درسنامه ی فصل اول ریاضی (۳)

سال دوازدهم - رشته علوم تجربی

به همراه حل تمامی مسائل و تمرینات کتاب درسی

• ابراهیم موسی پور

★ درس اول: توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی ★

* توابع چندجمله‌ای: همانطور که می‌دانیم در یک جمله‌ای برحسب x، درجه‌ی x (توان x)، باید عددی صحیح و نامنفی باشد. لذا یک تابع چندجمله‌ای از مجموع چند یک جمله‌ای برحسب x تشکیل شده است. دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای، مجموعه‌ی اعداد حقیقی یعنی R می‌باشد. * مثال:

۱) $y=2$ تابع چندجمله‌ای (یک جمله‌ای) از درجه‌ی صفر

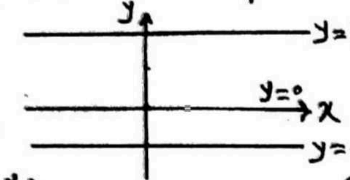
۲) $y=3x+5$ تابع چندجمله‌ای (دو جمله‌ای)، از درجه‌ی یک

۳) $y=2x^5-4x^3+\sqrt{7}x^2$ تابع چندجمله‌ای (سه جمله‌ای) از درجه‌ی پنج

۴) $y=-8x^2+2x-\frac{1}{2}$ تابع چندجمله‌ای (سه جمله‌ای) از درجه‌ی دو

۵) $y=\sqrt{2}x^3-\frac{3}{4}x$ تابع چندجمله‌ای (دو جمله‌ای) از درجه‌ی سه

* چند نکته:



۱- تابع به صورت $f(x)=b$ را تابع ثابت می‌نامند و نمودارش در دستگاه مختصات، خطی افقی می‌باشد.

در حالت خاص $f(x)=0$، نمودار تابع، محور x ها می‌باشد و درجه برای این تابع تعریف نمی‌شود.

۲- هر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax+b$، که در آن $a\neq 0$، را یک تابع خطی می‌نامند. اگر $a>0$، نمودار تابع به صورت

و اگر $a<0$، نمودار تابع به صورت

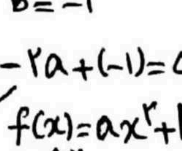
می‌باشد.

* مثال: ضابطه‌ی تابع خطی ای را بنویسید که از نقاط $(0,-1)$ و $(-2,3)$، در دستگاه مختصات بگذرد.

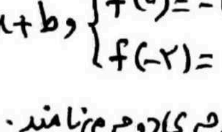
جواب: $f(x)=ax+b$ و $\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(-2)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(0)+b=-1 \Rightarrow b=-1 \\ a(-2)+b=3 \Rightarrow -2a+(-1)=3 \Rightarrow -2a=4 \Rightarrow a=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x)=-2x-1}$

۳- هر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax^2+bx+c$ که در آن $a\neq 0$، را یک تابع درجه‌ی دوم می‌نامند.

اگر $a>0$، نمودار تابع به صورت



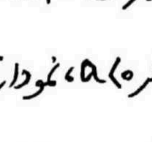
و اگر $a<0$، نمودار تابع به صورت



می‌باشد.

۴- هر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d;\ (a\neq 0)$، را یک تابع درجه‌ی سوم می‌نامند.

در حالت خاص $f(x)=x^3$، نمودار تابع به صورت



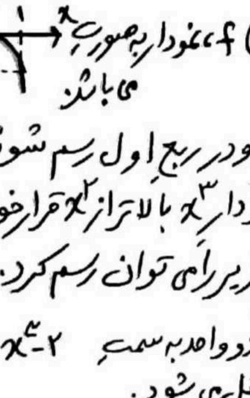
و در حالت خاص $f(x)=-x^3$، نمودار به صورت

می‌باشد.

* چند تذکر: ۱- هرگاه نمودارهای دو تابع $f(x)=x^3$ و $g(x)=x^2$ در یک دستگاه مختصات و در ربع اول رسم شوند، در فاصله‌ی $(0,1)$، نمودار x^2 بالاتر از x^3 قرار می‌گیرد و در فاصله‌ی $(1,+\infty)$، نمودار x^3 بالاتر از x^2 قرار خواهد گرفت.

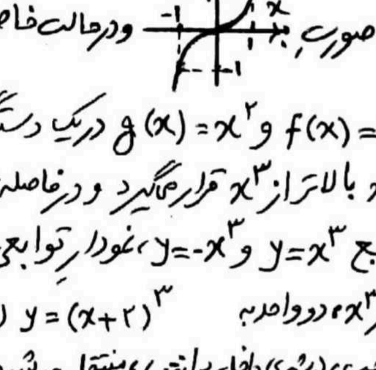
۲- به کمک انتقال و با استفاده از نمودار توابع $y=x^3$ و $y=-x^3$، نمودار توابعی مانند توابع زیر را می‌توان رسم کرد.

۱) $y=-x^3-2$ نمودار $-x^3$، دو واحد به سمت پایین منتقل می‌شود.



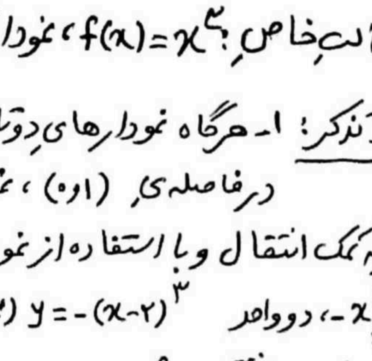
دامنه $D=R$
برد $R=IR$

۲) $y=(x+2)^3$ نمودار x^3، دو واحد به سمت چپ، (ریشه‌ی داخل پرانتز)، منتقل می‌شود.



دامنه $D=R$
برد $R=IR$

۳) $y=-(x-2)^3$ نمودار $-x^3$، دو واحد به سمت راست، منتقل می‌شود.



دامنه $D=R$
برد $R=IR$

* پاسخ کار در کلاس صفحه‌ی ۵ کتاب:

الف) $y=(x-1)^3+2$: نمودار x^3، یک واحد به سمت راست و دو واحد به سمت بالا، منتقل می‌شود. (نمودار (۶))

ب) $y=(x-2)^3$: نمودار x^3، دو واحد به سمت راست، منتقل می‌شود. (نمودار (۹))

پ) $y=-x^3+1$: نمودار $-x^3$، یک واحد، به سمت بالا، منتقل می‌شود. (نمودار (۸))

ت) $y=(x+1)^3-1$: نمودار x^3، یک واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت پایین، منتقل می‌شود. (نمودار (۷))

ث) $y=-x^3$: نمودار $y=x^3$، نسبت به محور xها، قرینه می‌شود. (نمودار (۵))

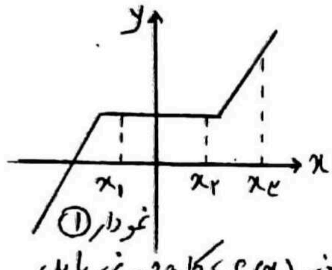
ج) $y=(x+1)^3$: نمودار x^3، یک واحد به سمت چپ، منتقل می‌شود. (نمودار (۱))

چ) $y=x^3+1$: نمودار x^3، یک واحد به سمت بالا، منتقل می‌شود. (نمودار (۴))

ح) $y=-x^3-1$: نمودار $-x^3$، یک واحد به سمت پایین، منتقل می‌شود. (نمودار (۳))

خ) $y=x^3-2$: نمودار x^3، دو واحد به سمت پایین، منتقل می‌شود. (نمودار (۲))

★ توابع صعودی و نزولی:



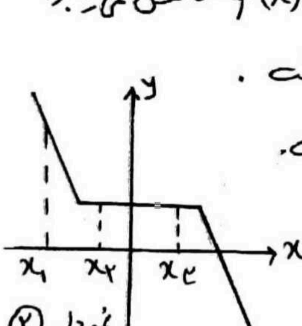
۱- تعریف تابع صعودی: تابع f را در مجموعه‌ی $A\subseteq D_f$، صعودی می‌نامند، هرگاه:

برای هر دو نقطه‌ی $x_1,x_2\in A$، اگر $x_1<x_2$، آنگاه داشته باشیم: $f(x_1)\le f(x_2)$.

به زبان فارسی، هرگاه تابع f در مجموعه‌ی A صعودی باشد، آنگاه با افزایش x در A، مقدار تابع، یعنی $f(x)$، کاهش نمی‌یابد.

از نظر شهودی نیز، با حرکت روی نمودار تابع f در دستگاه مختصات، از چپ به راست، پایین نخواهیم رفت.

مثلاً تابع f با نمودار رسم شده در این تعریف (① بالا)، در $\mathbb{R}$ (مجموعه‌ی اعداد حقیقی) صعودی است.



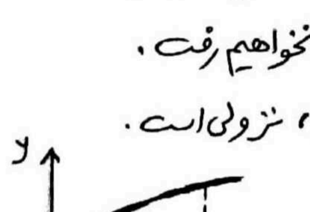
۲- تعریف تابع نزولی: تابع f را در مجموعه‌ی $A\subseteq D_f$، نزولی می‌نامند، هرگاه:

برای هر دو نقطه‌ی $x_1,x_2\in A$، اگر $x_1<x_2$، آنگاه داشته باشیم: $f(x_1)\ge f(x_2)$.

به زبان فارسی، هرگاه تابع f در مجموعه‌ی A نزولی باشد، آنگاه با افزایش x در A، مقدار تابع، یعنی $f(x)$، افزایش نمی‌یابد.

از نظر شهودی نیز، با حرکت روی نمودار تابع f در دستگاه مختصات، از چپ به راست، بالا نخواهیم رفت.

مثلاً تابع f با نمودار رسم شده در این تعریف (نمودار ②)، در $\mathbb{R}$ (مجموعه‌ی اعداد حقیقی)، نزولی است.



۳- تعریف تابع اکیداً صعودی: تابع f را در مجموعه‌ی $A\subseteq D_f$، اکیداً صعودی می‌نامند، هرگاه:

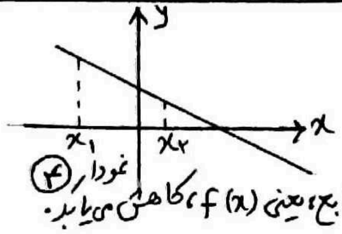
برای هر دو نقطه‌ی $x_1,x_2\in A$، اگر $x_1<x_2$، آنگاه داشته باشیم: $f(x_1)<f(x_2)$.

به زبان فارسی، هرگاه تابع f در مجموعه‌ی A، اکیداً صعودی باشد، آنگاه با افزایش x در A، مقدار تابع، یعنی $f(x)$ نیز افزایش می‌یابد.

از نظر شهودی نیز، با حرکت روی نمودار تابع f، در دستگاه مختصات از چپ به راست، همواره بالا خواهیم رفت.

