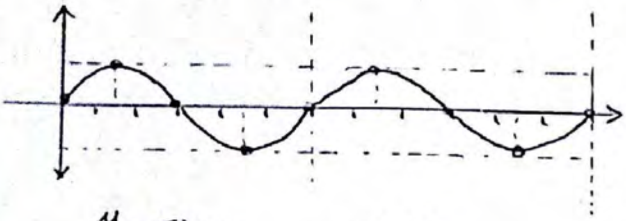
فصل ۲ (مثلثات)

توابع متناوب (تکراری):

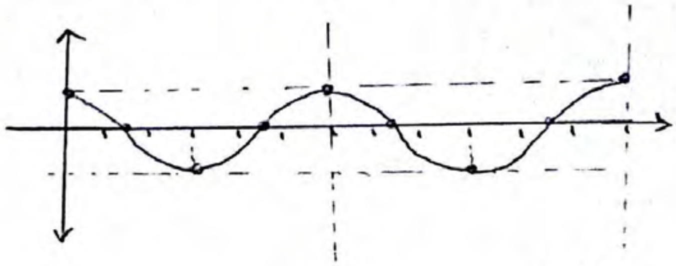
تابع f را متناوب می‌نامند هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد بطوریکه:

۱) برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $x+T \in D_f$ ۲) $f(x \pm T) = f(x)$

کوچکترین عدد T با خاصیت بالا را دوره تناوب تابع f می‌نامند



$y = \sin x \quad T = 2\pi$



$y = \cos x \quad T = 2\pi$

نکته ریاضی:

بطور کلی:

تابع	دوره تناوب
$y = \sin ax$	$T = \frac{2\pi}{\lvert a \rvert}$
$y = \cos ax$	$T = \frac{2\pi}{\lvert a \rvert}$
$y = tg\, ax$	$T = \frac{\pi}{\lvert a \rvert}$
$y = cotg\, ax$	$T = \frac{\pi}{\lvert a \rvert}$

مثال) دوره تناوب هرکدام از تابع‌های زیر را بیابید کنید:

۱) $f(x) = \sin(4x)$

$T = \frac{2\pi}{\lvert 4 \rvert} = \frac{\pi}{2}$

۲) $f(x) = \cos(\frac{x}{2})$

$T = \frac{2\pi}{\lvert \frac{1}{2} \rvert} = 4\pi$

۳) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{3}x)$

$T = \frac{2\pi}{\lvert \frac{\pi}{3} \rvert} = 6$

۴) $f(x) = \cos(\sqrt{2}\, x)$

$T = \frac{2\pi}{\lvert \sqrt{2} \rvert} = \sqrt{2}\pi$

۵) $f(x) = \cos(-\frac{3x}{2})$

$T = \frac{2\pi}{\lvert -\frac{3}{2} \rvert} = \frac{4}{3}\pi$

۶) $f(x) = \sin(4\pi x)$

$T = \frac{2\pi}{\lvert 4\pi \rvert} = \frac{1}{2}$

۷) $f(x) = tg\, 3x$

$T = \frac{\pi}{\lvert 3 \rvert} = \frac{\pi}{3}$

۸) $y = cotg(-\frac{\pi}{4}x)$

$T = \frac{\pi}{\lvert -\frac{\pi}{4} \rvert} = 4$

نکته ریاضی:

تبدیل هایی که باعث تغییر برد تابع یا انتقال می‌شوند روی دوره تناوب اثر ندارند در حالت کلی:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\sin(bx+c)+d \\ g(x)=a\cos(bx+c)+d \end{array}\right\} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|b|}$$

مثال) دوره تناوب تابع های زیر را بدست آورید.

