فصل ۶ (هندسه)

تفکر تجسمی:

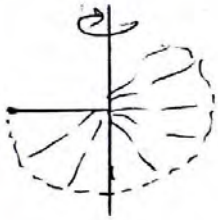
تصویری که از هر شکل یا جسم در جهت های مختلف در ذهن هر شخص نقش می بندد را یک تفکر تجسمی می گویند.

مثال) تصویر یک توپ فوتبال از بالا به شکل دایره است.

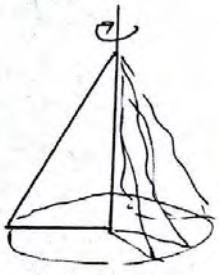
دوران حول محور:

خط ثابتی به نام محور دوران را در نظر می گیریم و شکل مشخصی را حول (اطراف) آن می چرخانیم، حجمی ایجاد می شود که به این حجم، دوران یافته شکل حول آن خط می گوئیم.

مثال ۱: شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن استوانه است.

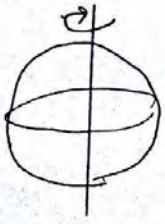


مثال ۲: شکل حاصل از دوران یک پاره خط حول پاره خط دیگری که بر آن عمود است یک دایره توپر است.



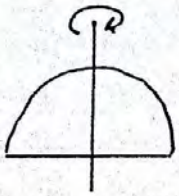
(هماهنگ خرداد ۹۸)

شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه آن بصورت محروط توخالی است (زیرا مثلث را رنگی نکرده است)



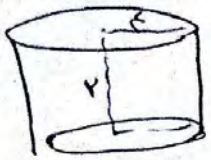
(هماهنگ دی ماه ۹۷)

شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن برابر یک کره توخالی است.



مثال ۳: شکل حاصل از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر آن یک نیمکره توخالی است.

مثال) اگر مستطیلی به طول ۴ و عرض ۲ را حول عرضش دوران دهیم، حجم جسم حاصل چقدر است؟

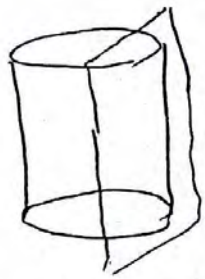


$r = 2 \qquad h = 4$

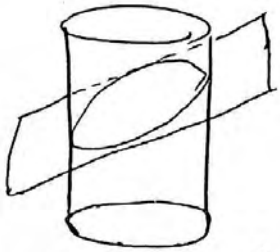
$V = \pi r^2 h = \pi (2)^2 (4) \Rightarrow V = 16\pi$

برش و سطح مقطع:

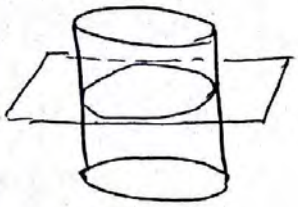
اگر صفحه ای یک جسم سه بعدی را قطع کند، شکلی ایجاد می‌شود که به آن سطح مقطع می گوئیم.



مستطیل = سطح مقطع

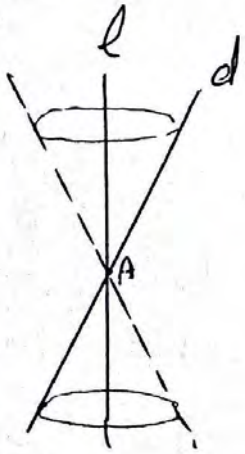


بیضی = سطح مقطع



دایره = سطح مقطع

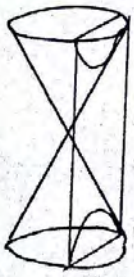
رویهٔ مخروطی:



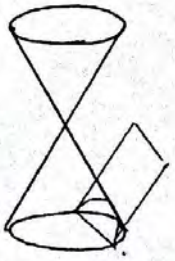
اگر دو خط d و l در نقطه A متقاطع باشند سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی) می گویند، نقطه A را رأس، خط l را محور و خط d را مولد سطح مخروطی می نامند.