مثلاً تابع f با نمودار رسم شده در این تعریف (نمودار ③)، در فاصله‌ی $[0,+\infty)$، اکیداً صعودی است.

←



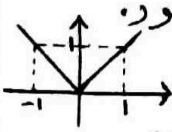
۴- تعریفِ تابعِ اکیداً نزولی: تابع f را در مجموعه‌ی $A \subseteq D_f$، اکیداً نزولی می‌نامند، هرگاه:
برای هر دو نقطه‌ی $x_1, x_2 \in A$، اگر $x_1 < x_2$، آنگاه داشته باشیم: $f(x_1) > f(x_2)$.
به زبان فارسی، هرگاه تابع f در مجموعه‌ی A، اکیداً نزولی باشد، آنگاه با افزایش x در A، مقدار تابع، یعنی $f(x)$، کاهش می‌یابد.
از نظر شهودی نیز، با حرکت روی نمودار تابع f، در دستگاه مختصات از چپ به راست، همواره پایین خواهیم رفت.
مثلاً تابع f با نمودار رسم شده در این تعریف (نمودار ④)، در $\mathbb{R}$ (مجموعه‌ی اعداد حقیقی)، اکیداً نزولی است.

★ چند نکته:

۱- تابع f را در یک بازه ثابت می‌گویند، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار تابع یعنی $f(x)$ تغییر نکند و ثابت باشد.
لازم به تذکر است تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی است و هم نزولی.

۲- اگر تابعی در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا نامیده می‌شود.

۳- اگر تابعی در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا نامیده می‌شود.



۴- تابعی در دامنه‌ی تعریفش ممکن است یکنوا یا اکیداً یکنوا نباشد. مثلاً تابع $f(x)=|x|$ که نمودارش می‌باشد، در فاصله‌ی $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی و در فاصله‌ی $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است، ولی در $D_f=\mathbb{R}$، اکیداً یکنوا نیست.

۵- ★★★: تابعی که اکیداً یکنوا باشد، آنگاه یکنوا نیز هست، ولی عکس این مطلب همواره درست نیست، یعنی ممکن است تابعی یکنوا باشد، ولی اکیداً یکنوا نباشد.

★ پاسخ کار در کلاس صفحه‌ی ۸ کتاب: الف) تابع در بازه‌ی $(-\infty,2]$ اکیداً صعودی و در بازه‌ی $[3,+\infty)$ هم اکیداً صعودی است.
ب) تابع در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. پ) تابع در $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی و در فاصله‌ی $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است.
ت) تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$، اکیداً نزولی است. ث) تابع در بازه‌ی $(-\infty,0]$ اکیداً صعودی و در بازه‌ی $[0,+\infty)$ اکیداً نزولی است. ج) تابع در هر یک از بازه‌های $[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{\pi}{2},\pi]$ اکیداً نزولی و در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی است.
چ) تابع در بازه‌ی $[-2,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

★ پاسخ کار در کلاس اول، صفحه‌ی ۹ کتاب:

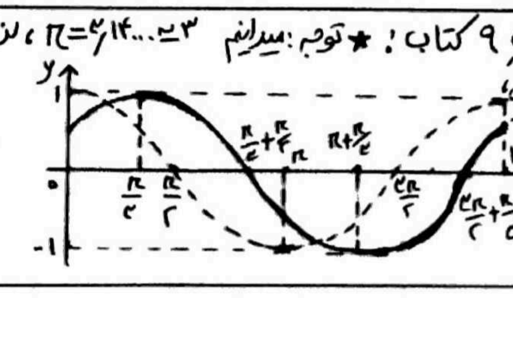
x	$[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
$y=\sin x$	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

x	$[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
$y=\cos x$	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی

★ پاسخ کار در کلاس دوم، صفحه‌ی ۹ کتاب: ★ توجه: می‌دانیم $\pi=3/14... \simeq 3$، لذا در رسم خواهیم داشت: $2\pi \simeq 6$، $\frac{\pi}{4}\simeq 1$، $\frac{3\pi}{2}\simeq 4/5$، $\frac{\pi}{2}\simeq 1/5$

الف) $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{4})$ ؛ $D_f=[0,2\pi]$

★ برای رسم نمودار f کافی است نمودار $y=\cos x$ را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{4}$ به سمت راست، منتقل کنیم.

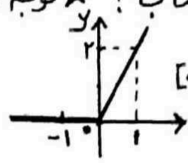


★ f در فاصله‌ی $[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$ اکیداً نزولی، و در بازه‌های $[0,\frac{\pi}{4}]$ و $[\frac{5\pi}{4},2\pi]$ اکیداً صعودی است.

* ادامه ی پاسخ کار در کلاس دوم، صفحه ی ۹ کتاب: ★ توجه: تعریف $|x|$، عبارت است از: $|x|=\begin{cases}x\,;\ x\geq 0\\ -x\,;\ x<0\end{cases}$

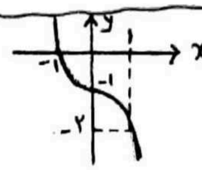
$$g(x)=x+|x|=\begin{cases}x+x=2x\,;\ x\geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1\\ \hline y & 0 & 2\end{array}\\ x+(-x)=0\,;\ x<0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0\\ \hline y & 0 & 0\end{array}\end{cases} \Rightarrow$$

(ابتدا g را دو ضابطه ای می کنیم.)



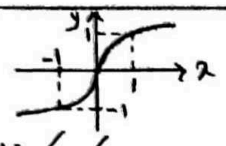
* تابع g در بازه ی $(-\infty,0]$ ثابت و در بازه ی $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است، لذا g در $\mathbb{R}$، صعودی است.

ب) $t(x)=-x^3-1 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1\\ \hline y & 0 & -1 & -2\end{array} \Rightarrow$



$\Rightarrow$ * تابع t در $\mathbb{R}$ یعنی بازه ی $(-\infty,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

* فعالیت صفحه ی ۱۰ کتاب: با توجه به نمودار روبه رو به سؤالات زیر پاسخ دهید:



الف) این تابع، اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟ جواب: اکیداً صعودی

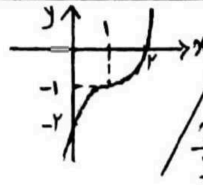
ب) این تابع یک به یک است؟ جواب: بله　پ) آیا تابعی وجود دارد که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ولی یک به یک نباشد؟

جواب: خیر، هر تابع اکیداً یکنوا، یک به یک نیز هست.

* تمرین، صفحه ی ۱۰ کتاب

① نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

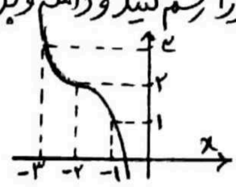
الف) $y=(x-1)^3-1 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2\\ \hline y & -2 & -1 & 0\end{array} \Rightarrow$



$\Rightarrow D=\mathbb{R}$ ، برد $R=\mathbb{R}$

ب) $y=-(x+2)^3+2$

$\begin{array}{c|ccc} x & -3 & -2 & -1\\ \hline y & 3 & 2 & 1\end{array} \Rightarrow$



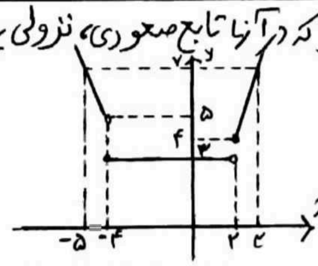
$D=\mathbb{R}$

$R=\mathbb{R}$

★ توجه: توابع درجه ی سوم، دامنه و بُردشان همواره برابر است با $\mathbb{R}$ (مجموعه ی اعداد حقیقی).

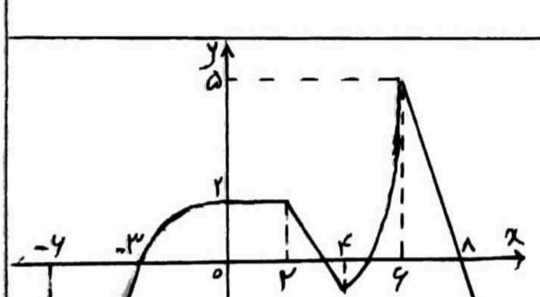
② نمودار تابع مقابل را رسم کنید و بازه هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-2x-3\,;\ x<-4 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -5 & -4\\ \hline y & 7 & 5\end{array}\\ 3\,;\ -4\leq x<2 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -4 & 2\\ \hline y & 3 & 3\end{array}\\ 3x-2\,;\ x\geq 2 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 2 & 3\\ \hline y & 4 & 7\end{array}\end{cases}$$



تابع f در فاصله ی $(-\infty,-4)$ اکیداً نزولی، در بازه ی $[-4,2)$ ثابت و در بازه ی $[2,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

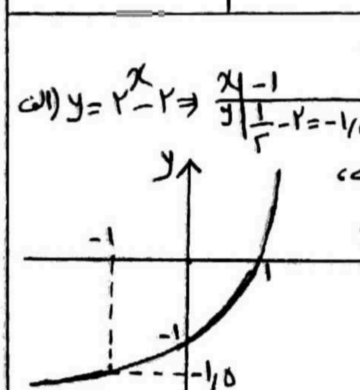
③ با استفاده از نمودار تابع روبرو، مشخص کنید این تابع در چه بازه هایی، صعودی، نزولی یا ثابت است؟



* این تابع در بازه های: $(-\infty,2]$ و $[4,6]$ اکیداً صعودی است، در بازه های $[2,4]$ و $[6,+\infty)$، اکیداً نزولی و در بازه ی $[0,2]$ ثابت است.

④ تابع نمایی $y=2^x-2$ و تابع لگاریتمی $y=-\log_2 x+2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها، بحث کنید.

الف) $y=2^x-2 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1\\ \hline y & \frac{1}{2}-2=-1.5 & 1-2=-1 & 2-2=0\end{array}$

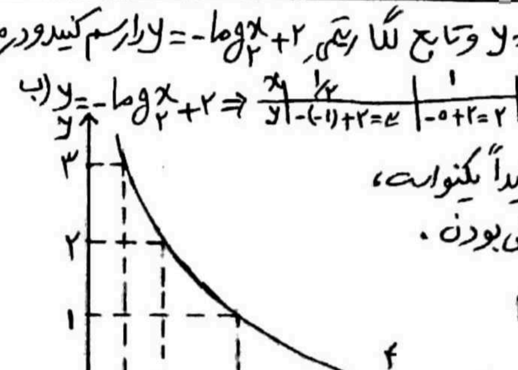


* این تابع در $\mathbb{R}$، اکیداً یکنواست، به جهت اکیداً صعودی بودن.

$D=\mathbb{R}$

$R=(-2,+\infty)$

ب) $y=-\log_2 x+2 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4\\ \hline y & -(-1)+2=3 & -0+2=2 & -1+2=1 & -2+2=0\end{array}$



* این تابع در $\mathbb{R}$، اکیداً یکنواست، به جهت اکیداً نزولی بودن.