الف) $f(x)=3\sin(2x-\frac{\pi}{3})+2$ $\quad T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

ب) $g(x)=-2\cos(\frac{\pi}{2}x)+4$ $\quad T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

نکته ریاضی:

اگر تابعی از مجموع چند تابع مثلثاتی تشکیل شده باشد دوره تناوب تابع برابر است با کوچکترین مضرب مشترک بین دوره تناوب ها

مثال ۱: دوره تناوب تابع $y=tg2x+\sin 3x+\sin 4x$ را بدست آورید:

$y_1=tg2x \Rightarrow T_1=\frac{\pi}{2}$ $\quad y_2=\sin 3x \Rightarrow T_2=\frac{2\pi}{3}$ $\quad y_3=\sin 4x \Rightarrow T_3=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

مخرج‌ها را مشترک می‌کنیم: $\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{6}$ $\quad \frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{6}$ $\quad \frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{6}$

کوچکترین مضرب مشترک بین ۳ و ۴ برابر ۱۲ می‌باشد پس: $T=\frac{12\pi}{6}=2\pi$

مثال ۲: دوره تناوب تابع $y=\sin\frac{2}{3}x+\cos\frac{3}{2}x$ را بیابید.

$y_1=\sin\frac{2}{3}x \Rightarrow T_1=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$ $\quad y_2=\cos\frac{3}{2}x \Rightarrow T_2=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$

$3\pi=\frac{9\pi}{3}$ $\quad \frac{4\pi}{3}$

ک م م ۴ و ۹ برابر ۳۶ می‌باشد

$$T=\frac{36\pi}{3}=12\pi$$

نکته ریاضی:

۱) دوره تناوب اصلی توابع $y=\sin^{2n-1}(ax+b)$ و $y=\cos^{2n-1}(ax+b)$ برابر $T=\frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد ($n\in N$ و $a\neq 0$) توان فرد

۲) دوره تناوب اصلی توابع $y=\sin^{2n}(ax+b)$ $y=\cos^{2n}(ax+b)$ برابر $T=\frac{\pi}{|a|}$ می‌باشد ($n\in N$ و $a\neq 0$) توان زوج

نکته ریاضی:

در توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ داریم:

$y_{min}=$ مقدار مینیمم تابع $=-|a|+c$

$y_{max}=$ مقدار ماکزیمم تابع $=|a|+c$

$$a=\frac{y_{max}-y_{min}}{2} \quad , \quad c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2} \quad \quad T=\frac{2\pi}{|b|}$$

(b را مثبت فرض می‌کنیم)

مثال ۱: ضابطه تابع به صورت $y=a\sin bx+c$ را بنویسید که دوره تناوب آن 4π، مقدار ماکزیمم آن ۱- و مقدار مینیمم آن (۷-) باشد.

$$T=\frac{2\pi}{|b|}\Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=4\pi \Rightarrow |b|=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\frac{1}{2} \qquad a=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}=\frac{-1-(-7)}{2}=3$$

$$c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=\frac{-1+(-7)}{2}=-4 \qquad y=3\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-4$$

مثال ۲: ضابطه تابعی به شکل $y=a\cos bx+c$ را بنویسید که دوره تناوب آن $T=\frac{3}{2}$، مقدار ماکزیمم آن (۲-) و مقدار مینیمم آن (۸-) باشد.

$$T=\frac{2\pi}{|b|}\Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=\frac{3}{2}\Rightarrow |b|=\frac{4\pi}{3}\Rightarrow b=\frac{4\pi}{3}$$

$$a=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}=\frac{(-2)-(-8)}{2}=3 \qquad c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=\frac{(-2)+(-8)}{2}=-5$$

$$y=3\cos\left(\frac{4\pi}{3}x\right)-5$$

(هماهنگ - خرداد ۹۸)

مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=1-2\sin(-\frac{\pi}{3}x)$ را بدست آورید:

$y=-2\sin(-\frac{\pi}{3}x)+1$

$max=|a|+c=|-2|+1=3$

$min=-|a|+c=-|-2|+1=-1$

(هماهنگ - دیماه ۹۷)

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=2-3\sin 4x$ را بدست آورید:

