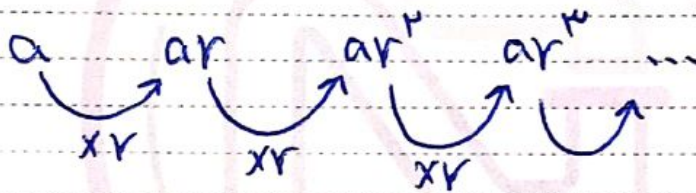


۱. دنباله هندسی
۲. توان‌ها را گویا
۳. عضوهای غیر صفری

پیشنهاد: ابتدا اول درس ۲ تدریس شود.

1. دنباله هندسی

دنباله هندسی، دنباله‌ای است که هر جمله آن از جمله قبلی در یک عدد ثابت (مضرب صفر) به دست می‌آید. این عدد ثابت را نسبت مشترک نامیده و در دنباله هندسی آن را با r نشان می‌دهیم.



$$\text{جمله اول} = a$$

$$\text{جمله دوم} = ar$$

$$\text{جمله سوم} = ar^2$$

$$\text{جمله چهارم} = ar^3$$

⋮

$$\text{جمله nام} = ar^{n-1}$$

جمله nام: در دنباله هندسی، جمله nامی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$a_n = a \times r^{n-1}$$

جمله اول (همان a_1 است): a

نسبت مشترک: r

a_n : جمله nام

تذکره: در تعریف دنباله هندسی تقسیم که هر جمله از جمله قبلی کردن
 جمله قبلی در نسبت مشترک به دست می آید، بنابراین
 نسبت مشترک از تقسیم کردن هر جمله بر جمله ماقبل خود به دست می آید.

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots$$

مثال • با توجه به دنباله رو به رو به رو بالا زیر پاسخ دهید.

۳، ۹، ۲۷، ۸۱، ۲۴۳، ...

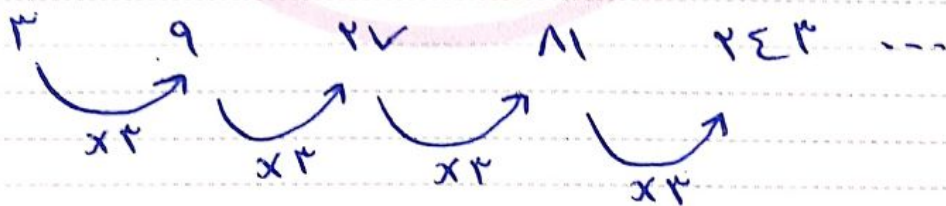
الف. نوع دنباله را مشخص کنید.

ب. ضابطه بازگشتی دنباله را بنویسید.

پ. جمله عمومی دنباله را تعیین کنید.

ت. جمله دهم این دنباله را مشخص کنید.

← چون هر جمله از ۳ برابر کردن جمله قبلی به دست می آید لذا
 دنباله فوق یک دنباله هندسی است.



$$\Rightarrow r = 3$$

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 3 \times a_n \end{cases} \quad \leftarrow$$

$$\downarrow$$

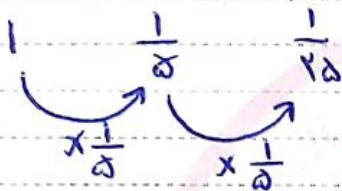
جمله قبلی = ۳ × جمله قبلی

$$3 = 3^1 \text{ و } 9 = 3^2 \text{ و } 27 = 3^3 \text{ و } \dots$$

$$\Rightarrow a_n = 3^n$$

$$a_{10} = 3^{10}$$

مثال . با توجه به دنباله $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots$
 نوع دنباله ، ضابطه بازگشتی ، جمله عمومی و جمله یازدهم را مشخص کنید .



دنباله هندسی و $r = \frac{1}{5}$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{5} \times a_n \end{cases}$$

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$a_{11} = \left(\frac{1}{5}\right)^{11-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$$

تذکره . ضابطه بازگشتی دنباله هندسی a, ar, ar^2, ar^3, \dots

به صورت زیر خواهد بود

$$a_1 = a$$

$$a_{n+1} = r a_n$$

شرط تشکیل دنباله هندسی :

شرط آنکه سه عدد a, b, c تشکیل دنباله هندسی

بدهند آن است که

$$b^2 = axc$$

۲۲/۱۱

یعنی: ضرب ۲۲ = کناره = توان دوم ۲۲ وسط

- در واقع b رابط هندسی بین a و c است.