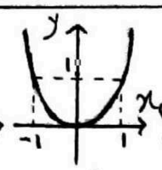
$D=(0,+\infty)$

$R=\mathbb{R}$

* ادامه‌ی تمرینات صفحه‌ی ۱۰ کتاب

⑤ تابع $y=x^2|x|$ در بازه‌ی $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟

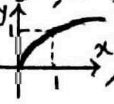
$y=x^2|x|=\begin{cases} x^3 & x\geq 0\\ -x^3 & x<0\end{cases} \Rightarrow$



* این تابع در وسیع‌ترین بازه‌ای که نزولی (اکیداً) است، بازه‌ی $(-\infty, 0]$ می‌باشد، لذا، حداکثر مقدار a، برابر است با صفر.

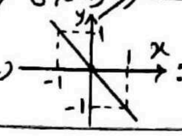
⑥ تابعی مثال بزنید که در دامنه‌ی خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنه‌ی خود اکیداً نزولی باشد.

* تابع $f(x)=\sqrt{x}$ با نمودار



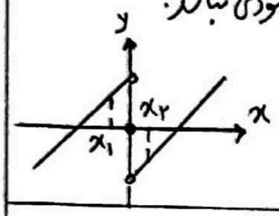
، در دامنه‌ی تعریفش یعنی بازه‌ی $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است،

و تابع $g(x)=-x$ با نمودار:



در دامنه‌ی تعریفش یعنی $\mathbb{R}$ (مجموعه‌ی اعداد حقیقی)، اکیداً نزولی است.

⑦ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، ولی در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نباشد.



* تابع مقابل در هر یک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$، اکیداً صعودی است،

ولی در دامنه‌ی تعریفش یعنی $\mathbb{R}$، اکیداً صعودی نیست زیرا، مثلاً $x_1<x_2$ ولی $f(x_1)>f(x_2)$.

★ درس دوم: ترکیب توابع ★

* در سال یازدهم با اعمال: جمع، تفریق، ضرب و تقسیم، روی دو تابع آشنا شده‌ایم. در این درس، عمل جدیدی روی دو تابع، به نام ترکیب دو تابع، مطرح می‌گردد. (دانش آموزان سال یازدهم ریاضی، با ترکیب دو تابع در کتاب حسابان (۱) آشنا شوند)

*ترکیب دو تابع:

هرگاه f و g دو تابع حقیقی باشند، یعنی دامنه و برد این دو تابع، زیرمجموعه‌ی اعداد حقیقی باشند، آنگاه ترکیب دو تابع f و g را به صورت‌های fog و gof نشان می‌دهند. دامنه و ضابطه‌ی این توابع به صورت زیر تعریف می‌شوند.

الف) $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$ و $(fog)(x)=f(g(x))$ / ب) $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$ و $(gof)(x)=g(f(x))$

* **مثال**: اگر $f=\{(0,-1),(5,2),(3,5),(-2,4)\}$ و $g=\{(1,2),(3,-1),(2,0),(-1,4),(5,-7)\}$، هر یک از توابع fog، gof، fof و gog را با نوشتن اعضا مشخص کنید. (× یعنی تعریف نشده)

جواب:

$1\in D_g \Rightarrow (fog)(1)=f(g(1))=f(2)\times$ ، $3\in D_g\Rightarrow (fog)(3)=f(g(3))=f(-1)\times$ ، $2\in D_g\Rightarrow (fog)(2)=f(0)=-1$

$-1\in D_g\Rightarrow (fog)(-1)=f(4)\times$ ، $5\in D_g\Rightarrow (fog)(5)=f(-7)\times \Rightarrow fog=\{(2,-1)\}$ لذا، $(fog)(2)=-1$ پس fog، فقط در ۲ تعریف شد و

$0\in D_f\Rightarrow (gof)(0)=g(-1)=4$ / $5\in D_f\Rightarrow (gof)(5)=g(2)=0$ / $3\in D_f\Rightarrow (gof)(3)=g(5)=-7$

$-2\in D_f\Rightarrow (gof)(-2)=g(4)\times \Rightarrow gof=\{(0,4),(5,0),(3,-7)\}$

$0\in D_f \Rightarrow (fof)(0)=f(f(0))=f(-1)\times$ ، $5\in D_f\Rightarrow (fof)(5)=f(2)\times$ ، $3\in D_f\Rightarrow (fof)(3)=f(5)=2$

$-2\in D_f\Rightarrow (fof)(-2)=f(4)\times \Rightarrow fof=\{(3,2)\}$

$1\in D_g\Rightarrow (gog)(1)=g(g(1))=g(2)=0$ / $3\in D_g\Rightarrow (gog)(3)=g(-1)=4$ / $2\in D_g\Rightarrow (gog)(2)=g(g(2))=g(0)\times$

$-1\in D_g\Rightarrow (gog)(-1)=g(4)\times$ / $5\in D_g\Rightarrow (gog)(5)=g(-7)\times \Rightarrow gog=\{(1,0),(3,4)\}$

* پاسخ کار در کلاس اول صفحه‌ی ۱۴ کتاب :

۱- با توجه به جدول های مقابل، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$f(x)$	-7	-5	-3	-1	3	5	5

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$g(x)$	8	4	0	-1	0	4	8

الف) $(fog)(1)=f(g(1))=f(0)=-1$ / ب) $(fog)(-1)=f(g(-1))=f(0)=-1$ / پ) $(gof)(0)=g(f(0))=g(-1)=0$

ت) $(gog)(-2)=g(g(-2))=g(3)=8$ / ث) $(gof)(2)=g(f(2))=g(5)$ × / ج) $(fof)(1)=f(f(1))=f(4)=5$

۲- مثال : اگر $f(x)=x-2$ و $g(x)=x^2-1$ ، دامنه و ضابطه‌ی تابع gof را به دست آورید.

* نکته : هرگاه دامنه‌ی تابع f و g ، مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد، یعنی $D_f=D_g=\mathbb{R}$ ، آنگاه: $D_{fog}=\mathbb{R}$ ، $D_{gof}=\mathbb{R}$

جواب: $f(x)=x-2 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$ ، $g(x)=x^2-1 \Rightarrow D_g=\mathbb{R} \Rightarrow D_{gof}=\mathbb{R}$

$$(gof)(x)=g(f(x))=f^2(x)-1=(x-2)^2-1=x^2-4x+4-1=x^2-4x+3$$

۳- مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2x^2-1$ ، دامنه و ضابطه‌ی تابع‌های fog و gof را به دست آورید.

جواب: $f(x)=\sqrt{x-1} \Rightarrow D_f: x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$ / $g(x)=2x^2-1 \Rightarrow D_g=\mathbb{R}$ /

x		-1		1	
$2x^2-2$	$+$	0	$-$	0	$+$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \mid (2x^2-1)\geq 1\}=\{x\in\mathbb{R} \mid 2x^2-2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq -1$ یا $x\geq 1\}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)-1}=\sqrt{2x^2-1-1}=\sqrt{2x^2-2}$$

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\geq 1 \mid \sqrt{x-1}\in\mathbb{R}\}=[1,+\infty)$ ، $(gof)(x)=g(f(x))=2f^2(x)-1=2(x-1)-1=2x-3$

چند نکته : ۱- با توجه به مثال فوق (مثال ۳) و مثال صفحه‌ی قبل، نتیجه میشود در حالت کلی، توابع fog و gof با هم مساوی نیستند.

۲- با توجه به مثال فوق (مثال ۳)، در می‌یابیم که دامنه‌ی ترکیب دو تابع با توجه به تعریف باید محاسبه شود و در حالت کلی تعیین دامنه از روی ضابطه‌ی ترکیب با نتیجه‌ی تعریف یکی نیست.

مثال فوق: $(gof)(x)=2x-3 \Rightarrow D=\mathbb{R} \neq [1,+\infty)=D_{gof}$

* پاسخ کار در کلاس دوم، صفحه‌ی ۱۴ کتاب : اگر $f(x)=\frac{2}{x-1}$ و $g(x)=\frac{3}{x}$ ، دامنه و ضابطه‌ی توابع fog و fof را به دست آورید.

جواب: $f(x)=\frac{2}{x-1} \Rightarrow D_f: x\neq 1$ / $g(x)=\frac{3}{x} \Rightarrow D_g: x\neq 0$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\neq 0 \mid \frac{3}{x}\neq 1\}=\{x\neq 0 \mid x\neq 3\}=\mathbb{R}-\{0,3\}$

$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{2}{g(x)-1}=\frac{2}{\frac{3}{x}-1}=\frac{2x}{3-x}$

$D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}=\{x\neq 1 \mid \frac{2}{x-1}\neq 1\}=\{x\neq 1 \mid x-1\neq 2\}=\{x\neq 1 \mid x\neq 3\}=\mathbb{R}-\{1,3\}$

$$(fof)(x)=f(f(x))=\frac{2}{f(x)-1}=\frac{2}{\frac{2}{x-1}-1}=\frac{2(x-1)}{2-(x-1)}=\frac{2x-2}{3-x}$$

* مثال (کنکور ۹۹ - داخل کشور) اگر $f(x)=2x-[2x]$ و $g(x)=-x^2+4x$ باشند، برد تابع gof کدام است؟

۱) $[0,2)$ ۲) $[0,3)$ ۳) $[0,4)$ ۴) $[1,4)$

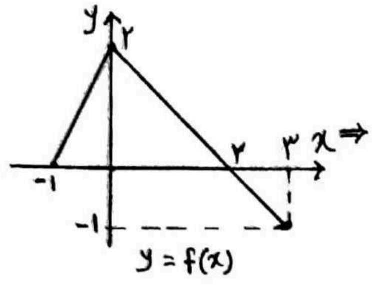
جواب: نکته ۱: به ازای هر عدد حقیقی α ، همواره داریم: $0\leq \alpha-[\alpha]<1$ ، لذا در اینجا نیز به ازای هر عدد حقیقی x داریم: $0\leq f(x)<1$.