مقاطع مخروطی:

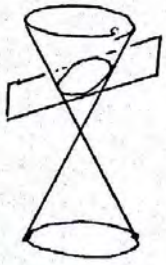
از برخورد یک صفحه با رویهٔ مخروطی، اشکالی بدست می آید که آنها را مقاطع مخروطی می نامند که عبارتند از:



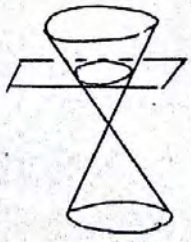
هذلولی



سهمی



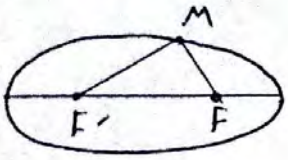
بیضی



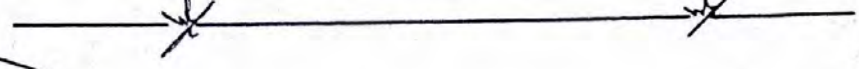
دایره

بیضی:

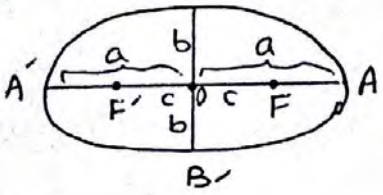
بیضی مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه ثابت، مقداری ثابت است. آن دو نقطه ثابت را کانونهای بیضی نامیده و با F و F' نشان می‌دهند و آن مقدار ثابت را قطر بزرگ بیضی نامیده و با $2a$ نشان می‌دهند.



طول قطر بزرگ $= 2a = MF + MF'$



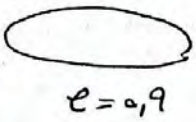
اجزاء بیضی:

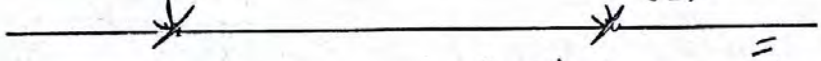


۱) دو نقطه F و F' داخل بیضی را کانونهای بیضی می‌نامند و فاصله آنها را فاصله کانونی نامیده و با $FF' = 2c$ نشان می‌دهیم.

۲) $AA' = 2a$ را قطر بزرگ بیضی و $BB' = 2b$ را قطر کوچک بیضی نامیده، که همان دو محور تقارن بیضی است و محل برخورد آنها یعنی O را مرکز بیضی می‌نامند که همان مرکز تقارن بیضی است.

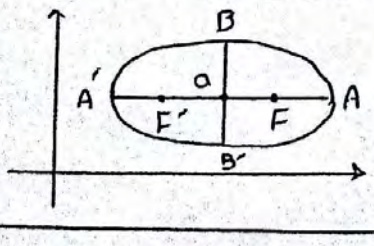
۳) به مقدار ثابت $e = \frac{c}{a}$ که $0 < e < 1$ است خروج از مرکز بیضی می‌گوییم که همواره مثبت است. اگر e به عدد ۱ نزدیک شود بیضی کشیده‌تر و هرقدر e به صفر نزدیکتر شود بیضی به دایره نزدیکتر می‌شود.





انواع بیضی و ویژگی هرکدام:

۱) بیضی افقی: اگر قطر بزرگ بیضی هم راستا با محور xها و قطر کوچک آن هم راستا با محور yها باشد بیضی را افقی می‌نامند که دارای ویژگی‌های زیر است:



قطر کوچک $= BB' = 2b$ قطر بزرگ $= AA' = 2a$

مرکز بیضی $= O = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ فاصله کانونی $= FF' = 2c$

$a > b > 0$
$a > c$

رابطه بین a و b و c : $c^2 = a^2 - b^2$ خروج از مرکز بیضی $e = \frac{c}{a}$

A و A' را رئوس کانونی (در امتداد کانونها) و B و B' را رئوس غیر کانونی (در امتداد کانونها نیستند) می نامند.

$A\left|\begin{matrix}\alpha+a\\ \beta\end{matrix}\right.$ $A'\left|\begin{matrix}\alpha-a\\ \beta\end{matrix}\right.$ ، $B\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+b\end{matrix}\right.$ $B'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-b\end{matrix}\right.$ $F\left|\begin{matrix}\alpha+c\\ \beta\end{matrix}\right.$ $F'\left|\begin{matrix}\alpha-c\\ \beta\end{matrix}\right.$

فاصله یک راس کانونی از یک راس غیر کانونی $= AB = \sqrt{a^2+b^2}$

در بیضی افقی A و A' و F و F' با O هم عرض و B و B' با O هم طول هستند.

مثال ۱: نقاط $F\left|\begin{matrix}-۸\\ ۴\end{matrix}\right.$ ، $F'\left|\begin{matrix}۲\\ ۴\end{matrix}\right.$ کانونهای یک بیضی اند. اگر بزرگترین قطر بیضی برابر ۲۶ باشد مختصات دو سر قطر بزرگ، دو سر قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

$F\left|\begin{matrix}-۸\\ ۴\end{matrix}\right.$ ، $F'\left|\begin{matrix}۲\\ ۴\end{matrix}\right.$ $\Rightarrow$ FF' وسط O $\Rightarrow O\left|\begin{matrix}\frac{-۸+۲}{۲} = -۳ = \alpha\\ \frac{۴+۴}{۲} = ۴ = \beta\end{matrix}\right.$ $\Rightarrow$ بیضی افقی $\Rightarrow$ F' و F و O هم عرض