مثال: رابط هندسی بین اعداد $\frac{1}{14}$ و $\frac{1}{4}$ چه عددی است؟

$$\frac{1}{4} \quad \boxed{x} \quad \frac{1}{14}$$

ضرب ۲۲ = توان دوم ۲۲ وسط

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{14} = \frac{1}{56}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{8}$$

مثال: مقدار a را چنان بیابید که

$$\sqrt{a} - 1 \quad \vee \quad \sqrt{a} + 1$$

شکل دایره هندسی بدهند. پس مقدار نسبت مشترک را

به دست آورید.

$$(v)^2 = (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)$$

منزلج

$$(\sqrt{a})^2 - (1)^2 = a - 1$$

$$\Rightarrow a - 1 = 49 \Rightarrow a = 50$$

$$r = \frac{\text{دوم ۲۲}}{\text{اول ۲۲}} = \frac{v}{\sqrt{50} - 1}$$

مثال . در یک دنباله هندسی جمله اول ۱۰۲۴ و نسبت مشترک
دنباله $\frac{1}{2}$ است . چندمین جمله دنباله برابر کم ۴ است ؟

$$a_n = a \times r^{n-1}$$

$$a_1 = 1024 \quad r = \frac{1}{2} \quad a_n = 44 \quad n = ?$$

$$\Rightarrow 44 = 1024 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{44}{1024} = \frac{1}{14} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\Rightarrow n-1 = 4 \Rightarrow n = 4+1 \Rightarrow n = 5$$

بنابراین جمله ۵ ام این دنباله برابر ۴۴ است .

... و ۳۲ و ۴۴ و ۱۲۸ و ۲۵۶ و ۵۱۲ و ۱۰۲۴

↓
۵

مثال . در یک دنباله هندسی جمله اول $\frac{1}{4}$ و نسبت مشترک دنباله

۴ است . چندمین جمله از این دنباله برابر ۲۱۴ می باشد ؟

$$a_n = a \times r^{n-1}$$

$$\Rightarrow 214 = \frac{1}{4} \times 4^{n-1}$$

$$\Rightarrow 4^{n-1} = \frac{214}{\frac{1}{4}} = 1294 = 4^4$$

$$\Rightarrow n-1 = 4$$

$$\Rightarrow n = 5$$

مثال . در دنباله هندسی ... و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$ حاصل عبار

$$\frac{a_{10}}{a_7} \text{ را بیابید .}$$

$$r = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r} = 2 \quad a_n = ar^{n-1}$$

$$\frac{a_{10}}{a_7} = \frac{ar^{10-1}}{ar^{7-1}} = \frac{r^9}{r^4} = r^5 = (2)^5 = 32$$

تذکرہ: اگر a_m و a_n دو ہر ازبہ نسبت ہندس باہ

نسبت مشترک ازرابہ زیر جہد مہا کہ

$$\frac{a_m}{a_n} = r^{m-n}$$

مثال: دریک دنباله هندسی جہد ۲۴ و جہد ۱۹۲ ہندس باہ۔
نسبت مشترک ازرابہ کہند۔

$$a_8 = 24 \quad a_7 = 192 \quad r = ?$$

$$\frac{a_m}{a_n} = r^{m-n} \Rightarrow \frac{192}{24} = r^{7-8}$$

$$\Rightarrow r^4 = 8 \Rightarrow r = 2$$

مثال: جہد سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جہد پنجم ہندس باہ۔
جہد ہفتم ازبہ ازرابہ کہند۔

$$a_3 = 27 \quad a_5 = 243 \quad a_7 = ?$$

$$\frac{a_5}{a_3} = r^{5-3} \Rightarrow \frac{243}{27} = r^2 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$$

$$a_7 = ar^6 = 27 \quad \begin{matrix} r=3 \\ a=? \end{matrix} \Rightarrow a \times (3)^6 = 27$$

$$\Rightarrow a = \frac{27}{9} = 3$$

$$a_v = a \times r^{n-1} \quad \frac{23}{\equiv}$$

$$\Rightarrow a_v = 3 \times 3^{v-1} = 3 \times 3^2 = 3^3 = 27$$

مجموع جملات دنباله هندسی:

مجموع n جمله اول دنباله هندسی را با S_n نشان داده از رابطه

زیر به دست آورید:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} = ?$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{مجموع هندسی} = \frac{\text{تعداد} \times (\text{نسبت مشترک}) - 1}{\text{نسبت مشترک} - 1} \times \text{جمله اول}$$

مثال ۱ - مجموع ده جمله اول یک دنباله هندسی که نسبت مشترک آن ۲ و جمله اول آن ۳ را بیابید.

$$r=2 \quad a=3 \quad n=10 \quad S_{10}=?$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_{10} = \frac{3(1-2^{10})}{1-2} = 1023$$

مثال ۲ - مجموع ده جمله اول یک دنباله هندسی با مفروضه زیر را بدست آورید.

$$a=1534 \quad r=\frac{1}{2}$$

$$S_{10} = \frac{1534(1-(\frac{1}{2})^{10})}{1-\frac{1}{2}}$$

تمرین

۱. با توجه به دنباله روبه رو، یکی از زیرهای بسط دهید.

$$\dots, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1$$

- نوع دنباله و نسبت مشترک را مشخص کنید.

- جمله عمومی دنباله را بنویسید.

- جمله بیستم دنباله را مشخص کنید.

- جمله نهم را بیابید.

۲. در دنباله هندسی $\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, 2$ و 16

(الف) جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

(ب) حاصل S_{10} را به دست آورید.

۳. جمله نهم یک دنباله هندسی ۹ و جمله بیستم آن ۲۴۳ است.

مقادیر a و r و a_{10} را به دست آورید.

۴. اگر $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ سه جمله متوالی یک دنباله

هندسی باشند، مقدار a را به دست آورید.

۵. هفتمین جمله از دنباله هندسی زیر برابر 512 است.

$$\dots, 16, 8, 4, 2$$