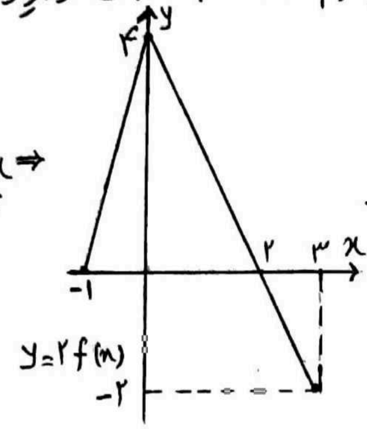
نکته ۲: چون در تابع درجه‌ی دوم g ، ضریب x^2 منفی، نمودار $g(x)$ به صورت $\cap$ می‌باشد و چون طول رأس $x=\frac{-4}{-2}=2$ می‌باشد، لذا g در فاصله‌ی $(-\infty,2]$ اکیداً صعودی و در فاصله‌ی $[2,+\infty)$ ، اکیداً نزولی است. پس در این سؤال داریم:

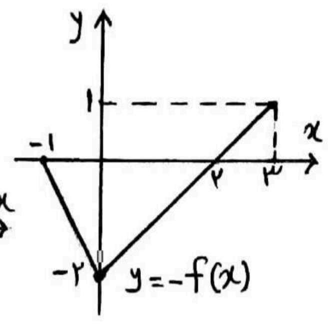
$(gof)(x)=g(\underbrace{f(x)}_{t})=-t^2+4t$ ، $0\leq t<1$ ، $g(0)=0$ ، $g(1)=-1+4=3 \Rightarrow R_{gof}=[0,3)$ (گزینه‌ی دوم)

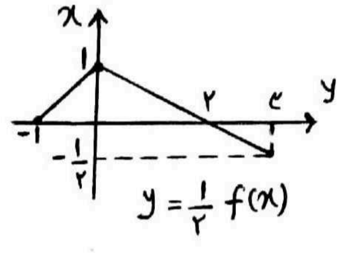
★ تبدیل نمودار تابع:

۱- رسم نمودار $y=kf(x)$: برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ (با توجه به نمودار $y=f(x)$)، کافی است با حفظ طول هر نقطه از نمودار $y=f(x)$، عرض آن نقطه را k برابر کنیم. یعنی اگر $A(a,b)$ نقطه ای از نمودار $y=f(x)$ باشد، A را به نقطه ی $A'(a,kb)$ تبدیل کنیم. ★ مثال: در شکل زیر، نمودار تابع f رسم شده است. به کمک آن نمودار توابع $y=2f(x)$، $y=\frac{1}{2}f(x)$ و $y=-f(x)$ را رسم کنید.









★ چند نکته:

۱- دامنه ی توابع $y=f(x)$ و $y=kf(x)$ یکسان می باشند، ولی بُرد آنها ممکن است یکسان نباشد.

۲- اگر $k>1$، آنگاه نمودار $y=kf(x)$ را اصطلاحاً با انبساط عمودی نمودار $y=f(x)$، می توان بدست آورد.

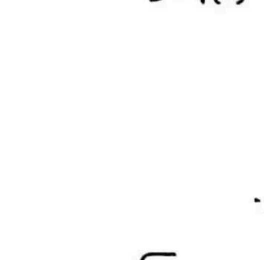
۳- اگر $0<k<1$، آنگاه نمودار $y=kf(x)$ را اصطلاحاً با انقباض عمودی نمودار $y=f(x)$، می توان بدست آورد.

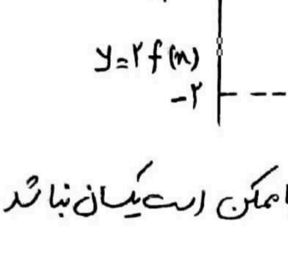
۴- اگر $k<0$، آنگاه نمودار $y=f(x)$، ابتدا نسبت به محور x ها قرینه شده، سپس به طور عمودی منبسط ($k<-1$) یا منقبض ($-1<k<0$) می گردد. در حالت خاص، نمودار $y=-f(x)$، قرینه ی نمودار $y=f(x)$، نسبت به محور x ها می باشد.

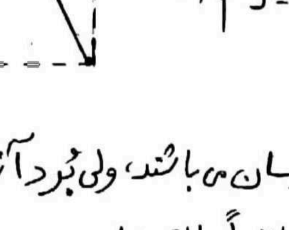
★ پاسخ کار در کلاس اول، صفحه ی ۱۶ کتاب: نمودار تابع $f(x)=|x-2|$ را در بازه ی $[-2,4]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-2|$ و $h(x)=\frac{1}{2}|x-2|$ و $k(x)=\frac{-1}{4}|x-2|$ را رسم کنید.

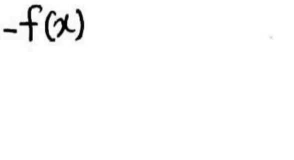
جواب: $f(x)=|x-2| \Rightarrow$

x	-2	2	3
$f(x)$	4	0	1









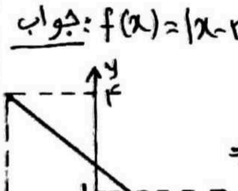
توجه: برای رسم نمودار توابع قدر مطلقی، از ریشه ی عبارت داخل قدر مطلق استفاده می کنیم. $f(x)=|x-2| \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$.

★ مثال (کنکور ۹۸ - تجربی - داخل کشور) تابع با ضابطه ی $f(x)=|x+2|+|x-1|$، در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

(۱ $(-\infty,-2)$ (۲ $(-\infty,1)$ (۳ $(-2,1)$ (۴ $(1,+\infty)$

جواب: ریشه های عبارت های داخل قدر مطلق: $\begin{cases}x+2=0\\x-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\x=1\end{cases}$

x	-3	-2	1	2
y	5	3	3	5



★ f در فاصله ی $(-\infty,-2)$ اکیداً نزولی است. (گزینه ی اول)

★ پاسخ کار در کلاس دوم، صفحه ی ۱۶ کتاب:

- نمودار بنفش مربوط به $y=\sin x$ است و $D=[-\pi,\pi]$ و $R=[-1,1]$.
- نمودار سبز مربوط به $y=\frac{1}{2}\sin x$ است و $D=[-\pi,\pi]$ و $R=[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}]$.
- نمودار نارنجی مربوط به $y=2\sin x$ است و $D=[-\pi,\pi]$ و $R=[-2,2]$.
- نمودار آبی مربوط به $y=-2\sin x$ است و $D=[-\pi,\pi]$ و $R=[-2,2]$.

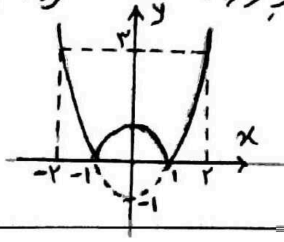
* ادامه‌ی رسم نمودار: ۲- رسم نمودار $|f|$: برای رسم نمودار $y=|f(x)|$، ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم نموده، سپس با حفظ قسمت‌های بالا و روی محور xها و حذف قسمت‌هایی که زیر محور xهاست، قرینه‌ی این قسمت‌های حذف شده را نسبت به محور xها، در بالای محور xها، رسم می‌کنیم.

* مثال: نمودار $y=|x^2-1|$ را رسم کنید.

$y=x^2-1$

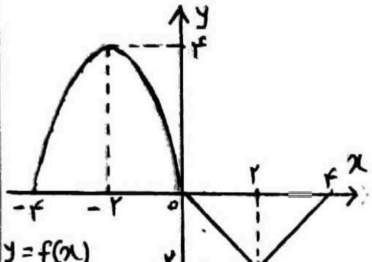
x	-2	-1	0	1	2
y	3	0	-1	0	3

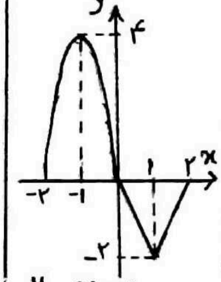
$\Rightarrow$

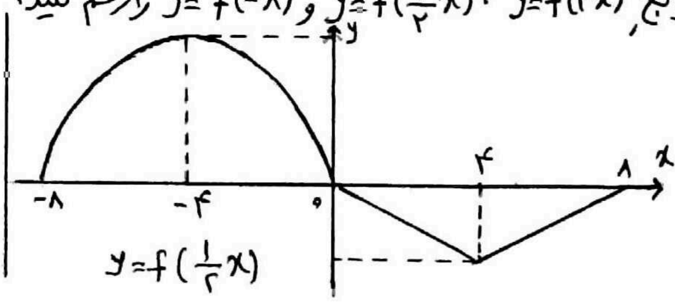


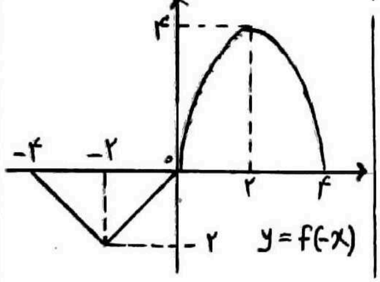
۳- رسم نمودار $y=f(kx)$: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.
یعنی اگر $A(a,b)$ نقطه‌ای از نمودار $y=f(x)$ باشد، A به نقطه‌ی $A'(\frac{1}{k}a, b)$ تبدیل می‌شود.

* مثال (کار در کلاس صفحه‌ی ۲۰ کتاب): نمودار تابع f با دامنه‌ی $[-4,4]$ به صورت زیر داده شده است. با استفاده از این نمودار، نمودار توابع $y=f(2x)$، $y=f(\frac{1}{2}x)$ و $y=f(-x)$ را رسم کنید.









توجه: $y=f(x) \Rightarrow D=[-4,4]$

$y=f(2x) \Rightarrow D: -4\leq 2x\leq 4 \Rightarrow -2\leq x\leq 2 \Rightarrow D=[-2,2]$

$y=f(\frac{1}{2}x) \Rightarrow D: -4\leq \frac{1}{2}x\leq 4 \Rightarrow -4\times 2\leq 2\times\frac{1}{2}x\leq 2\times 4 \Rightarrow -8\leq x\leq 8 \Rightarrow D=[-8,8]$

$y=f(-x) \Rightarrow D: -4\leq -x\leq 4 \Rightarrow -4\leq x\leq 4 \Rightarrow D=[-4,4]$

نکته: هرگاه داشته باشیم $a\leq x\leq b$ و $k<0$، آنگاه: $kb\leq kx\leq ka$.

مثال: $-2\leq x\leq 4 \Rightarrow -8\leq -2x\leq 4$ / $2\leq x<5 \Rightarrow -\frac{5}{2}<-\frac{1}{2}x\leq -1$ / $-4<x<-1 \Rightarrow 1<-x<4$

* چند نکته:

۱- دامنه‌ی توابع $y=f(x)$ و $y=f(kx)$، الزاماً باهم یکسان نیست، ولی برد آنها یکسان است.

۲- اگر $0<k<1$، آنگاه نمودار $y=f(kx)$ را اصطلاحاً با انبساط افقی نمودار $y=f(x)$، می‌توان بدست آورد.

۳- اگر $k>1$، آنگاه نمودار $y=f(kx)$ را اصطلاحاً با انقباض افقی نمودار $y=f(x)$، می‌توان بدست آورد.

۴- اگر $k<0$، آنگاه نمودار $y=f(x)$، ابتدا نسبت به محور yها قرینه شده، سپس به طور افقی منبسط $(-1<k<0)$ یا منقبض $(k<-1)$ می‌گردد. * در حالت خاص، نمودار $y=f(-x)$، قرینه‌ی نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور yها می‌باشد.