$FF' = \sqrt{(-۸-۲)^2+(۴-۴)^2} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰ \Rightarrow FF' = ۲c = ۱۰ \Rightarrow \boxed{c = ۵}$

$c^2 = a^2 - b^2 = ۵^2 = ۱۳^2 - b^2 \Rightarrow \boxed{b = ۱۲}$ $\quad$ قطر بزرگ $= AA' = ۲a = ۲۶ \Rightarrow \boxed{a = ۱۳}$

دو سر قطر بزرگ: $A\left|\begin{matrix}\alpha+a = -۳+۱۳ = ۱۰\\ \beta = ۴\end{matrix}\right.$ $A'\left|\begin{matrix}\alpha-a = -۳-۱۳ = -۱۶\\ \beta = ۴\end{matrix}\right.$

دو سر قطر کوچک: $B\left|\begin{matrix}\alpha = -۳\\ \beta+b = ۴+۱۲ = ۱۶\end{matrix}\right.$ $B'\left|\begin{matrix}\alpha = -۳\\ \beta-b = ۴-۱۲ = -۸\end{matrix}\right.$

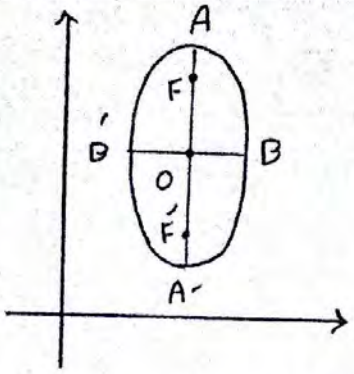
خروج از مرکز $= e = \frac{c}{a} = \frac{۵}{۱۳}$

مثال ۲: نقاط $B\left|\begin{matrix}۳\\ ۷\end{matrix}\right.$ و $B'\left|\begin{matrix}۳\\ -۱\end{matrix}\right.$ دو سر قطر کوچک یک بیضی اند اگر اندازه فاصله کانونی بیضی برابر ۶ باشد مختصات دو سر قطر بزرگ و مختصات کانونها و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید

$B\left|\begin{matrix}۳\\ ۷\end{matrix}\right.$ ، $B'\left|\begin{matrix}۳\\ -۱\end{matrix}\right.$ $\Rightarrow$ BB' وسط O $\Rightarrow O\left|\begin{matrix}\frac{۳+۳}{۲} = ۳\\ \frac{۷-۱}{۲} = ۳\end{matrix}\right.$ $\Rightarrow$ بیضی افقی $\Rightarrow$ O و B و B' هم طول

$BB' = \sqrt{(۳-۳)^2+(-۱-۷)^2} = \sqrt{۶۴} = ۸ \Rightarrow ۲b = ۸ \Rightarrow \boxed{b = ۴}$ $\quad FF' = ۶ \Rightarrow ۲c = ۶ \Rightarrow \boxed{c = ۳}$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow ۹ = a^2 - ۱۶ \Rightarrow a^2 = ۲۵ \Rightarrow \boxed{a = ۵}$ $\quad A\left|\begin{matrix}\alpha+a = ۸\\ \beta = ۳\end{matrix}\right.$ $A'\left|\begin{matrix}\alpha-a = -۲\\ \beta = ۳\end{matrix}\right.$ $F\left|\begin{matrix}\alpha+c = ۶\\ \beta = ۳\end{matrix}\right.$ $F'\left|\begin{matrix}\alpha-c = ۰\\ \beta = ۳\end{matrix}\right.$ $e = \frac{c}{a} = \frac{۳}{۵}$



۲) بیضی قائم:
اگر قطر بزرگ بیضی هم راستا با محور yها و قطر کوچک آن هم راستا با محور xها باشد بیضی را قائم می نامند که دارای ویژگی های زیر است:

قطر کوچک $= BB' = 2b$ قطر بزرگ $= AA' = 2a$

$a > b > 0$
$a > c$

مرکز بیضی $= O \left|\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}\right.$ خاصله کانونی $= FF' = 2c$

رابطه بین a و b و c : $c^2 = a^2 - b^2$

خروج از مرکز بیضی $= e = \frac{c}{a}$ $\quad 0 < e < 1$

A و A' را رئوس کانونی (در امتداد کانونها هستند) و B و B' را رئوس غیر کانونی (در امتداد کانونها نیستند) می نامند.