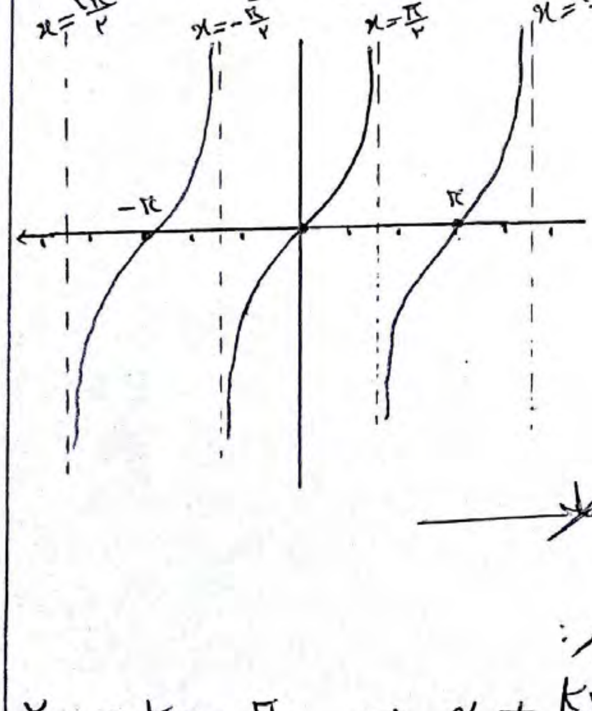
$y=-3\sin 4x+2$

$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$

$max=|a|+c=|-3|+2=5$ $\quad$ $min=-|a|+c=-|-3|+2=-1$

تابع تانژانت :

تابع $y=tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$ را تابع تانژانت می‌نامیم که دارای ویژگی های زیر است :



۱) در بازه $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ همواره صعودی اکید است.

۲) دوره تناوب آن برابر π است $(T=\pi)$

۳) $D_f=\mathbb{R}-\{x|\cos x=0\}=\mathbb{R}-\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{2}\}=\{x|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\}$

۴) $R_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

(هماهنگ دیماه ۹۷) :

دامنه تابع $f(x)=tg(2x)$ را بدست آورید:

$2x\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

نکته ریاضی:

دوره تناوب تابع $y=a\,tg(bx)+c$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ خواهد بود

نسبتهای مثلثاتی کمان 2α (دوبرابر کمان):

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

3) $tg\, 2\alpha = \dfrac{2\, tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

مثال ۱: اگر $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ و α زاویه‌ای در ربع سوم باشد مطلوبست محاسبه:

$$\sin 2\alpha = ? \quad , \quad tg\, 2\alpha = ?$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5} \xrightarrow[\text{سوم}]{\alpha\ \text{ربع}} \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$tg\, 2\alpha = \frac{2\, tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2\left(\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

مثال ۲: ثابت کنید:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\, tg\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$\text{سمت راست} = \frac{2\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}{1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha = \text{سمت چپ}$$

مثال ۳: اگر $\cos 2\alpha = 0{,}62$ و α زاویه‌ای در ربع دوم باشد مقدار $\cos\alpha$ را بدست آورید:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow 0{,}62 = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow 2\cos^2\alpha = 1{,}62$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = 0{,}81 \Rightarrow \cos\alpha = \pm 0{,}9 \xrightarrow[\text{دوم}]{\alpha\ \text{ربع}} \cos\alpha = -0{,}9$$

نسبتهای مثلثاتی نصف کمان:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos 2\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \xrightarrow[\text{نصف می‌کنیم}]{\text{کمان را}} \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

یادآوری:

نسبت \ زاویه	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$cotg\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال) مطلوبست محاسبه:

1) $\sin 15^\circ = ?$ 2) $\cos 15^\circ =$ 3) $\sin 75^\circ = ?$ 4) $\cos 75^\circ = ?$

5) $\sin 22{,}5^\circ = ?$ 6) $\cos 22{,}5^\circ = ?$

حل ۱: می‌دانیم 15° نصف 30° است.

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

حل ۲: می‌دانیم 15° نصف 30° است.

