

ریاضی الفبا زندگیگر است.

ریاضی و آمار ۲

پایه دوازدهم انسانی

فصل ۲: الگوهای خطی (مدل سازی و دنباله - دنباله حسابی)

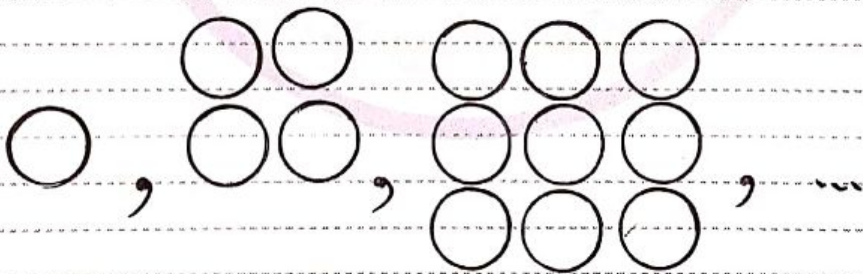
۱۶ // **مدل سازی و دنباله**

- مدل، نمونه و الگوی آ که به تبیین واقعیت‌های دنیا کمک می‌کنند.
 هدف اصلی هر مدل ریاضی ترجمهٔ رخدادها و دنیا واقعی به صورت یک مسأله ریاضی و یا ترجمهٔ آن به زبان ریاضی است.
 - مدل سازی یعنی بیان مسأله به زبان ریاضی.

- برای مدل سازی برض از پدیده‌هایی که از توابع با دامنه اعداد طبیعی می‌گرفتند در واقع توابعی که پاسخ آن‌ها بسط به بررسی مسأله در گام اول، دوم و ... و n ام دارد، دامنه آن‌ها زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌باشند.

- از جمله مدل سازی‌ها هم می‌توان به یک تابع با دامنه اعداد طبیعی مثال زد، الگوها و یا حتی جمله n ام در آن‌ها هم باشد.

▲ تعداد دایره‌های شکل n ام در الگوی زیر را بیابید.



← با توجه به الگو داده شده، داریم:

شماره شکل	(۱)	(۲)	(۳)	...	(n)
تعداد دایره‌ها	۱	۴	۹	...	?
	↓	↓	↓		
	$(1)^2$	$(2)^2$	$(3)^2$		

$$\Rightarrow \text{تعداد دایره‌های شکل } n \text{ام} = n^2$$

- آرائی از اعداد که در آن تعدادی عدد حقیقی به دنبال هم قرار دارند را دنباله‌ای از اعداد حقیقی می‌نامیم.

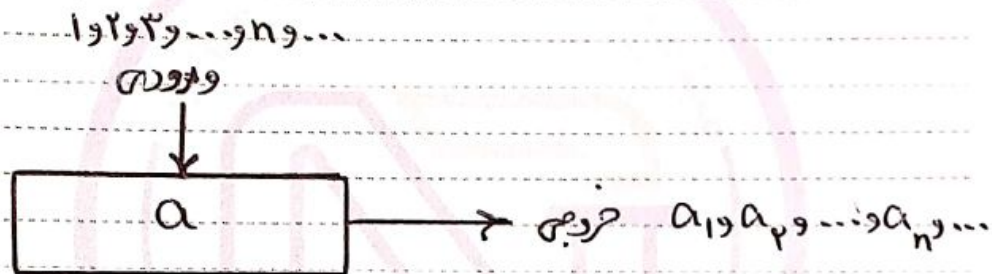
- اگر a تابعی از مجموعه اعداد طبیعی به مجموعه اعداد حقیقی باشد

آنگاه اعضای برد این تابع را می‌توان به صورت دنباله‌ای از اعداد نوشته

به طوری که جمله اول آن را a_1 ، جمله دوم را a_2 ، ... و

به همین ترتیب جمله n ام را با a_n در نظر می‌گیریم.

جمله n ام را جمله عمومی دنباله یا ضابطه دنباله می‌نامیم.



▲ چهار جمله اول دنباله $a_n = n^2 + 1$ را بنویسید.

$$a_1 = (1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_2 = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$a_3 = (3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$a_4 = (4)^2 + 1 = 16 + 1 = 17$$

$$\Rightarrow \dots و ۱۷ و ۱۰ و ۵ و ۲$$

▲ ضابطه دنباله‌ای بصورت $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ می‌باشد. جمله n ام را

شصتی کنید

$$a_1 = \frac{(-1)^1}{1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$a_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

▲ اگر $a_n = (-2)^n$ و $b_n = \frac{n+1}{n}$ و $c_n = \frac{(-1)^n}{2}$ باشد

حاصل $a_3 - b_1 + c_5$ را بدست آورید.

$$a_n = (-2)^n \xrightarrow{n=3} a_3 = (-2)^3 = -8$$

$$b_n = \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n=1} b_1 = \frac{1+1}{1} = 2 \Rightarrow$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2} \xrightarrow{n=5} c_5 = \frac{(-1)^5}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 - b_1 + c_5 = -8 - 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -10 - \frac{1}{2} = -\frac{21}{2}$$

— رابطه ای که ارتباط جملات یک دنباله را با اندک تغییر نشان می دهد
رابطه بازگشتی نام دارد.