$A \left|\begin{matrix}\alpha \\ \beta + a\end{matrix}\right.$ $A' \left|\begin{matrix}\alpha \\ \beta - a\end{matrix}\right.$ $B \left|\begin{matrix}\alpha + b \\ \beta\end{matrix}\right.$ $B' \left|\begin{matrix}\alpha - b \\ \beta\end{matrix}\right.$ $F \left|\begin{matrix}\alpha \\ \beta + c\end{matrix}\right.$ $F' \left|\begin{matrix}\alpha \\ \beta - c\end{matrix}\right.$

فاصله یک راس کانونی از یک راس غیر کانونی $= AB = \sqrt{a^2 + b^2}$

در بیضی قائم A و A' و O و F و F' هم طول و B و B' و O هم عرض هستند

مثال) نقاط $A(-3, 4)$ و $A'(-3, -4)$ دو سر قطر بزرگ یک بیضی اند. اگر اندازه کوچکترین قطر برابر 6 باشد مختصات دو سر قطر کوچک، کانونها و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

بیضی قائم $\Rightarrow A, A'$ و O هم طول هستند $\Rightarrow O \left|\begin{matrix}\frac{-3-3}{2} = -3 = \alpha \\ \frac{4-4}{2} = -1 = \beta\end{matrix}\right.$ $\Leftarrow$ O وسط AA'

$AA' = 2a \Rightarrow \sqrt{(-3-(-3))^2 + (-4-4)^2} = 2a \Rightarrow 10 = 2a \Rightarrow \boxed{a = 5}$

$2b = 6 \Rightarrow \boxed{b = 3}$ $\quad c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow \boxed{c = 4}$

$B \left|\begin{matrix}\alpha + b = -3 + 3 = 0 \\ \beta = -1\end{matrix}\right.$ $B' \left|\begin{matrix}\alpha - b = -3 - 3 = -6 \\ \beta = -1\end{matrix}\right.$ $F \left|\begin{matrix}\alpha = -3 \\ \beta + c = -1 + 4 = 3\end{matrix}\right.$ $F' \left|\begin{matrix}\alpha = -3 \\ \beta - c = -1 - 4 = -5\end{matrix}\right.$

خروج از مرکز $= e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

(هماهنگ دی‌ماه ۹۷)
در یک بیضی قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟ (۱ نمره)

$2a=8 \Rightarrow \boxed{a=4}$ $\quad 2b=6 \Rightarrow \boxed{b=3}$

$c^2=a^2-b^2=4^2-3^2=7 \Rightarrow \boxed{c=\sqrt{7}}$ $\quad e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

(هماهنگ خرداد ۹۸)
در یک بیضی اختلاف طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است فاصله‌ی کانونی بیضی را بدست آورید (۱ نمره)

$2a=8 \Rightarrow \boxed{a=4}$ $\quad 2b=6 \Rightarrow \boxed{b=3}$

$c^2=a^2-b^2=4^2-3^2=7 \Rightarrow \boxed{c=\sqrt{7}}$ $\quad FF'=2c=2\sqrt{7}$

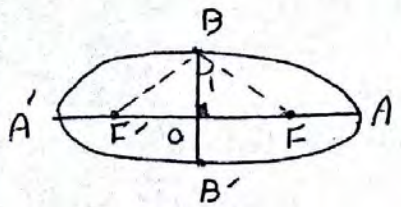
(هماهنگ خرداد ۹۸)
هر چه خروج از مرکز بیضی ..... (کوچکتر - بزرگتر) شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد

جواب: کوچکتر

(هماهنگ شهریور ۹۸)
اگر در یک بیضی داشته باشیم: $a=5$ و $b=3$ در اینصورت اندازه فاصله کانونی این بیضی را محاسبه کنید (۰/۷۵ نمره)

$c^2=a^2-b^2=5^2-3^2=16 \Rightarrow \boxed{c=4}$ $\quad FF'=2c=2(4)=8$

تمرین: اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟

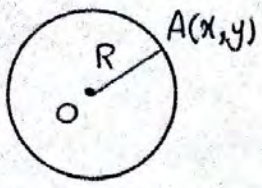


$2a=2(2b) \Rightarrow a=2b$

$c^2=a^2-b^2=4b^2-b^2=3b^2 \Rightarrow c=\sqrt{3}b$

$\tan\hat{B}_1=\frac{OF}{OB}=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}b}{b}=\sqrt{3} \Rightarrow \hat{B}_1=60^\circ \Rightarrow F\hat{B}F'=2\times 60^\circ=120^\circ$

دایره :



C(O,R)

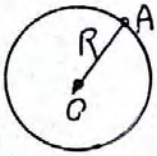
دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت به نام مرکز به فاصله ثابت هستند که این فاصله ثابت را شعاع دایره می نامند.