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{1+\cos 30^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

حل ۳: می‌دانیم $75^\circ = \frac{150^\circ}{2}$ و $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 75^\circ = \frac{1-\cos 150^\circ}{2} = \frac{1-(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

حل ۴:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos^2 75^\circ = \frac{1+\cos 150^\circ}{2} = \frac{1+(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

حل د: می‌دانیم 22.5° نصف 45° است.

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 22.5^\circ = \frac{1-\cos45^\circ}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt2}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt2}{4} \Rightarrow \sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$$

حل ی:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos2\alpha}{2} \Rightarrow \cos^2 22.5^\circ = \frac{1+\cos45^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt2}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt2}{4} \Rightarrow \cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$$

تذکر مهم:

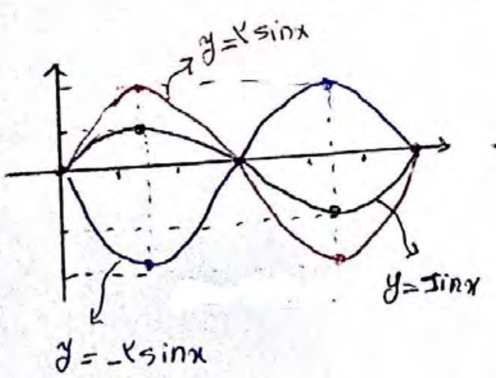
$$\sin 22.5^\circ = \cos 67.5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2} \qquad \sin 67.5^\circ = \cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$$

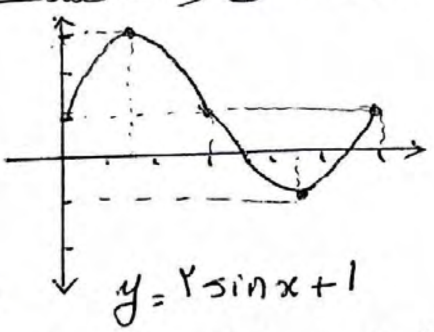
بررسی نمودار توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$:

در تابع $y=a\sin bx+c$ دو حالت داریم:

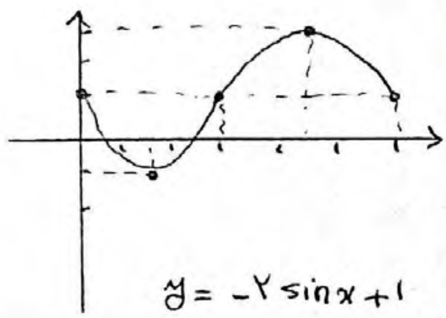
۱) اگر شروع تابع مثل تابع $y=\sin x$ باشد، $ab>0$ است یعنی یا a و b هردو مثبت و یا a و b هردو منفی هستند.

۲) اگر شروع تابع مثل قرینه تابع $y=\sin x$ باشد $ab<0$ است یعنی یا a مثبت و b منفی است یا a منفی و b مثبت است.





$y=2\sin x+1$
$y=-2\sin(-x)+1$



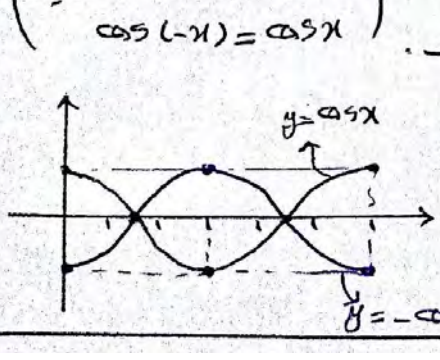
$y=-2\sin x+1$
$y=2\sin(-x)+1$

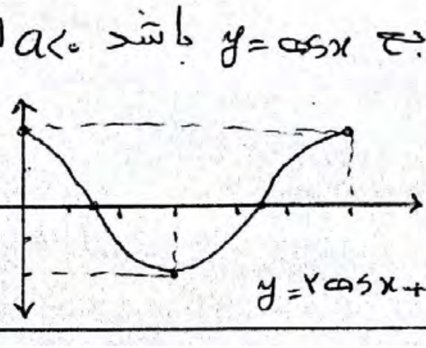
در تابع $y=a\cos bx+c$ دو حالت داریم:

۱) اگر شروع تابع مثل تابع $y=\cos x$ باشد $a>0$ است.