معمولاً برای بدست آوردن رابطه بازگشتی به یک یا دو جمله از دنباله
نیاز داریم.

در واقع رابطه بازگشتی یک انشور ارتباطی است جمله n ام و جملات
قبلی دنباله آن.

▲ رابطه بازگشتی را برابر دنباله های زیر بنویسید.

$$(1) \dots, 1, 3, 8, 5, 3, 2, 1, 0, 1$$

← می دانیم که هر عدد جدید حاصل جمع دو عدد قبلی است بنابراین

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \text{و} \quad a_2 = 1 \quad \text{و} \quad a_1 = 1$$

و یا بصورت: $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
 (۲) 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ...

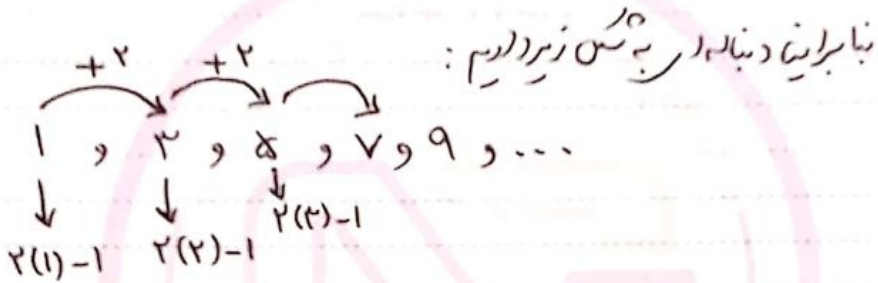
$$a_2 = a_1 \times \frac{1}{2} , a_3 = a_2 \times \frac{1}{2} , \dots , a_{n+1} = a_n \times \frac{1}{2}$$

هر چه جدید از ضرب $\frac{1}{2}$ متبقی در $\frac{1}{2}$ به دست آمده است. $a_1 = 1$

▲ برای هر یک از رابطه‌های بازگشتی زیر، یک ضابطه تابع بنویسید.

(۱) $a_1 = 1$ و $a_n = a_{n-1} + 2$

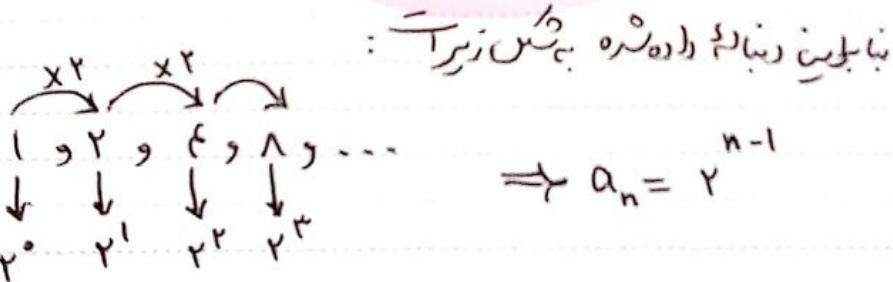
$a_1 = 1$, $a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$, $a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$, ...



$$\Rightarrow a_n = 2n - 1$$

(۲) $a_1 = 1$ و $a_n = 2a_{n-1}$

$a_1 = 1$ و $a_2 = 2a_1 = 2(1) = 2$ و $a_3 = 2a_2 = 2(2) = 4$, ...



$$\Rightarrow a_n = 2^{n-1}$$

▲ برای هر یک از دنباله‌های زیر ضابطه دنباله و فرمول بازگشتی بنویسید.

(۱) 1 و 3 و 5 و 7 و 9 و ...