معادله استاندارد (کلاسیک) دایره :

معادله دایره‌ای که مرکزش نقطه $O\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ و شعاعش برابر R باشد از فرمول زیر بدست می آید :

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2}$$

اثبات:



$O\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ $\quad A\left|\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right.$

$$OA=R \Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=R \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

یادآوری :

۱) شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

۲) فاصله نقطه $A\left|\begin{matrix}x_0\\ y_0\end{matrix}\right.$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با: $d=OH=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مثال ۱: معادله دایره ای را بنویسید که مرکزش نقطه $O\left|\begin{matrix}-2\\ 3\end{matrix}\right.$ و شعاع آن برابر ۲ باشد.

$O\left|\begin{matrix}-2\sim\alpha\\ 3\sim\beta\end{matrix}\right.$ $\quad R=2$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$
$$\Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=4$$

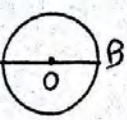
مثال ۲ : معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطه $O\left|\begin{matrix}1\\ 2\end{matrix}\right.$ بوده و از نقطه $A(3,-1)$ بگذرد.

$$R=OA=\sqrt{(1-3)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=13$$

مثال ۳: معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A\left|\begin{matrix}1\\ -1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}3\\ 3\end{matrix}\right.$ دو سر قطری از دایره باشند.

O وسط $AB \Rightarrow O\left|\begin{matrix}\frac{1+3}{2}=2\\ \frac{-1+3}{2}=1\end{matrix}\right.$

$$R=OA=\sqrt{(2-1)^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{5}$$
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=5$$



مثال ۴: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطه $O\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$ بوده و بر خط به معادله $-3x+4y=4$ مماس باشد.

حل: می دانیم فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر شعاع دایره است.

$$R=OH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-3(1)+4(-2)-4|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3$$

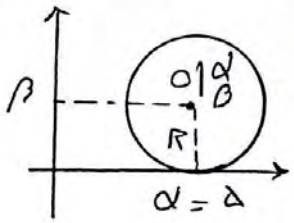
خط مماس: $-3x+4y-4=0$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=9$$

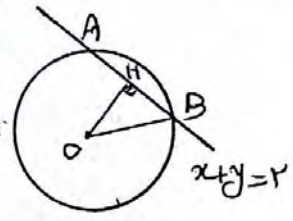
مثال ۵: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن روی خط $x=y+2$ بوده و در نقطه‌ای به طول ۵ بر محور طولها مماس باشد.

$O\left|\begin{matrix}\alpha=5\\\beta=R\end{matrix}\right.$ $\quad O\in x=y+2 \Rightarrow 5=R+2 \Rightarrow \boxed{R=3}$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-5)^2+(y-3)^2=9$$



مثال ۶: معادله دایره‌ای را بنویسید که $O\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.



حل: می دانیم عمودی که از مرکز دایره بر وتر آن رسم می شود آن وتر را نصف می کند.

$$AB=2\sqrt{2} \Rightarrow BH=\sqrt{2}$$

$$OH=\frac{|0+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad OB^2=OH^2+BH^2 \Rightarrow R^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2=\frac{9}{2}$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-0)^2+(y-1)^2=\frac{9}{2}$$

معادله گسترده دایره:

اگر معادله استاندارد دایره را باز کنیم معادله گسترده دایره بصورت زیر خواهد بود.

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

که در آن:

$$\text{مختصات مرکز}=O\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}\\-\frac{b}{2}\end{matrix}\right. \quad , \quad \text{شعاع}=R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$$

مثال مرکز و شعاع دایره به معادله $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ را بدست آورید.

$a=-4$, $b=-4$, $c=7$

$O\left|\begin{array}{l} -\frac{a}{2}=-\frac{-4}{2}=2 \\ -\frac{b}{2}=-\frac{-4}{2}=2 \end{array}\right.$

$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-4)^2-4(7)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$

(شبیه دیماه ۹۷)

مثال ۲: گستره دایره‌ای به شکل $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ است. مختصات مرکز این دایره و شعاع آن را پیدا کنید و معادله دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

$a=-2$, $b=-6$, $c=6$

$O\left|\begin{array}{l} -\frac{a}{2}=-\frac{-2}{2}=1 \\ -\frac{b}{2}=-\frac{-6}{2}=3 \end{array}\right.$

$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-6)^2-4(6)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{16}=\frac{1}{2}\times 4=2$

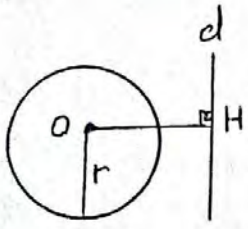
$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=4$

تذکر مهم:

شرط اینکه معادله $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله یک دایره باشد آن است که: $a^2+b^2-4c>0$ (داخل رادیکال مثبت باشد) و برعکس