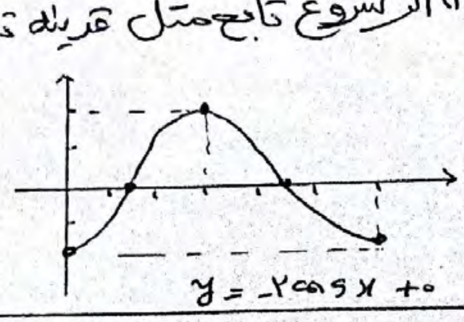
۲) اگر شروع تابع مثل قرینه تابع $y=\cos x$ باشد $a<0$ است.

(b می‌تواند هم مثبت و هم منفی باشد زیرا $\cos(-x)=\cos x$)



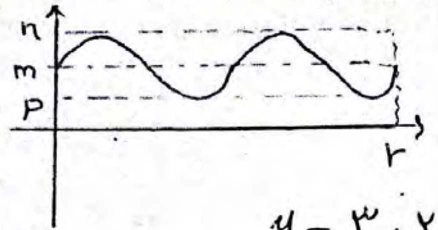


$y=2\cos x+0$



$y=-2\cos x+0$

تست: در شکل روبرو نمودار $y=3+2\sin\frac{x}{2}$ را می‌بینیم مقدار $mnpr$ کدام است؟



۱) 60π ۲) 40π ۳) 30π ۴) 120π

حل: گزینه (۴)

$$y=3+2\sin\frac{x}{2} \Rightarrow y=\underbrace{2}_{a}\sin(\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{b}x)+\underbrace{3}_{c}$$

$$y_{max}=n \Rightarrow |a|+c=n \Rightarrow |2|+3=n \Rightarrow \boxed{n=5}$$

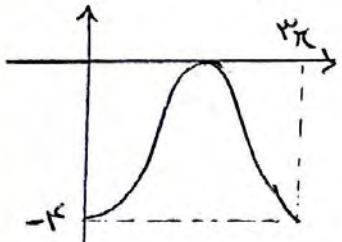
$$y_{min}=p \Rightarrow -|a|+c=p \Rightarrow -|2|+3=p \Rightarrow \boxed{p=1}$$

تابع سینوس به اندازه m واحد به سمت بالا انتقال یافته است: $\boxed{m=c=3}$

$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|}=4\pi \Rightarrow r=2T=2(4\pi)=8\pi$$

$$mnpr=3\times5\times1\times8\pi=120\pi$$

تست: در نمودار $y=a\cos bx+c$ به شکل روبرو $a-b+2c$ کدام است؟ $(b>0)$



۱) $-\frac{17}{3}$ ۲) -6 ۳) $-\frac{20}{3}$ ۴) $-\frac{22}{3}$

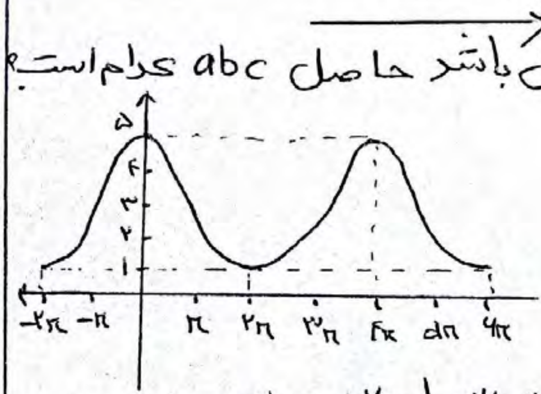
حل: گزینه (۳)

$$T=3\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=3\pi \Rightarrow |b|=\frac{2}{3} \Rightarrow b=\pm\frac{2}{3} \xRightarrow{b>0} \boxed{b=\frac{2}{3}}$$