* پاسخ کار در کلاس صفحه‌ی ۱۹ کتاب:

الف) $y=\sqrt{x} \Rightarrow D=[0,+\infty)$, $R=[0,+\infty)$

ب) $y=-\sqrt{x} \Rightarrow D=[0,+\infty)$, $R=(-\infty,0]$

پ) $y=\sqrt{-x} \Rightarrow D=(-\infty,0]$ و $R=[0,+\infty)$

ت) $y=-\sqrt{-x} \Rightarrow D=(-\infty,0]$ و $R=(-\infty,0]$

★ تمرین صفحه‌ی ۲۲ کتاب:

① اگر $f=\{(7,8),(5,3),(9,8),(11,4)\}$ و $g=\{(5,7),(3,5),(7,9),(9,11)\}$ توابع fog و gof را به دست آورید.

جواب: $(fog)(5)=f(7)=8\ /\ (fog)(3)=f(5)=3\ /\ (fog)(7)=f(9)=8\ /\ (fog)(9)=f(11)=4$

$(gof)(7)=g(8)=\times\ /\ (gof)(5)=g(3)=5\ /\ (gof)(9)=g(8)\times\ /\ (gof)(11)=g(4)\times$

$\Rightarrow fog=\{(5,8),(3,3),(7,8),(9,4)\}\ ,\ gof=\{(5,5)\}$

② در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $f(x)=x^2-5\ ;\ g(x)=\sqrt{x+6}\ :\ D_{fog}\ ,\ (fog)(x)$

جواب: $D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g: x+6\geq 0\Rightarrow x\geq -6 \Rightarrow D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\geq -6 \mid \sqrt{x+6}\in \mathbb{R}\}=[-6,+\infty)$

$(fog)(x)=f(g(x))=g^2(x)-5=(\sqrt{x+6})^2-5=x+6-5=x+1$

ب) $f(x)=\sqrt{3-2x}\ ,\ g(x)=\frac{6}{3x-5}\ :\ D_{fog}\ ,\ (fog)(x)$

جواب: $D_f: 3-2x\geq 0\Rightarrow -2x\geq -3\Rightarrow x\leq 3/2\ ،\ D_g: 3x-5\neq 0\Rightarrow x\neq \frac{5}{3}$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\neq \frac{5}{3} \mid \frac{6}{3x-5}\leq \frac{3}{2}\}=\{x\neq\frac{5}{3} \mid x<\frac{5}{3}$ یا $x\geq 3\}=(-\infty,\frac{5}{3})\cup[3,+\infty)$

$\Rightarrow D_{fog}=(-\infty,\frac{13}{6}]-\{\frac{5}{3}\}\ ,\ (fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{3-2g(x)}=\sqrt{3-\frac{12}{3x-5}}=\sqrt{\frac{9x-27}{3x-5}}$

★★: $\frac{6}{3x-5}\leq\frac{3}{2}\Rightarrow \frac{6}{3x-5}-\frac{3}{2}\leq 0\Rightarrow \frac{12-9x+15}{6x-10}\leq 0\Rightarrow\frac{27-9x}{6x-10}\leq 0\Rightarrow \begin{cases}27-9x=0\Rightarrow x=3\\ 6x-10=0\Rightarrow x=\frac{5}{3}\end{cases}$

x	$-\infty$	$5/3$		3		$+\infty$
$27-9x$	+		+	0	−	
$6x-10$	−	0	+		+	
$\frac{27-9x}{6x-10}$	−	∄	+	0	−	

پ) $f(x)=\sqrt{x+2}\ ;\ g(x)=\sqrt{x^2-16}\ :\ D_{gof}\ ,\ (gof)(x)$

جواب: $D_f: x+2\geq 0\Rightarrow x\geq -2\ ،\ D_g: x^2-16\geq 0\Rightarrow x\leq -4$ یا $x\geq 4$

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\geq -2 \mid \sqrt{x+2}\leq -4$ یا $\sqrt{x+2}\geq 4\}$

* نامساوی $\sqrt{x+2}\leq -4$، هیچگاه اتفاق نمی‌افتد (جواب ندارد) لذا: $\sqrt{x+2}\geq 4\Rightarrow x+2\geq 16\Rightarrow x\geq 14$

$\Rightarrow D_{gof}=\{x\geq -2 \mid x\geq 14\}=[14,+\infty)\ ،\ (gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{f^2(x)-16}=\sqrt{x+2-16}=\sqrt{x-14}$

ت) $f(x)=\sin x\ ;\ g(x)=\sqrt{x}\ :\ D_{gof}\ ,\ (gof)(x)$

جواب: $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g: x\geq 0\ ،\ D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid \sin x\geq 0\}$

★ توجه: $\sin x$ در ربع اول و دوم دایره مثلثاتی منفی نیست، لذا: $D_{gof}=\dots\cup[-2\pi,-\pi]\cup[0,\pi]\cup[2\pi,3\pi]\cup\dots$

و $(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\sin x}$

③ اگر $f(g(x))=3x^2-6x+14$ و $f(x)=3x-4$، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ را به دست آورید.

جواب: $f(g(x))=3x^2-6x+14\Rightarrow 3g(x)-4=3x^2-6x+14\Rightarrow 3g(x)=3x^2-6x+18\Rightarrow g(x)=x^2-2x+6$

④ مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x)=x^2-4$ و $g(x)=\sqrt{x^2-4}$؛ آنگاه $(fog)(5)=-25$. **جواب**: نادرست، زیرا:

$(fog)(5)=f(g(5))=f(\sqrt{25-4})=f(\sqrt{21})=(\sqrt{21})^2-4=21-4=17$

* ادامه‌ی حل تمرینات ص ۲۲ کتاب:

④ ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$، تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست. جواب: نادرست. زیرا مثلاً با فرض $f(x) = 2x-1$ و $g(x) = x^2+2$، مقدار x را طوری تعیین می‌کنیم که تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ برقرار باشد.

$$f(g(x)) = g(f(x)) \Rightarrow 2g(x) - 1 = f^2(x) + 2 \Rightarrow 2(x^2+2) - 1 = (2x-1)^2 + 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3 = 4x^2 - 4x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow (f \circ g)(0) = f(2) = 3,\ (g \circ f)(0) = g(-1) = 3 \\ x = 2 \Rightarrow (f \circ g)(2) = f(6) = 11,\ (g \circ f)(2) = 11 \end{cases}$$

پ) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$، آنگاه $(f \circ g)(4) = 5$. جواب: درست، زیرا: $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(7) = 5$

ت) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x-1$، آنگاه $(f \circ g)(5) = g(2)$. جواب: درست، زیرا:

$$\begin{cases} g(2) = 3 \\ (f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(9) = \sqrt{9} = 3 \end{cases}$$

⑤ الناز می‌خواهد از فروشگاه یک لپ تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای جمعه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام یک از حالت‌های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند. ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

جواب: قیمت لپ تاپ بیش از دو میلیون تومانی: x، استفاده از تخفیف نقدی ۲۰۰ هزار تومانی: g، استفاده از کارت تخفیف ۲۰ درصدی: f

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-200) = (\%100 - \%20) \times (x-200) = 0/8(x-200) = 0/8x - 160$$

= قیمت لپ تاپ بعد از اینکه ابتدا از ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی استفاده شده و سپس کارت تخفیف ۲۰ درصدی ارائه شده.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0/8x) = 0/8x - 200 \Rightarrow$$ قیمت لپ تاپ بعد از اینکه ابتدا کارت تخفیف ۲۰ درصدی ارائه شده و سپس از ۲۰۰ هزار تومان، تخفیف نقدی استفاده شده. واضح است چون $0/8x - 200 < 0/8x - 160$،

لذا ابتدا کارت تخفیف ارائه شود و بعد از تخفیف نقدی ۲۰۰ هزار تومانی استفاده گردد، به نفع خریدار است.

⑥ تابع $h(x) = (x^2 - 4x + 1)^5$، ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ ؛ $g(x) = 4x^2 - 4x + 1$

ب) $K(x) = x^5$ ؛ $L(x) = 4x^2 - 4x + 1 \Longrightarrow$ جواب: $(K \circ L)(x) = K(L(x)) = L^5(x) = (4x^2 - 4x + 1)^5 = h(x)$

⑦ هر یک از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x) = \sqrt[4]{x^2+1} \Longrightarrow$ جواب: $f(x) = \sqrt[4]{x}$ و $g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt[4]{g(x)} = \sqrt[4]{x^2+1} = h(x)$

ادامه‌ی جواب الف: $f(x) = \sqrt[4]{x+1}$ و $g(x) = x^2 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \sqrt[4]{g(x)+1} = \sqrt[4]{x^2+1} = h(x)$. پس جواب منحصر به فرد نیست.

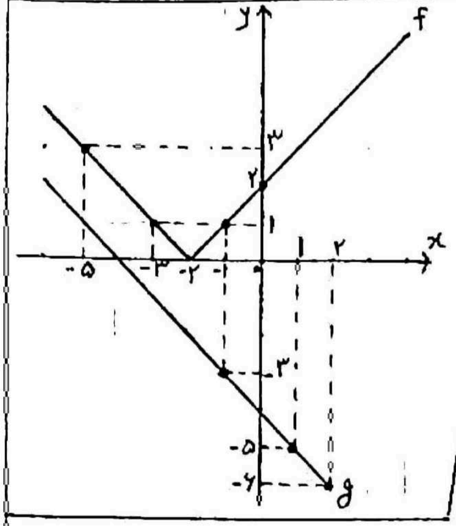
ب) $L(x) = \sqrt{x^2+5} \Longrightarrow$ جواب: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 5 \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2+5} = L(x)$

ادامه‌ی جواب ب: $f(x) = \sqrt{x+5}$ و $g(x) = x^2 \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)+5} = \sqrt{x^2+5} = L(x)$

پس جواب، منحصر به فرد نیست.