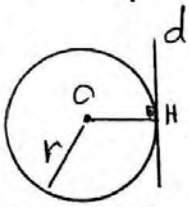
اوضاع نسبی خط و دایره:

یک خط و یک دایره نسبت به هم سه حالت دارند:



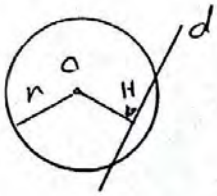
خط دایره را قطع نکند

$OH>r$



خط بر دایره مماس است

$OH=r$



خط با دایره متقاطع است

$OH<r$

برای بررسی وضعیت یک خط و یک دایره کافی است فاصله مرکز دایره از خط را تعیین و با شعاع دایره مقایسه کنیم:

(هماهنگ شهریور ۹۸)

مثال ۱: وضعیت خط $x+y=3$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x-3=0$ مشخص کنید.

$O\left|\begin{array}{l} -\frac{a}{2}=1 \\ -\frac{b}{2}=0 \end{array}\right.$

$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+0^2-4(-3)}=\frac{1}{2}\times 4=2$

$OH=d=\frac{|1+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$OH<r \Rightarrow$ خط با دایره متقاطع است.

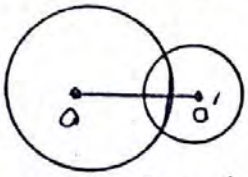
مثال ۲: وضعیت خط $2x-y=4$ را نسبت به دایره $x^2+y^2+4x+4y+12=0$ مشخص کنید.

$O\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}=-2\\ -\frac{b}{2}=-2\end{matrix}\right.$ $\quad r=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+4^2-4(12)}=\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$

$OH=d=\frac{|2(-2)-(-2)-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$ $\quad OH>r \Rightarrow$ خط دایره را قطع نمی‌کند

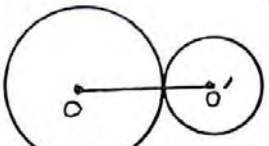
اوضاع نسبی دو دایره:

دو دایره نسبت به هم ۴ حالت دارند: فاصله مراکز دو دایره را خط المرکزین دو دایره نامیده و با $d=OO'$ نشان می‌دهند.



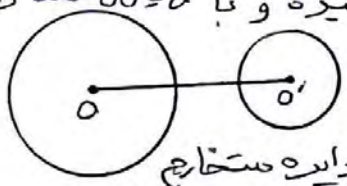
دو دایره متقاطع

$|r-r'|<d<r+r'$



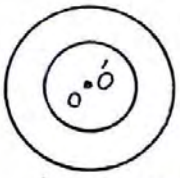
دو دایره مماس بیرون

$d=r+r'$



دو دایره متخارج

$d>r+r'$



دو دایره هم مرکز

$d=0$

دو دایره متداخل

$d<|r-r'|$

دو دایره مماس داخل

$d=|r-r'|$

(همانند خرداد ۹۸) وضعیت دو دایره به معادلات $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ و $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ را نسبت به هم مشخص کنید (۲ نمره)

$O\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}=1\\ -\frac{b}{2}=-2\end{matrix}\right.$, $r=1$, $O'\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}=-1\\ -\frac{b}{2}=2\end{matrix}\right.$, $r'=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+4^2-4(1)}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2$

$d=OO'=\sqrt{(-1-1)^2+(2-(-2))^2}=\sqrt{20}$ $\quad \sqrt{20}>1+2 \Rightarrow d>r+r'$ دو دایره متخارج

مثال) وضعیت دو دایره $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ و $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

$x^2+y^2-2x-2y-2=0 \Rightarrow O\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}=1\\ -\frac{b}{2}=1\end{matrix}\right.$, $r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-2)^2-4(-2)}=2$

$x^2+y^2-2x-8y+13=0 \Rightarrow O'\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}=1\\ -\frac{b}{2}=4\end{matrix}\right.$, $r'=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-8)^2-4(13)}=2$

$d=OO'=\sqrt{(1-1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{9}=3$

$|2-2|<3<2+2 \Rightarrow |r-r'|<d<r+r'$ $\Rightarrow$ دو دایره متقاطع‌اند.