← همانطور که می‌بینید هر جمله (عبارت جمله اول) با حاصل جمع جمله‌های قبلی

به علاوه عدد ۲ برابر است پس رابطه بازگشتی این دنباله بصورت

زیرا:

$$a_n = a_{n-1} + 2 \quad a_1 = 1$$

این دنباله، دنباله اعداد فرد است که ضابطه آن برابر است با:

$$a_n = 2n - 1$$

(۲) ۲, ۴, ۶, ۸, ...

$$a_{n+1} = a_n + 2 \quad a_1 = 2$$

$$a_n = 2n \quad \text{دنباله اعداد زوج}$$

▲ در دنباله اعداد $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ ضابطه

سبب دسوم دنباله را بیابید.

$$a_1 = 1 \quad a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3 \quad a_3 = a_2 + 3 = 3 + 3 = 6 \quad \dots$$

بنابراین دنباله به صورت زیر است:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots \end{matrix}$$

$$\Rightarrow a_n = n^2 \quad n=23 \rightarrow a_{23} = 23^2 = 529$$

— دیدیم که دنباله را می توان به عنوان تابعی با دامنه اعداد طبیعی نمایش داد. بنابراین

مقدور آن را نیز می توان به کمک مکان یابی به راحتی رسم کرد.

▲ مقدر هر دنباله را رسم کنید.

$$(1) \quad a_n = 2n - 3$$

$$a_1 = 2(1) - 3 = -1$$

$$a_2 = 2(2) - 3 = 1$$

$$a_3 = 2(3) - 3 = 3$$

$$a_4 = 2(4) - 3 = 5$$

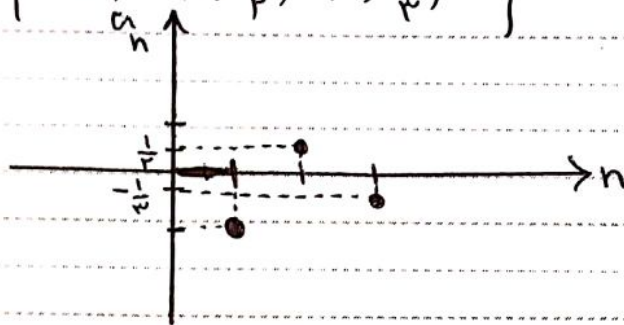
$$\Rightarrow a_n = \{(1, -1), (2, 1), (3, 3), (4, 5), \dots\}$$




$$(۲) \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$b_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1 \quad b_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} \quad b_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}, \dots$$

$$b_n = \left\{ (1, -1) \text{ و } (2, \frac{1}{2}) \text{ و } (3, -\frac{1}{3}) \text{ و } \dots \right\}$$



همه رده اول دنباله زیرا مشخص کرده بود در آن بار هم 

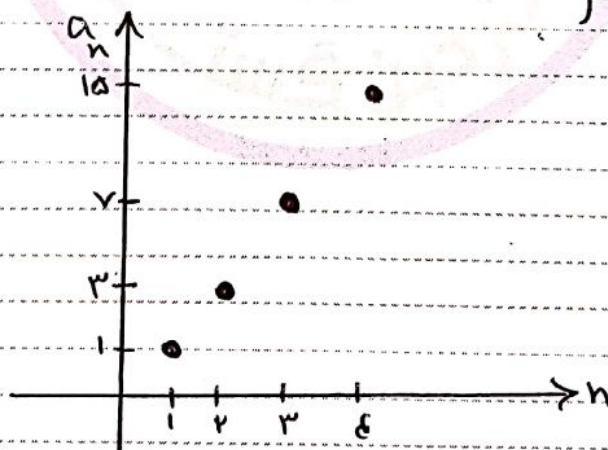
$$a_1 = 1 \text{ و } a_{n+1} = 2a_n + 1$$

$$a_1 = 1 \text{ و } a_2 = 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3$$

$$a_2 = 3 \text{ و } a_3 = 2a_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7$$

$$a_3 = 7 \text{ و } a_4 = 2a_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15$$

$$\Rightarrow a_n = \left\{ (1, 1) \text{ و } (2, 3) \text{ و } (3, 7) \text{ و } (4, 15) \text{ و } \dots \right\}$$



I. با توجه به دنباله $a_n = \frac{1-n}{n+2}$ و $b_n = 3^{n+1}$ رابطه در آن را رسم کنید.
 عبارت $c_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$ را رسم کنید.

II. چهار جمله اول دنباله بازگشتی زیر را مشخص کرده و نمودار آن را رسم کنید.

$$a_1 = 1 \quad \text{و} \quad a_{n+1} = a_n + (-1)^n$$

III. ضابطه بازگشتی و چهار جمله اول دنباله زیر را بنویسید.

$$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots$$

IV. برار دنباله زیر، رابطه بازگشتی و ضابطه بنویسید.

$$1, 3, 9, 27, \dots$$

V. نمودار دنباله $a_{n+1} = -\frac{1}{a_n}$ و $a_1 = 2$ را رسم کنید.