* ادامه‌ی حل تمرین‌ها، ص ۲۳ ک.د

۸) با توجه به نمودارهای توابع f و g، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f(-3)=1$

ب) $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(2)=-6$

پ) $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(-5)=3$

ت) $(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(1)=-5$

۹) با توجه به ضابطه‌های توابع f و g، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x)=2x-5$, $g(x)=x^2-3x+8$: $(f\circ g)(x)=7 \Rightarrow f(g(x))=7 \Rightarrow 2g(x)-5=7$

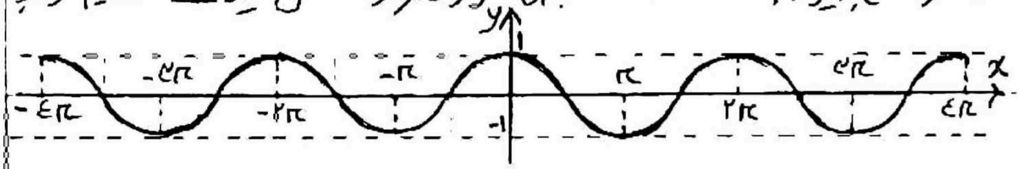
$\Rightarrow 2(x^2-3x+8)-5-7=0 \Rightarrow 2x^2-6x+4=0 \xrightarrow{\div 2} x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

ب) $f(x)=3x^2+x-1$, $g(x)=1-2x$: $(g\circ f)(x)=-5 \Rightarrow g(f(x))=-5 \Rightarrow 1-2f(x)=-5$

$\Rightarrow 1-2(3x^2+x-1)+5=0 \Rightarrow 1-6x^2-2x+2+5=0 \Rightarrow -6x^2-2x+8=0 \xrightarrow{\div -2} 3x^2+x-4=0$

$\Rightarrow \Delta=1^2-4(3)(-4)=1+48=49 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{-1\pm 7}{6} \Rightarrow x=1 \ ,\ x=\frac{-8}{6}=-\frac{4}{3}$

۱۰) با استفاده از نمودار $y=\cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه‌ی هر نمودار را مشخص کنید. جواب: می‌دانیم نمودار $y=\cos x$ عبارت است از:



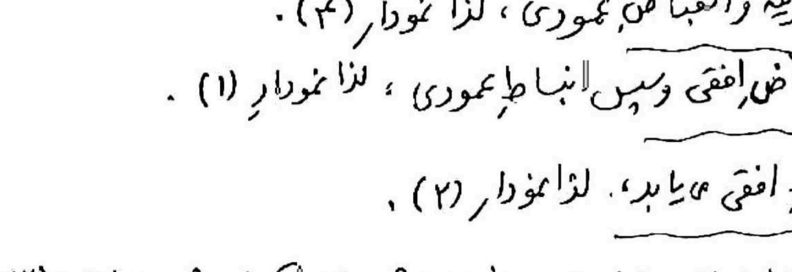
الف) $y=-\frac{1}{2}\cos(-\frac{1}{2}x)$: ابتدا نمودار $y=\cos x$، نسبت به محور yها قرینه، سپس انبساط افقی و بالاخره نسبت به محور xها قرینه و انقباض عمودی، لذا نمودار (۴).

ب) $y=2\cos 2x$: ابتدا نمودار $y=\cos x$ انقباض افقی و سپس انبساط عمودی، لذا نمودار (۱).

پ) $y=\cos(\frac{1}{2}x)$: نمودار $y=\cos x$، انبساط افقی می‌یابد. لذا نمودار (۲).

ت) $y=-\cos 2x$: نمودار $y=\cos x$، ابتدا انقباض افقی یافته و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌شود. لذا نمودار (۳).

۱۱) نمودار توابع $y=-\sin 2x-1$ و $y=2\sin(-\frac{1}{3}x)$ را به کمک نمودار تابع $y=\sin x$ در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$، رسم کنید.



* جدول مقادیر $y=\sin x$ در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ عبارت است از:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y	0	-1	0	1	0

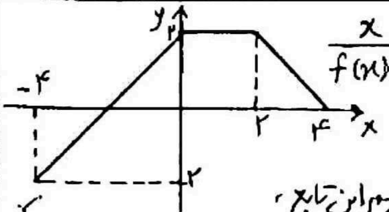
* برای رسم $y=-\sin 2x-1$، ابتدا طول نقاط $y=\sin x$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب نموده و عرض نقاط را نیز قرینه و منهای یک می‌کنیم.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	-1	0	-1	-2	-1

* برای رسم $y=2\sin(-\frac{1}{3}x)$، ابتدا طول نقاط $y=\sin x$ را در -3 ضرب کرده و سپس، عرض نقاط را نیز دو برابر می‌کنیم.

x	3π	$\frac{3\pi}{2}$	0	$-\frac{3\pi}{2}$	-3π
y	0	-2	0	2	0

* ادامه‌ی حل تمرینات صفحه‌ی ۲۴ کتاب:

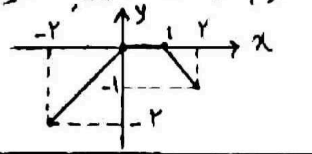


x	-4	0	2	4
$f(x)$	-2	2	2	0

(۱۲) با استفاده از نمودار تابع f، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.

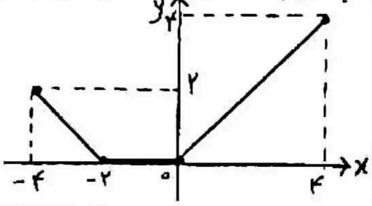
الف) $y=\frac{1}{2}f(2x)-1$: برای رسم این تابع طول نقاط تابع $f(x)$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب نموده و عرض نقاط نیز در $\frac{1}{2}$ ضرب و سپس یک واحد کم می‌کنیم.

x	-2	0	1	2
y	-2	0	0	-1



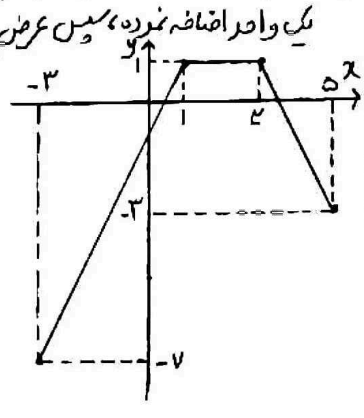
ب) $y=-f(-x)+2$: برای رسم این تابع، ابتدا طول نقاط تابع $f(x)$ را قرینه و سپس عرض نقاط را نیز قرینه نموده، به علاوه‌ی ۲ می‌کنیم.

x	4	0	-2	-4
y	4	0	0	2



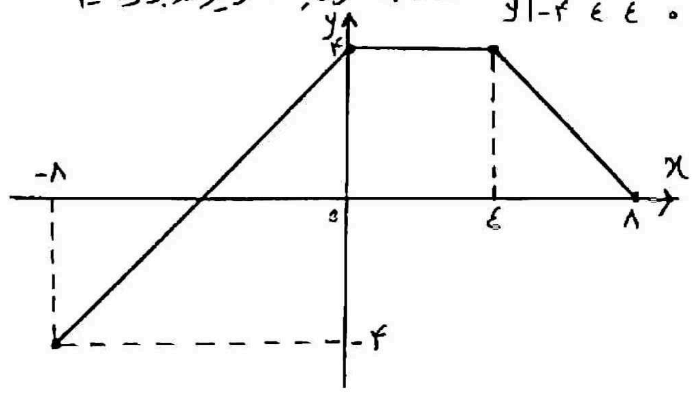
پ) $y=2f(x-1)-3$: برای رسم این تابع به طول نقاط تابع $f(x)$ یک واحد اضافه نموده، سپس عرض نقاط را دو برابر و منهای سه می‌کنیم.

x	-3	1	3	5
y	-7	1	1	-3



ت) $y=2f(\frac{1}{2}x)$: برای رسم این تابع، طول نقاط تابع $f(x)$ را دو برابر و عرض نقاط را نیز دو برابر می‌کنیم.

x	-8	0	4	8
y	-4	4	4	0



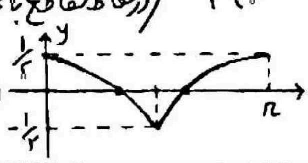
* مثال (کنکور ۱۴۰۰ - تجربی - داخل کشور) نمودار تابع $y=2^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ در امتداد محور xها در جهت مثبت و سپس $\frac{3}{2}$ در امتداد محور yها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور xها، در فاصله‌ی $[0,\pi]$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

جواب: معادله‌ی جدید: $y=2^{|\sin(\frac{\pi}{2}-x)|}-\frac{3}{2} \Longrightarrow$ (در نقاط تقاطع با محور xها، $y=0$ باید شد)

$\Rightarrow y=2^{|\cos x|}-\frac{3}{2} \Rightarrow$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y	$2^1-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$	$2^0-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$	$2^1-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$  $\Rightarrow$ (گزینه‌ی سوم)

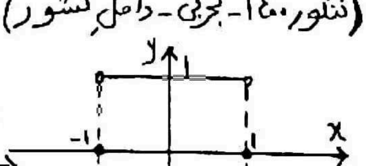
* مثال (کنکور ۱۴۰۰ - تجربی - داخل کشور) فرض کنید $g(x)=\begin{cases}1 & ;\ x>0\\ 0 & ;\ x=0\\ -1 & ;\ x<0\end{cases}$ و $f(x)=1-x^2$، تعداد نقاط ناپیوستگی تابع gof کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

جواب:

x		-1		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow (gof)(x)=g(f(x))=\begin{cases}-1 & ;\ x<-1 \text{ یا } x>1\\ 0 & ;\ x=-1\ ،\ 1\\ 1 & ;\ -1<x<1\end{cases} \Rightarrow$



* تابع gof در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۱- ناپیوسته. (گزینه‌ی سوم)

* مثال (کنکور ۹۹ - تجربی - خارج کشور) نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2-2x\ ;\ (x>1)$، مفروض است. قرینه‌ی نمودار آن نسبت به محور xها را، ۱۶ واحد در امتداد محور yها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $4\sqrt{5}$ ۲) $6\sqrt{2}$ ۳) $5\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

جواب: $f(x)=x^2-2x;(x>1) \Rightarrow$ معادله‌ی منحنی جدید: $g(x)=-(x^2-2x)+16 \xrightarrow{f(x)=g(x)} x^2-2x=-x^2+2x+16$

$\Rightarrow 2x^2-4x-16=0 \xrightarrow{\div 2} x^2-2x-8=0 \Rightarrow (x-4)(x+2)=0 \Rightarrow x=-2$ ✗ ، $x=4$ ✓ $\Rightarrow f(4)=16-8=8$

$\Rightarrow A(4,8)$ نقطه‌ی برخورد دو منحنی $\Rightarrow OA=\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=\sqrt{16\times 5}=4\sqrt{5}$ (گزینه‌ی اول)

★ تابع وارون ★

* مقدمه: می‌دانیم هرگاه f مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب باشد، آنگاه f درصورتی تابع است که در آن دو زوج با طول‌های مساوی و عرض‌های متفاوت یافت نشود. مثال: $g=\{(1,-1),(2,1),(1,2)\}$ تابع نیست، $f=\{(-1,1),(2,0),(1,2),(3,1)\}$ تابع است.

همچنین تابع f را یک‌به‌یک می‌نامند، هرگاه در آن دو زوج با عرض‌های مساوی یافت نشود. مثال:

$f=\{(-1,1),(2,0),(1,2),(3,1)\}$ تابع یک به یک نیست. $h=\{(1,-1),(2,1),(-1,2)\}$ تابع یک به یک است.

* تعریف وارون یک تابع: هرگاه f تابع دلخواهی باشد، آنگاه وارون تابع f به صورت: $f^{-1}=\{(b,a)\,|\,(a,b)\in f\}$ تعریف می‌شود. مثال: وارون هریک از توابع زیر را نوشته و معین کنید که کدام یک تابع می‌باشد.

$f=\{(-1,1),(2,0),(1,2),(3,1)\} \Rightarrow f^{-1}=\{(1,-1),(0,2),(2,1),(1,3)\} \Rightarrow$ f^{-1} تابع نیست.