ریاضی ۳ - دوازدهم تجربی

تمرینات مهم فصل ۲ (هندسه)

۱) در موارد زیر وضعیت خط و دایره را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) دایره $x^2+y^2+2x+2y-1=0$ ، خط $x+y=1$

$O\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}=-\frac{2}{2}=-1\\ -\frac{b}{2}=-\frac{2}{2}=-1\end{matrix}\right.$ $\quad r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2-4(-1)}=\frac{1}{2}\sqrt{12}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

$x+y-1=0$ ، $OH=d=\frac{|-1-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\quad d>r \Rightarrow$ خط و دایره نقطه مشترک ندارند

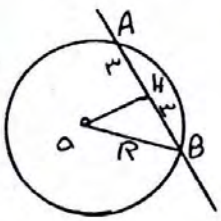
ب) دایره $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ ، خط $y=-1$

$O\left|\begin{matrix}2\\ -3\end{matrix}\right.$ ، $r=2$ $\quad$ خط: $0x+1y+1=0$ $\quad d=\frac{|-3+1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=2$

خط بر دایره مماس است $\Rightarrow d=r$

---

۲) مرکز دایره‌ای نقطه $O(-3,2)$ است. این دایره روی خط $3x-4y+2=0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله این دایره را بنویسید.



$O\left|\begin{matrix}2\sim\alpha\\ -3\sim\beta\end{matrix}\right.$ $\quad OH=\frac{|3(2)-4(-3)+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4$

$\overset{\triangle}{OBH}: R^2=OH^2+BH^2=4^2+3^2=25 \Rightarrow \boxed{R=5}$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=25$

---

۳) در موارد زیر وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $\underbrace{x^2+y^2+2x-4y=0}$ ، $\underbrace{x^2+y^2-2x+4y=0}$

$O\left|\begin{matrix}1\\ 2\end{matrix}\right.$ $\quad R=\frac{1}{2}\sqrt{4+16}=\sqrt{5}$ $\qquad O'\left|\begin{matrix}-1\\ 2\end{matrix}\right.$ $\quad R'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16}=\sqrt{5}$

$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(2-2)^2}=2\sqrt{5}$ $\quad \Rightarrow OO'=R+R' \Rightarrow$ دو دایره مماس خارجند

ب) $\underbrace{x^2+y^2-2x+4y+1=0}$ و $\underbrace{(x+1)^2+(y-2)^2=1}$

$O\left|\begin{matrix}1\\ -2\end{matrix}\right.$ $\quad R=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-4}=2$ $\qquad O'\left|\begin{matrix}-1\\ 2\end{matrix}\right.$ $\quad R'=1$

$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5}$ $\quad \Rightarrow OO'>R+R' \Rightarrow$ دو دایره متخارجند

۴) در حالتهای زیر معادله دایره را بنویسید:

الف) دایره‌ای که از مبدا مختصات بگذرد و مرکز آن $C(2,-1)$ باشد.

$R = OC = \sqrt{(2-0)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{5}$ $\quad (x-2)^2+(y+1)^2 = 5$

ب) دایره‌ای که مرکز آن $(2,3)$ و نقطه $(-3,-9)$ نقطه روی آن باشد

$R = OA = \sqrt{(2+3)^2+(3+9)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$(x-2)^2+(y-3)^2 = 169$

پ) دایره‌ای که نقاط $(3,0)$ و $(-1,-4)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشد

$O \left| \begin{matrix} \frac{0-4}{2} = -2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{matrix} \right.$ $\quad 2R = \sqrt{(-4-0)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$

$(x+2)^2+(y-1)^2 = 8$

---

۵) وضعیت نقاط $(0,1)$ و $(-1,0)$ و $(-2,-1)$ و $(0,0)$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ مشخص کنید.

$(1,0) \rightarrow 1^2+0^2-2(1)+4(0)+1 = 0$ روی دایره

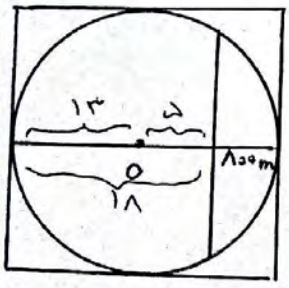
$(0,-1) \rightarrow 0^2+(-1)^2-2(0)+4(-1)+1 = -2 < 0$ داخل دایره

$(-1,-2) \rightarrow (-1)^2+(-2)^2-2(-1)+4(-2)+1 = 0$ روی دایره

$(0,0) \rightarrow (0)^2+(0)^2-2(0)+4(0)+1 = 1 > 0$ خارج دایره

---

۶) شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایره‌ای شکل به شعاع ۱۳۰۰ متر دو مسیر پیاده روی مطابق شکل بسازد. اگر مختصات مرکز دایره $(13,13)$ و هر واحد برابر ۱۰۰ متر باشد:



الف) معادله دایره چیست؟

$1300 \div 100 = 13 = R$

$(x-13)^2+(y-13)^2 = 169$

ب) دو مسیر در چه نقطه‌ای با یکدیگر متقاطع‌اند؟

$x=18 \Rightarrow (18-13)^2+(y-13)^2 = 169 \Rightarrow (y-13)^2 = 144 \Rightarrow \begin{cases} y-13=12 \Rightarrow y=25 \Rightarrow A(18,25) \\ y-13=-12 \Rightarrow y=1 \Rightarrow B(18,1) \end{cases}$

۷) معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2+y^2+2x+2y-1=0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آنرا پیدا کنید و معادله آنرا به شکل استاندارد بنویسید.