$$\begin{array}{l} y_{max}=0 \Rightarrow |a|+c=0 \\ y_{min}=-4 \Rightarrow -|a|+c=-4 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} |a|+c=0 \\ -|a|+c=-4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{c=-2},\ |a|=2 \xRightarrow{a<0} \boxed{a=-2}$$

$$a-b+2c=-2-\frac{2}{3}+2(-2)=-\frac{20}{3}$$

تست: اگر نمودار تابع $y=a\cos(bx)+c$ بصورت مقابل باشد حاصل abc کدام است؟



۱) ±1 ۲) ±2 ۳) ±3 ۴) ±6

حل: گزینه ۳:

$$T=4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=4\pi \Rightarrow |b|=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{b=\pm\frac{1}{2}}$$

$$\begin{array}{l} y_{max}=5 \\ y_{min}=1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} |a|+c=5 \\ -|a|+c=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{c=3},\ |a|=2 \Rightarrow a=\pm2 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$abc=2\times\frac{1}{2}\times3=3 \qquad abc=2\times(-\frac{1}{2})\times3=-3$$

معادلات مثلثاتی :

معادلاتی که در آنها ، مجهول معادله ، کمان یک نسبت مثلثاتی باشد معادلات مثلثاتی نامیده می‌شوند که برای حل آنها حالتهای زیر را درنظر می‌گیریم :(مثال) $3\sin x - 3 = 0$

۱) حل معادلات شامل سینوس :

اگر پس از ساده کردن یک معادله مثلثاتی داشته باشیم $\sin x = a$ دراینصورت برای حل معادله وپیدا کردن x از فرمولهای زیر که به جوابهای کلی معادله معروفند استفاده می کنیم :

$$\sin x = a = \sin\theta \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ x = 2k\pi + \pi - \theta \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

مثال) مطلوبست حل معادلات مثلثاتی زیر :

1) $2\sin x - \sqrt{2} = 0$

$$2\sin x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2\sin x = \sqrt{2} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

2) $2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$

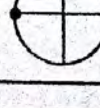
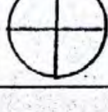
$$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 1 + 24 = 25$$

$$\sin x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{1 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{3}{2} \quad \text{غ ق ق} \\ \sin x = -1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}}$$

تذکر مهم :

اگر در حل معادلات مثلثاتی شامل سینوس به حالت $\sin x = 0$ یا $\sin x = \pm 1$ برسیم می‌توانیم جوابها رابصورت زیر بنویسیم :

 $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$  $\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$  $\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۳) $2\sin^2 x - \sin x = 0$

$$2\sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

---

۴) $\sin 3x + \sin\frac{3\pi}{5} = 0$

$$\sin 3x + \sin\frac{3\pi}{5} = 0 \Rightarrow \sin 3x = -\sin\frac{3\pi}{5} \Rightarrow \sin 3x = \sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - \frac{3\pi}{5} \\ 3x = 2k\pi + \pi + \frac{3\pi}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - \frac{3\pi}{5} \\ 3x = 2k\pi + \frac{8\pi}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{5} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{8\pi}{15} \end{cases}$$

---

۵) $\sin x - \cos 2x = 0$ (هماهنگ دی ماه ۹۷)

$$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \\ \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

---

۶) $\cos 2\alpha - \sin\alpha + 1 = 1$ (هماهنگ خرداد ۹۸)

$$1 - 2\sin^2\alpha - \sin\alpha + 1 = 1 \Rightarrow -2\sin^2\alpha - \sin\alpha + 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-2)(1) = 1 + 8 = 9$$

$$\sin\alpha = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2(-2)} = \frac{1 \pm 3}{-4} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin\alpha = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

$$7)\ \cos 2x + 4\sin^2 x = 2$$

$$1 - 2\sin^2 x + 4\sin^2 x = 2 \Rightarrow 2\sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

---

۲) حل معادلات شامل کسینوس:

اگر پس از ساده کردن یک معادله مثلثاتی داشته باشیم: $\cos x = a$

در اینصورت برای حل معادله و پیدا کردن x از فرمولهای زیر که به جوابهای کلی معادله معروفند استفاده می‌کنیم:

$$\cos x = a = \cos\theta \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ x = 2k\pi - \theta \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

مثال) مطلوبست حل معادلات مثلثاتی زیر:

$$1)\ 2\cos^2 x - 1 = 0$$

$$2\cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos\frac{\pi}{4} = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$2)\ \cos 2x + 3\cos x = 1$$

$$2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$$

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -2 \quad \text{غ ق ق} \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۳) $\cos 3x - 2\cos^2 x + 1 = 0$

$\cos 3x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos 3x = \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \end{cases}$

---

۴) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ (هماهنگ شهریور ۹۵)

$\Delta = 1^2 - 4(2)(-1) = 9$

$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 = \cos\pi \Rightarrow x = 2k\pi \pm \pi \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$

---

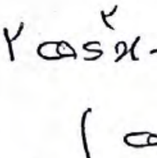
۵) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ (هماهنگ خرداد ۹۴)

$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$

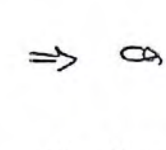
تذکر مهم:

اگر در حل معادلات مثلثاتی شامل کسینوس به حالت $\cos x = 0$ یا $\cos x = \pm 1$ رسیدیم می‌توانیم جوابها را بصورت زیر نیز بنویسیم:



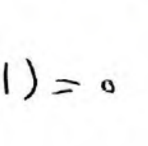
$\cos x = 0$

$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$



$\cos x = 1$

$\Rightarrow x = 2k\pi$



$\cos x = -1$

$\Rightarrow x = 2k\pi + \pi$

(هماهنگ شهریور ۹۳)

۶) $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$

جوابهای بین صفر و 2π را بدست آورید.

$2\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

★ تمرینات مهم فصل ۲ کتاب درسی (مثلثات) ★

۱) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

الف) $y = 1 + 2\sin 7x = 2\sin 7x + 1$

$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|7|} = \frac{2\pi}{7}$ $\qquad y_{max} = |a| + c = |2| + 1 = 3$ $\qquad y_{min} = -|a| + c = -|2| + 1 = -1$

ب) $y = \sqrt{3} - \cos\frac{\pi}{2}x = -\cos\frac{\pi}{2}x + \sqrt{3}$

$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{2}|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ $\qquad y_{max} = |a| + c = |-1| + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$

$y_{min} = -|a| + c = -|-1| + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3}$

پ) $y = -\pi\sin(\frac{x}{2}) - 2$

$y_{max} = |a| + c = |-\pi| - 2 = \pi - 2$

$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = 4\pi$ $\qquad y_{min} = -|a| + c = -|-\pi| - 2 = -\pi - 2$

ت) $y = -\frac{3}{4}\cos 3x$

$y_{max} = |a| + c = |-\frac{3}{4}| + 0 = \frac{3}{4}$

$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$ $\qquad y_{min} = -|a| + c = -|-\frac{3}{4}| + 0 = -\frac{3}{4}$

---

۲) در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده را بنویسید.

الف) $T = \pi$, $max = 3$, $min = -3$

$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = 2$ $\qquad a = \frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{3 - (-3)}{2} = 3$

$c = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} = \frac{3 + (-3)}{2} = 0$ $\qquad y = a\sin bx + c \Rightarrow y = 3\sin 2x + 0$

یا $y = a\cos bx + c \Rightarrow y = 3\cos 2x + 0$

ب) $T = 3$, $max = 9$, $min = 3$

$T = \frac{2\pi}{|b|} = 3 \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow b = \frac{2\pi}{3}$ $\qquad a = \frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{9 - 3}{2} = 3$

$$c=\frac{y_{max}+y_{min}}{۲}=\frac{۹+۳}{۲}=۶$$

$$y=a\sin bx+c \Rightarrow y=۳\sin(\frac{۲\pi}{۳}x)+۶$$

یا

$$y=a\cos bx+c \Rightarrow y=۳\cos(\frac{۲\pi}{۳}x)+۶$$

ب) $T=\frac{\pi}{۲}$, $max=۱$, $min=-۱$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow |b|=۴ \Rightarrow b=۴$$