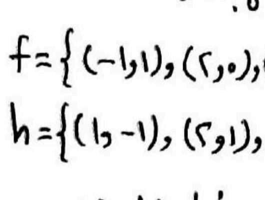
$h=\{(1,-1),(2,1),(-1,2)\} \Rightarrow g^{-1}=\{(-1,1),(1,2),(2,-1)\} \Rightarrow$ h^{-1} تابع است.

* تعریف "تابع وارون": هرگاه f تابعی یک‌به‌یک باشد، آنگاه وارون آن یعنی f^{-1} نیز تابع خواهد بود، لذا در این حالت f را وارون‌پذیر می‌نامند. مثلاً تابع h در مثال فوق چون یک به یک بود، h^{-1} نیز تابع می‌باشد.

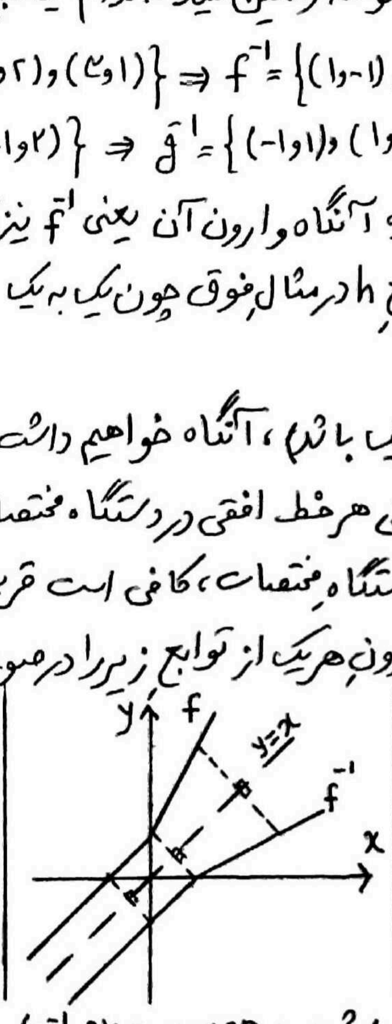
* چند نکته پیرامون تابع وارون:

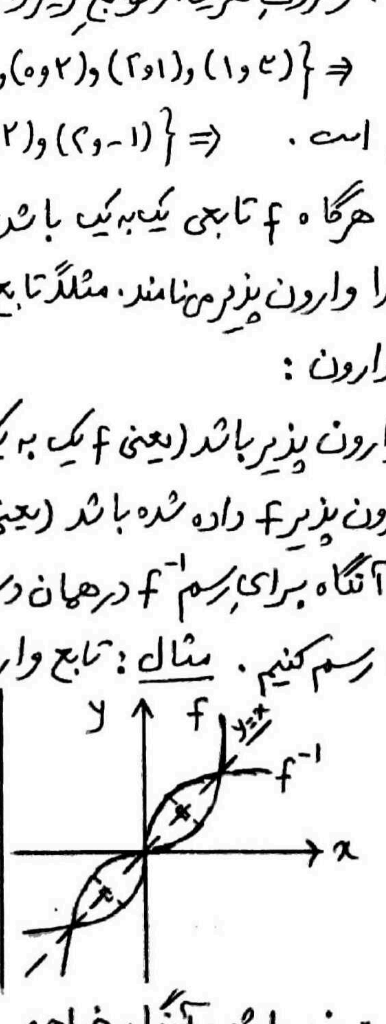
۱- هرگاه f تابعی وارون‌پذیر باشد (یعنی f یک به یک باشد)، آنگاه خواهیم داشت: $D_{f^{-1}}=R_f$ و $R_{f^{-1}}=D_f$

۲- هرگاه نمودار تابع وارون‌پذیر f داده شده باشد (یعنی هر خط افقی در دستگاه مختصات نمودار f را حداکثر در یک نقطه قطع کند)، آنگاه برای رسم f^{-1} در همان دستگاه مختصات، کافی است قرینه‌ی f را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم ($y=x$) رسم کنیم. مثال: تابع وارون هریک از توابع زیر را در صورت وجود رسم کنید.



* با توجه به خط افقی رسم شده این نمودار مربوط به تابعی یک به یک نیست.





۳- هرگاه f تابعی وارون‌پذیر باشد، آنگاه خواهیم داشت: $(f^{-1}\circ f)(x)=x\,;\,x\in D_f$ و $(f\circ f^{-1})(x)=x\,;\,x\in D_{f^{-1}}$

مثال: هرگاه $f=\{(1,4),(2,3),(3,5)\}$، درستی این نکته را نشان دهید.

جواب: $f=\{(1,4),(2,3),(3,5)\} \Rightarrow f^{-1}=\{(4,1),(3,2),(5,3)\}$

$(f\circ f^{-1})(\underline{4})=f(f^{-1}(4))=f(1)=\underline{4}\ /\ (f\circ f^{-1})(\underline{3})=f(2)=\underline{3}\ /\ (f\circ f^{-1})(\underline{5})=f(3)=\underline{5}$

$(f^{-1}\circ f)(\underline{1})=f^{-1}(f(1))=f^{-1}(4)=\underline{1}\ /\ (f^{-1}\circ f)(\underline{2})=f^{-1}(3)=\underline{2}\ /\ (f^{-1}\circ f)(\underline{3})=f^{-1}(5)=\underline{3}$

* تذکر: با توجه به مثال فوق داریم: $f\circ f^{-1}=\{(4,4),(3,3),(5,5)\}$ و $f^{-1}\circ f=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

لذا ملاحظه می‌گردد که در حالت کلی $f\circ f^{-1}\neq f^{-1}\circ f$.

۴- هرگاه ضابطه‌ی تابع وارون پذیر f داده شده باشد، برای تعیین ضابطه‌ی f^{-1}، ابتدا معادله‌ی $y=f(x)$ را نسبت به x حل می‌کنیم، سپس به جای x قرار می‌دهیم $f^{-1}(x)$ و به جای y نیز قرار می‌دهیم x.

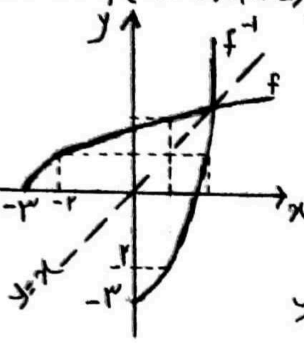
*مثال: ضابطه‌ی تابع وارون تابع $f(x)=\frac{3}{2}x-4$ را به دست آورید. (★ ابتدا به جای $f(x)$، می‌نویسیم y)

جواب: $y=\frac{3}{2}x-4 \xrightarrow{\times 2} 2y=3x-8 \Rightarrow 3x=2y+8 \Rightarrow x=\frac{2y+8}{3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+8}{3}$

*مثال (کار در کلاس، صفحه‌ی ۲۶ کتاب): اگر $f(x)=\sqrt{x+3}$، دامنه و برد توابع f و f^{-1} را به دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید. ضابطه‌ی f^{-1} را نیز به دست آورید.

جواب: $f(x)=\sqrt{x+3} \Rightarrow$

x	-3	-2	1
$f(x)$	0	1	2



$$D_f=[-3,+\infty)=R_{f^{-1}} \quad , \quad R_f=[0,+\infty)=D_{f^{-1}}$$

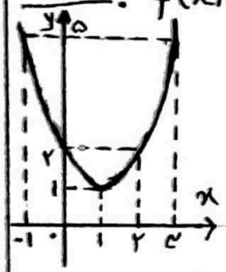
$$f(x)=y \Rightarrow y=\sqrt{x+3} \Rightarrow y^2=x+3 \Rightarrow x=y^2-3 \Rightarrow f^{-1}(x)=x^2-3 \ (x\geq 0)$$

★ f تابعی اکیداً صعودی است، لذا یک به یک می‌باشد، بنابراین وارون پذیر است.

۵- گاهی با محدود کردن دامنه‌ی یک تابع که یک به یک نیست، می‌توان تابعی بدست آورد که یک به یک باشد، و سپس وارون آنرا نیز معین نمود.

*مثال: با رسم نمودار تابع $f(x)=x^2-2x+2$ و محدود کردن دامنه‌ی آن، تابعی یک به یک بدست آورده و ضابطه‌ی وارون آن را محاسبه کنید.

جواب: $f(x)=x^2-2x+1+1 \Rightarrow f(x)=(x-1)^2+1$



برای رسم نمودار تابع f، نمودار $y=x^2$ را یک واحد به راست و یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

واضح است که f در دامنه‌ی تعریفش یعنی $\mathbb{R}$ یک به یک نیست، ولی اگر دامنه‌ی f را هر یک از فاصله‌های $(-\infty,1]$ یا $[1,+\infty)$ درنظر بگیریم (محدود کنیم)، f تابعی یک به یک و وارون پذیر خواهد شد، در این صورت خواهیم داشت:

$$f(x)=(x-1)^2+1 \ ; (x\geq 1) \Rightarrow y=(x-1)^2+1 \Rightarrow (x-1)^2=y-1 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{y-1} \Rightarrow |x-1|=\sqrt{y-1}$$

$$\xrightarrow{x\geq 1 \Rightarrow x-1\geq 0} x-1=\sqrt{y-1} \Rightarrow x=1+\sqrt{y-1} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-1}}$$

حالت دوم: $f(x)=(x-1)^2+1 \ ; (x\leq 1) \Rightarrow y=(x-1)^2+1 \Rightarrow (x-1)^2=y-1 \Rightarrow |x-1|=\sqrt{y-1} \xrightarrow{x\leq 1 \Rightarrow x-1\leq 0} -(x-1)=\sqrt{y-1}$

$$\Rightarrow x-1=-\sqrt{y-1} \Rightarrow x=1-\sqrt{y-1} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=1-\sqrt{x-1}}$$

۶- هرگاه ضابطه‌ی توابع f و g داده شده باشد، برای اینکه نشان دهیم که آیا این دو تابع، وارون یکدیگرند؟، کافی است نشان دهیم:

$$(f\circ g)(x)=x \quad , \quad (g\circ f)(x)=x$$

*مثال: نشان دهید توابع $f(x)=3x-4$ و $g(x)=\frac{x+4}{3}$، وارون یکدیگرند.

جواب: $(f\circ g)(x)=f(g(x))=3g(x)-4=3\left(\frac{x+4}{3}\right)-4=x+4-4=x$ ✓

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{f(x)+4}{3}=\frac{(3x-4)+4}{3}=\frac{3x}{3}=x \ ✓$$

۷- هرگاه f و g دو تابع وارون پذیر باشند، آن‌گاه: $(f\circ g)^{-1}(x)=(g^{-1}\circ f^{-1})(x)$، لذا: $(f\circ g)^{-1}(x)\neq(f^{-1}\circ g^{-1})(x)$

توجه داشته باشید! (در حالت کلی)

۸- باید توجه داشت، هرگاه f تابعی وارون‌پذیر بوده و $f^{-1}(b)=a$، آنگاه خواهیم داشت: $f(a)=b$.

* مثال: اگر $f(x)=1-3x$ و $g(x)=\sqrt{2x+1}-1$، مقدار $(gof)^{-1}(2)$ را بیابید.