$O\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}=-1\\ -\frac{b}{2}=-1\end{matrix}\right.$ $\quad R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4+4+36}=\frac{1}{2}\sqrt{40}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}=\sqrt{10}$

$$(x+1)^2+(y+1)^2=10$$

---

۸) وضع خطهای زیر را نسبت به دایره مشخص کنید

الف) $4x+4y=0$ و $x^2+y^2-4x-4y+7=0$

$O\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}=2\\ -\frac{b}{2}=2\end{matrix}\right.$ $\quad R=\frac{1}{2}\sqrt{16+16-28}=1$ $\quad d=\frac{|4(2)+4(2)|}{\sqrt{4^2+4^2}}=\frac{16}{\sqrt{32}}$

$d>R \Rightarrow$ خط و دایره نقطه مشترک ندارند

ب) $y=-x-2$ و $x^2+y^2=2$

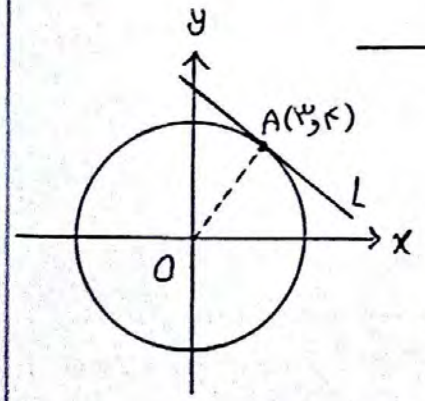
$O\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}=0\\ -\frac{b}{2}=0\end{matrix}\right.$ $\quad R=\sqrt{2}$ $\quad d=\frac{|0+0+2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$x-y+2=0$

خط بر دایره مماس است $\Rightarrow d=R=\sqrt{2}$

---

۹) اگر بدانیم خط L در نقطه $(3,4)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس باشد معادله خط مماس چیست؟



$m_{OA}=\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3} \Rightarrow OA\perp L \Rightarrow m_L=-\frac{3}{4}$

$m_L=-\frac{3}{4}$ $\quad A\left|\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right.$ $\quad y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$

$$\Rightarrow 3x+4y-25=0$$

۱۰) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه (۰,۳) و بر خط $3x-4y=3$ مماس باشد.

$O\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right.$ خط مماس: $3x-4y-3=0$

$(x-0)^2+(y-3)^2=4^2$

$OH=R=\frac{|3(0)-4(3)-3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{15}{5}=3$

$\Rightarrow x^2+(y-3)^2=9$

---

۱۱) مشخص کنید در حالتهای زیر دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف) $x^2+y^2+2x-4y=9$ ، $x^2+y^2-2x+4y=4$

$O'\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}=-1\\-\frac{b}{2}=2\end{matrix}\right.$ $R'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+36}=\sqrt{14}$

$O\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}=1\\-\frac{b}{2}=-2\end{matrix}\right.$ $R=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+4}=3$

$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5}$ $\quad |R-R'|<OO'<R+R' \Rightarrow$ متقاطع‌اند

ب) $x^2+(y-5)^2=5$ ، $(x-2)^2+(y+3)^2=7$

$O'\left|\begin{matrix}0\\5\end{matrix}\right.$ $R'=\sqrt{5}$ $\quad O\left|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right.$ ، $R=\sqrt{7}$

$OO'=\sqrt{(2-0)^2+(-3-5)^2}=2\sqrt{17}$ $\quad OO'>R+R' \Rightarrow$ دو دایره متخارج‌اند

---

۱۲) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1,-1)$ و با دایره $x^2+y^2-4x-4y=3$ مماس درون باشد.

$x^2+y^2-4x-4y-3=0$ $\quad O\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}=2\\-\frac{b}{2}=2\end{matrix}\right.$ $\quad R=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-4)^2-4(-3)}=4$

$O'\left|\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right.$ $\quad d=OO'=\sqrt{(-1-2)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

شرط مماس درون: $d=|R-R'| \Rightarrow 5=|4-R'| \Rightarrow \begin{cases}4-R'=5 \Rightarrow R'=-1 & \text{غ ق ق}\\ 4-R'=-5 \Rightarrow R'=9 & \text{ق ق}\end{cases}$

$O'\left|\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right.$ $R'=9$ $\Rightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=81$