$$a=\frac{y_{max}-y_{min}}{۲}=\frac{۱-(-۱)}{۲}=۱$$

$$c=\frac{y_{max}+y_{min}}{۲}=\frac{۱+(-۱)}{۲}=۰$$

$$y=a\sin bx+c \Rightarrow y=\sin ۴x$$

یا

$$y=a\cos bx+c \Rightarrow y=\cos ۴x$$

---

۳) کدام یک از جملات زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است، نادرست

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد نادرست.

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد نادرست

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد صعودی است درست

---

۴) فرض کنید $\cos\alpha=\frac{۵}{۱۳}$ و α زاویه‌ای حاده باشد حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\cos ۲\alpha=?$ ب) $\sin ۲\alpha=?$

$$\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha=۱-(\frac{۵}{۱۳})^۲=۱-\frac{۲۵}{۱۶۹}=\frac{۱۴۴}{۱۶۹}\Rightarrow \sin\alpha=\pm\frac{۱۲}{۱۳}\xrightarrow[\text{حاده}]{\alpha}\sin\alpha=\frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۲(\frac{۵}{۱۳})^۲-۱=\frac{۵۰}{۱۶۹}-۱=-\frac{۱۱۹}{۱۶۹}$$

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha.\cos\alpha=۲\times\frac{۱۲}{۱۳}\times\frac{۵}{۱۳}=\frac{۱۲۰}{۱۶۹}$$

---

۵) معادلات زیر را حل کنید

الف) $\sin\frac{\pi}{۲}=\sin ۳x$

$$\begin{cases} ۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶} \\ ۳x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}}$$

جواب نهایی

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پ) $\cos x = \cos 2x$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + 2x \Rightarrow -x = 2k\pi \Rightarrow x = -2k\pi \\ x = 2k\pi - 2x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

ت) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

$1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow -\sin^2 x - \sin x + \frac{3}{4} = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(-1)(\frac{3}{4}) = 1 + 3 = 4$

$$\sin x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{1 \pm 2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \\ \sin x = -\frac{3}{2} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

ث) $\sin x - \cos 2x = 0$

$$\sin x = \cos 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - 2x) \Rightarrow x = -2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ج) $\cos 3x + \cos x = 0$ (خارج از کتاب)

$\cos 3x = -\cos x \Rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi \\ 2x = 2k\pi - \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ج) $\cos 5x + \sin x = 0$ (خارج از کتاب)

$$\cos 5x = -\sin x \Rightarrow \cos 5x = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \\ 5x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 6x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

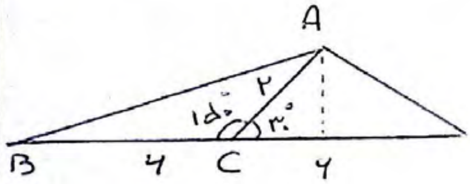
د) $\sin 5x + \sin x = 0$ (خارج از کتاب)

$$\sin 5x = -\sin x \Rightarrow \sin 5x = \sin(-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi + (-x) \\ 5x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 2k\pi \\ 4x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

---

۶) مثلثی با مساحت ۳ سانتیمتر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتیمتر باشند آنگاه چند مثلث با این خاصیت می‌توان ساخت؟



$$S = \frac{1}{2} ab \sin C \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin C$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} C = 30^\circ \\ C = 150^\circ \end{cases}$$

پس دو مثلث با ویژگی های بالا وجود دارد.

(هماهنگ - شهریور ۹۸)

معادله مثلثاتی مقابل را حل کنید $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\xrightarrow{\times 2} 2(\sin x \cdot \cos x) = 2(\frac{\sqrt{2}}{4}) \Rightarrow 2\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ 2x = 2k\pi + \underbrace{\pi - \frac{\pi}{4}}_{\frac{3\pi}{4}} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$