جواب: $(gof)^{-1}(2)=(f^{-1}og^{-1})(2)=f^{-1}(g^{-1}(2))=f^{-1}(4)=\boxed{-1}$ ✓

★ $g^{-1}(2)=a \Rightarrow g(a)=2 \Rightarrow \sqrt{2a+1}-1=2 \Rightarrow \sqrt{2a+1}=3 \Rightarrow 2a+1=9 \Rightarrow 2a=8 \Rightarrow a=4 \Rightarrow g^{-1}(2)=4$

★ $f^{-1}(4)=\alpha \Rightarrow f(\alpha)=4 \Rightarrow 1-3\alpha=4 \Rightarrow -3\alpha=3 \Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow f^{-1}(4)=-1$

* تمرین، صفحه‌ی ۲۹ کتاب: ① ضابطه‌ی تابع وارون توابع یک به یک زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{-8x+3}{2} \Rightarrow$ جواب: $y=\frac{-8x+3}{2} \Rightarrow 2y=-8x+3 \Rightarrow 8x=-2y+3 \Rightarrow x=\frac{-2y+3}{8} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-2x+3}{8}$

ب) $g(x)=-5-\sqrt{3x+1} \xrightarrow{\text{جواب}} y=-5-\sqrt{3x+1} \Rightarrow y+5=-\sqrt{3x+1} \Rightarrow (y+5)^2=3x+1 \Rightarrow 3x=(y+5)^2-1$

$\Rightarrow 3x=y^2+10y+25-1 \Rightarrow x=\frac{y^2+10y+24}{3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x^2+10x+24}{3}$

② در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=\frac{-7}{2}x-3$ و $g(x)=-\frac{2x+6}{7}$

* باید نشان دهیم: $(gof)(x)=x$ و $(fog)(x)=x$.

$(fog)(x)=f(g(x))=-\frac{7}{2}g(x)-3=-\frac{7}{2}\left(-\frac{2x+6}{7}\right)-3=+\frac{14x+42}{14}-3=\frac{14(x+3)}{14}-3=x+3-3=x$

$(gof)(x)=g(f(x))=-\frac{2f(x)+6}{7}=-\frac{2(\frac{-7}{2}x-3)+6}{7}=-\frac{-7x-6+6}{7}=-\left(\frac{-7x}{7}\right)=x$

* یادآوری: $|x|=\begin{cases}x\,; & x\geq 0\\ -x\,; & x<0\end{cases}$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-8}$, $g(x)=8+x^2\ ; x\leq 0$ / $(gof)(x)=g(f(x))=8+(-\sqrt{x-8})^2=8+(x-8)=x$

$(fog)(x)=f(g(x))=-\sqrt{g(x)-8}=-\sqrt{8+x^2-8}=-\sqrt{x^2}=-|x|\overset{x\leq 0}{=}-(-x)=x$

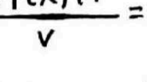
③ رابطه‌ی بین درجه‌ی سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به صورت $f(x)=\frac{9}{5}x+32$ است که در آن x میزان درجه‌ی سانتی‌گراد و f(x) میزان درجه‌ی فارنهایت است. $f^{-1}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می‌دهد؟

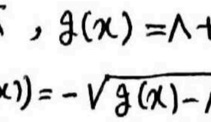
جواب: $f(x)=\frac{9}{5}x+32 \Rightarrow y=\frac{9}{5}x+32 \Rightarrow \frac{9}{5}x=y-32$

$\Rightarrow x=\frac{5}{9}y-\frac{5}{9}\times 32 \Rightarrow x=\frac{5}{9}y-\frac{160}{9} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{5}{9}x-\frac{160}{9}$

$f^{-1}(x)$ رابطه‌ای است بین فارنهایت و سانتی‌گراد، در این رابطه x میزان درجه‌ی فارنهایت و $f^{-1}(x)$، میزان درجه‌ی سانتی‌گراد است.

④ توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه‌ی آنها به دو روش متفاوت، توابعی یک به یک بسازید.

الف) $f(x)=|x| \Rightarrow$  $\Rightarrow$ روش اول: $f(x)=x\ (x\geq 0)$ ، روش دوم: $f(x)=-x\ (x\leq 0)$

ب) $g(x)=-x^2 \Rightarrow$  $\Rightarrow$ روش اول: $g(x)=-x^2\ (x\geq 0)$ ، روش دوم: $g(x)=-x^2\ (x\leq 0)$

پ) $h(x)=x^2+4x+3 \Rightarrow h(x)=x^2+4x+4-1 \Rightarrow h(x)=(x+2)^2-1\ (x\geq -2)$ یا $h(x)=(x+2)^2-1\ (x\leq -2)$

⑤ از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید. * جواب: با توجه به نمودار کتاب داریم:

x	-۳	-۱	۱	۳
f(x)	-۴	-۲	۲	۴

$\Rightarrow$

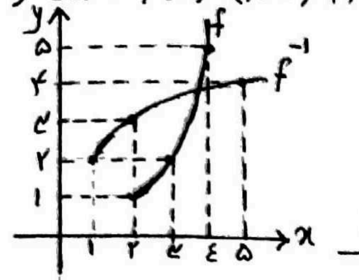
x	-۴	-۲	۲	۴
$f^{-1}(x)$	-۳	-۱	۱	۳

* ادامه‌ی حل تمرینات صفحه‌ی ۲۹ کتاب:

⑥ با محدود کردن دامنه‌ی تابع $f(x)=x^2-4x+5$ یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

$f(x)=x^2-4x+5 \Rightarrow f(x)=x^2-4x+4+1 \Rightarrow f(x)=(x-2)^2+1$

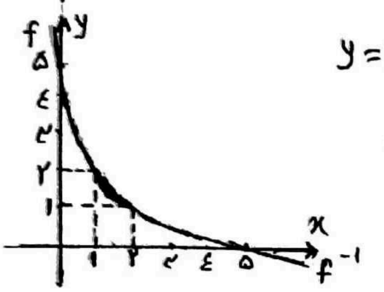
روش اول: $f(x)=(x-2)^2+1$ ؛ $(x\geq 2) \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 2 & 3 & 4 \\ \hline f(x) & 1 & 2 & 5 \end{array}$ و $D_f=[2,+\infty)=R_{f^{-1}}$ ، $R_f=[1,+\infty)=D_{f^{-1}}$



$y=(x-2)^2+1 \Rightarrow (x-2)^2=y-1 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{y-1} \Rightarrow |x-2|=\sqrt{y-1}$

$\xrightarrow[x-2\geq 0]{x\geq 2} x-2=\sqrt{y-1} \Rightarrow x=2+\sqrt{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x)=2+\sqrt{x-1}\ (x\geq 1)$

روش دوم: $f(x)=(x-2)^2+1$ ؛ $(x\leq 2) \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline f(x) & 5 & 2 & 1 \end{array}$ و $D_f=(-\infty,2]=R_{f^{-1}}$ ، $R_f=[1,+\infty)=D_{f^{-1}}$



$y=(x-2)^2+1 \Rightarrow (x-2)^2=y-1 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{y-1} \Rightarrow |x-2|=\sqrt{y-1}$

$\begin{cases} x\leq 2 \Rightarrow x-2\leq 0 \Rightarrow |x-2|=-(x-2) \\ -(x-2)=\sqrt{y-1} \Rightarrow x-2=-\sqrt{y-1} \Rightarrow x=2-\sqrt{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x)=2-\sqrt{x-1} \end{cases}$

★ توجه: در نمودار روبه‌رو، در فاصله‌ی (۲ و ۱)، نمودارهای f و f^{-1} خیلی به هم نزدیک‌اند، ولی f^{-1} کمی بالاتر از f قرار دارد.

---

⑦ اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $(fog)^{-1}(5)=(g^{-1}of^{-1})(5)=g^{-1}(f^{-1}(5))=g^{-1}(64)=4$ ✓ (★ مشابه پ، همان الف است!)

$\begin{cases} f^{-1}(5)=a \Rightarrow f(a)=5 \Rightarrow \frac{1}{8}a-3=5 \Rightarrow \frac{1}{8}a=8 \Rightarrow a=64 \Rightarrow f^{-1}(5)=64 \\ g^{-1}(64)=\alpha \Rightarrow g(\alpha)=64 \Rightarrow \alpha^3=64 \Rightarrow \alpha=\sqrt[3]{64}=4 \Rightarrow g^{-1}(64)=4 \end{cases}$

ب) $(f^{-1}of^{-1})(6)=f^{-1}(f^{-1}(6))=f^{-1}(72)=600$ ✓

$\begin{cases} f^{-1}(6)=a \Rightarrow f(a)=6 \Rightarrow \frac{1}{8}a-3=6 \Rightarrow \frac{1}{8}a=9 \Rightarrow a=72 \Rightarrow f^{-1}(6)=72 \\ f^{-1}(72)=\alpha \Rightarrow f(\alpha)=72 \Rightarrow \frac{1}{8}\alpha-3=72 \Rightarrow \frac{1}{8}\alpha=75 \Rightarrow \alpha=600 \Rightarrow f^{-1}(72)=600 \end{cases}$

---

* مثال (کنکور ۱۴۰۱ - تجربی - داخل کشور) قرینه‌ی نمودار تابع $y=2+\sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y=x$ رسم کرده، و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می‌دهیم و آن را $y=g(x)$ می‌نامیم. $g(4)$ کدام است؟ ۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۲- ۴) ۴-

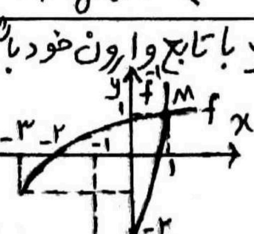
جواب: قرینه‌ی نمودار نسبت به $y=x$، یعنی وارون.

$y=2+\sqrt{x-1} \Rightarrow y-2=\sqrt{x-1} \Rightarrow (y-2)^2=x-1 \Rightarrow x=(y-2)^2+1 \Rightarrow f^{-1}(x)=(x-2)^2+1$ (گزینه‌ی سوم)

$\Rightarrow g(x)=(x-2-2)^2+1-3 \Rightarrow g(x)=(x-4)^2-2 \Rightarrow g(4)=0-2=-2$

---

* مثال (کنکور ۱۴۰۰ - تجربی - خارج کشور) - فرض کنید M نقطه‌ی تلاقی منحنی $y=\sqrt{x+3}-1$ با تابع وارون خود باشد. فاصله‌ی نقطه‌ی M از مبدأ مختصات کدام است؟ ۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۳ ۴) $2\sqrt{2}$



جواب: $f(x)=\sqrt{x+3}-1 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -3 & -2 & 1 \\ \hline f(x) & -1 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline f^{-1}(x) & -3 & -2 & 1 \end{array}$

تلاقی f و f^{-1}: $M(1,1) \Rightarrow OM=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ (گزینه‌ی دوم)