچکترین میانه به بزرگترین ضلع وارد می‌شود.



$$b^2+c^2=\frac{a^2}{2}+2m_a^2 \Rightarrow 3^2+2^2=\frac{4^2}{2}+2m_a^2 \Rightarrow m_a^2=\frac{5}{2} \Rightarrow m_a=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

قضیه نیمساز داخلی:

ثابت کنید در هر مثلث، نیمساز هر زاویه ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند.



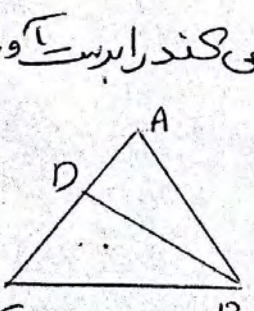
فرض	$\hat{A}_1=\hat{A}_2$
حکم	$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$

اثبات: از راس C خطی موازی نیمساز AD چنان رسم می‌کنیم که امتداد AB را در نقطه E قطع کند C را به E وصل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} AD \parallel CE \text{ و مورب } AC \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{C}_1 \\ AD \parallel CE \text{ و مورب } AE \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{E} \end{array}\right\} \xRightarrow{\hat{A}_1=\hat{A}_2} \hat{C}_1=\hat{E} \xRightarrow[\text{الساقین}]{\text{متساوی}} \hat{ACE} \Rightarrow AE=AC$$

$$AD \parallel CE \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{AE}=\frac{BD}{DC} \xrightarrow{AE=AC} \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

مثال) در مثلث $\hat{ABC}$، $AB=7$، $AC=5$ و $BC=8$ است. طولهای دو قطعه‌ای که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند را بدست آورید.



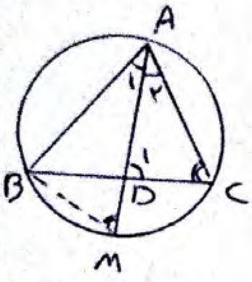
$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{AD}{CD}=\frac{7}{8} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD}=\frac{7+8}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{CD}=\frac{15}{8} \Rightarrow \frac{5}{CD}=\frac{15}{8} \Rightarrow CD=\frac{8}{3}$$

$$AD=AC-CD=5-\frac{8}{3}=\frac{7}{3}$$

قضیه طول نیمساز داخلی:

ثابت کنید در هر مثلث، مربع طول هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب طول اضلاع آن زاویه منهای حاصلضرب طول قطعات ایجاد شده توسط نیمساز داخلی روی ضلع مقابل.



فرض	AD نیمساز داخلی $\hat{A}$
حکم	$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$

اثبات: مطابق شکل ابتدا دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را رسم می‌کنیم پس نیمساز AD را امتداد داده تا دایره محیطی را در M قطع کند:

$$\left.\begin{aligned}\hat{A}_1 &= \hat{A}_2 \\ \hat{C} = \hat{M} &= \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}\end{aligned}\right\} \overset{\text{زز}}{\Rightarrow} \overset{\triangle}{ABM} \sim \overset{\triangle}{ACD} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AM} = \frac{DC}{BM}$$

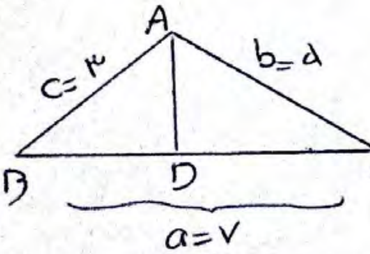
$$\Rightarrow AD \cdot AM = AB \cdot AC \Rightarrow AD(AD + MD) = AB \cdot AC$$

$$\Rightarrow AD^2 + AD \cdot MD = AB \cdot AC \quad (1)$$

طبق روابط طولی در دایره: $AD \cdot MD = BD \cdot DC \quad (2)$

$$(1),(2) \Rightarrow AD^2 + BD \cdot DC = AB \cdot AC \Rightarrow AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

مثال) در مثلثی به اضلاع ۳ و ۵ و ۷ طول نیمساز داخلی بزرگترین زاویه را بیابید.



$$AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BD}{BD+DC} = \frac{3}{3+5}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{7} = \frac{3}{8} \Rightarrow \boxed{BD = \frac{21}{8}} \Rightarrow CD = 7 - \frac{21}{8} = \frac{35}{8}$$

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC = 3 \times 5 - \frac{21}{8} \times \frac{35}{8} = 15 - \frac{735}{64} = \frac{225}{64}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{15}{8}$$